中龍秀 敎授指導
碩士學位 請求論文

函數 槪念 指導

2004

誠信女子大學校 敎育大學院
敎育學科 數學敎育專攻
李周娟

函數 概念 指導

申龍秀 教授指導

이 論文을 碩士學位 論文 提出함

2004年 5月

誠信女子大學校 敎育大學院
敎育學科 數學敎育專攻
李周娟

認　准　書

李周娟의 碩士學位 論文을 認准함

審查委員________________________인

審查委員________________________인

審查委員________________________인

2004年 6月

誠信女子大學校 教育大學院

논문개요

Klein이 함수를 학교 수학에 도입하고, 함수적 사고의 중요성을 강조한 이래, 함수 개념은 학교 수학의 핵심적인 분야가 되어 왔다. 1960년대의 수학교육 현대화 운동 이후 학교 수학의 현대 대수화를 위한 노력에 의해 함수 개념에 대한 현대적 관점이 도입되었다. 그러나, 이러한 관점으로 함수 개념을 도입하는 구조주의적 방법은 학생들에게 함수적 사고를 개발하는데 도움을 주는 것이 아니라 오히려 장애의 원인이 되며 함수를 여전히 구조주의적인 관점에서 '두 집합 사이의 대응'으로 지도하고 있으며, 이러한 지도 방법은 단지 함수에 대한 피상적인 지식만을 전달할 뿐, 함수적 사고의 형성을 어렵게 하고 있다고 판단된다.

이러한 관점에 따르면, 함수 지도에서는 함수의 본질이 무엇인가를 그 발생 맥락에서 고려하는 것, 그러한 본질에 입각하여 학생들에게 어떤 현상을 제공할 것인가 하는 점을 고려하는 것이 우선 중요하다고 볼 수 있다.

본 논문은 이러한 문제 의식하에, 함수의 이론적 개념의 변화와 여러 선행 연구들을 살펴보았다. 또한 이를 바탕으로 함수 개념에 관한 검사지를 통해 학생들이 함수 개념과 용어를 학습할 때 일어나는 여러 가지 어려움과 함수의 여러 표상 능력의 차이를 조사하여 제시하였으며, 그 해결방안을 모색하였다.

본 연구를 위해 경기도에 소재하고 있는 K고등학교 2학년 학생들을 대상으로 검사를 실시하였으며, 검사지는 선행연구자들이 개발한 문제들을 참고로 하여 본 연구자가 직접 제작하였다. 검사지는 체점지군에 따라 점수를 산출하였고 결과에 대한 분석을 통하여 나타난 학생들이 함수 개념과 용어를 학습할 때 발생되는 여러 가지 어려움들과 함수의 여러 표상 능력의 차이와 이에 따른 문제점을 제시하고, 해결방안을 제안하였다.

목　　차

Ⅰ. 서론 ·· 1
1. 연구의 필요성과 목적 ···························· 1
2. 연구의 내용 ·································· 4
3. 연구의 제한점 ································· 4
4. 용어의 정의 ·································· 5
Ⅱ. 본론 ·· 7
1. 이론적 배경 ·································· 7
(1) 함수의 역사적 발생과 변천과정 ···················· 7
(2) 학교 수학에 함수가 도입된 배경 ···················· 12
(3) 우리 나라 함수 개념 지도 ························ 13
2. 선행연구 ···································· 17
(1) 변수 ······································ 17
(2) 함수, 그래프, 시각화 ··························· 18
(3) 함수의 개념·용어 이해 ·························· 21
3. 연구설계 ···································· 23
(1) 연구대상 ···································· 23
(2) 검사도구 ···································· 23
4. 연구의 실제 ·································· 25
(1) 예비검사 ···································· 25
(2) 본검사 ····································· 25
(3) 자료의 처리 및 분석 ···························· 26
(4) 검사 결과의 분석 ······························ 29
Ⅲ. 결론 및 제언 ································· 38
참고문헌 ······································· 42
<부록> 함수 검사지

I. 서론

1. 연구의 필요성과 목적

수학은 인류 문명과 함께 발전해 왔으며 급변하는 21세기 산업, 금융, 정보통신, 국방 등 그 영향이 미치지 않는 곳이 없을 정도로 인류와 밀접한 관계를 맺고 있다. 그 중 함수 개념은 산술·대수에서 기하·확률에 이르기까지 수학 전 분야에 걸쳐 가장 기초적인 개념이다. 이와같이 함수 개념은 수학과 물리, 일상생활에서도 찾아볼 수 있으며 입출력 상황과 자연현상, 사회현상을 연구하거나 이해하기 위한 수학적 사고의 모든 부분에 관련해서 널리 활용되는 개념이다.

또한 최근 6차 수학과 교육 과정에 뒤이은 제7차 수학과 교육 과정은 일상 생활 현상에서 수학적으로 사고하는 능력을 강조하고 있다. 이러한 수학교육의 동향은 통합적인 사고에 기초한 함수 개념 학습의 중요성을 말해주고 있다.

20세기 초 수학교육의 근대화를 주도한 독일의 Klein은 수학에서 특히 함수 개념을 강조했다. 그는 교육은 발생적 방법에 의하여 이루어져야 하고, 함수적 사고가 수학적 사고의 핵심으로서 함수적 사고를 훈련하는 것이 수학을 가르치는 목표 가운데 가장 기본적인 것이라고 강조했다. 따라서 학교 수학은 함수적 사고를 중심으로 구성되어야 한다고 하였다. 이와 같은 함수적 사고란 수학적 사고의 일부로서 함수 자체에 대한 사고를 포함한 관점에서 볼 때, 여러 가지 수학 내적이나 수학 외적 상황을 함수적인 관점으로 파악하고 처리하는 사고라 할 수 있다[6]. 그러나 학교 수학에서 이렇듯 많은

의미를 지니고 있는 함수 개념은 학생들에게 학교 수학 과정 중 가장 숙달하기 어려운 개념 가운데 하나로 인식되고 있다. 이것은 학교 수학 학습과정에서 소개하고 있는 함수의 정의(Dirichlet의 정의)가 형식적이고 추상적이어서 학생들이 제대로 이해하는데 어려움을 느끼고 있기 때문이다.

함수는 사실상 물리적, 사회적, 정신적인 '변수'들 사이에 존재하는 '종속(dependence)'이라는 관련성을 조직하는 수단으로 생겨난 것이다. 그러나 오늘날 수학교육에서 함수에 대한 이러한 해석은 기피되고 있으며, 그 대신 '대응(correspondence)'을 함수의 '본질'로 받아들이고 있다. 다시 말해 다양한 실제적인 변화 현상 가운데에서 활동 경험을 통하여 이를 내면화하고 대상화하여 규칙성을 발견하고 이를 관계식, 그래프 등으로 정리하고 표현하여 수학화 해내는 과정은 생략된 채로 현대적 함수 개념에 따라 오늘날의 함수교육에서도 함수 개념의 본질이 대응으로 간주되고 있는 것이다[8].

이러한 함수개념의 혼동은 학생들에게 대응으로 설명되어진 함수의 개념과 이후로 배우는 함수들과의 연계성 등을 찾지 못해 일반적인 함수개념을 이해하는 데 더 어려움을 느끼게 되고, 이러한 영향으로 함수적 사고를 필요로 하는 많은 현실적인 변화 상황에서도 문제해결을 하는데 오히려 장애요인이 되고 있다고 하였다[7].

한편, 학교 수학에서 함수를 지도하는 목적은 실생활의 상황을 함수적 관점에서 파악하는 함수적 사고를 신장하는 것이다. 함수적 사고의 신장을 위해서는 우리 주위의 여러 가지 사물이나 상황 사이의 관계를 밝혀내어 수학적 내용으로 모델링하는 능력, 여러 가지 함수를 표현하는 방법을 이해하며 각각의 표상(representation)으로 번역할 수 있는 능력을 길러야 한다. 함수는 대응표, 순서쌍, 입출력

기계, 화살표 다이어그램, 그래프, 식 등의 다양한 방법으로 표상된다. 따라서, 상황에 따라 어떠한 함수 관계의 표상을 다른 방식으로 표상하고 번역하는 능력은 함수학습의 기본이 되며, 수학 개념의 관계적 이해와 문제해결을 촉진시키는데 본질적인 역할을 한다.

NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)의 Standards에서는 9학년에서 12학년까지의 규준 중 함수 과정은 실세계를 함수로 표현할 수 있는 능력, 표, 언어적 규칙, 방정식과 그래프를 사용하여 문제를 표상하고 분석할 수 있는 능력, 함수를 기호, 그래프와 표를 이용한 표상으로 번역할 수 있는 능력 등을 강조하고 있다.

이러한 입장에서 본 연구는 함수개념의 도입에서 일어나는 다양하고 실제적인 변화 상황 속에서 종속관계를 인식하고 또한 그러한 종적 종속 관계를 구성해보는 활동을 통해 점진적인 수학화 과정을 경험하도록 함으로써 함수개념의 본질이 형성될 수 있도록 하고 진정한 함수적 사고의 발달을 가져올 수 있도록 하는 것에 목적이 있다.

또한 본 연구는 고등학교 10단계 함수 과정을 이수한 학생들이 개념에 대한 정의를 어떻게 이해하고 있으며, 함수의 개념과 용어를 어느 정도 이해하고 논지를 파악해서 이해함에 어떤 어려움이 있는지와 그래프를 관계식으로, 관계식을 그래프로 번역하는 능력을 검사지를 통해 알아보고, 각 능력의 차이점을 조사하고 학생들이 겪는 어려움을 분석 제시하여, 문제해결에 도움이 되는 방안이 무엇인지 모색하고자 한다.

2. 연구의 내용

본 논문은 이상에서 말한 연구의 목적을 달성하기 위해 다음과 같

은 연구 문제를 설정하였다.

1. 고등학교 1학년 함수 과정을 이수한 학생들의 함수 개념과 용어 파악은 어느 정도인가?

2. 학생들의 함수 개념과 용어 이해 과정에서 발생하는 어려움에는 어떤 것이 있는가?

3. 고등학교 1학년 함수 과정을 이수한 학생들의 '관계식으로부터 그래프로', '그래프로부터 관계식으로' 표현하는 번역 능력은 각각 어느 정도이며, 각 능력에는 어떠한 차이가 있는가?

3. 연구의 제한점

본 연구는 다음과 같은 제한된 조건하에서 시행하였다.

1) 본 연구는 고등학교 1학년 함수 학습 과정에 국한한다.

2) 본 연구는 본 연구자가 임의로 선정한 경기도 내에 소재하고 있는 K고등학교 5개 학급, 총 150명의 학생을 대상으로 하기 때문에 특성이 다른 집단에 대해서는 연구의 결과가 다르게 나타날 수 있다. 따라서, 본 연구의 결과를 일반화할 때에는 주의를 필요로 한다.

3) 본 연구의 검사 도구는 Zvia Markovits, Bat Sheva Eylon, Maxim Bruckheimer가 함수 개념을 제대로 이해하는지 알 수 있도록 개발한 문제들을 본 연구자가 우리 나라 현행 고등학교 수준에 맞추어서 변형하여 고안한 문항과 본 연구자가 여러 교과서 및 문제집을 참고로 하여 직접 제작한 문항으로 구성하였다. 따라서 객관적이고 완전한 평가를 하는 데 있어서 편협화할 가능성이 있다.

4. 용어의 정의

1) 표상(representation)

표상(表象, representation)은 마음 또는 의식에 현전하는 것을 뜻하는 철학·심리학 용어에서 비롯된다.

본 논문에서 말하는 표상이란 수학교육에서 사용되는 감각에 대한 자극으로 작용 표현되는 차트, 대응표, 순서쌍, 입출력 기계, 화살표 다이어그램, 그래프, 식 등과 같은 물리적인 기호 체계와 인지적 또는 정신적으로 학습자의 마음에 존재하는 심적 복합체계, 즉 스키마, 관념, 심상, 이미지 등을 말한다. 이 때, 전자를 외적표상이라 하고, 후자를 내적 표상이라 한다[16].

2) 번역(translation)

본 논문에서의 번역은 한 표상에서 다른 방식의 표상으로 옮기는 것을 말한다. 특히, 그림 1과 같이 실세계(상황·그림·언어 등의 묘사)에서 수학적인 용어로 번역하는 과정을 모델링(modeling)이라 하고, 수학적인 용어를 실세계로 번역하는 일을 번역(translation)이라고 한다.

3) 함수개념

두 양 x, y가 있을 때, x의 값에 따라 y의 값이 하나씩 정해지는 관계가 있을 때 y는 x의 함수라고 한다.

이렇게 함수를 정의한 것을 바탕으로 여러 가지 물리적, 사회적, 정신적 세계 특히 수학 전세계에서 일어나는 다양한 실제적인 변화 상황 가운데에서 종속관계를 인식하고 또한 그러한 동적인 종속관계를 구성해보는 활동을 통해 점진적인 수학화 과정을 경험하도록

함으로써 진정한 함수적 사고의 발달을 가져올 수 있도록 하는 것을 함수개념이라 한다.

4) 변수

일반적으로 수를 나타내기 위하여 사용되는 문자이거나 문자열이다. 임의의 특수한 경우에는 항상 변할 수 있는 변수의 값이 어떤 특정한 수를 나타내기도 한다.

함수에서는 관계를 설명하고 분석하는 수단으로서 서로 다른 두 개의 변수를 포함하는 수식 내의 한 변수에 수를 대체함으로 인해 다른 변수의 값이 결정된다면, 전자의 변수를 독립 변수라 부르며, 후자의 변수는 종속변수라 부른다[17].

II.본론

1. 이론적 배경

고대부터 지금까지 오랜 세월동안 함수적 개념이 발달하고 정립되었지만, 그 내용에서 큰 변화는 없었다. 그러나 함수가 '함수'라는 이름으로 불려지고, 체계적인 개념이 잡히기까지 함수 개념의 형성과 발달의 중요한 계기와 수학적으로 형식화되는 과정을 충분히 관찰하고 분석해 보아야만 함수 교육에 실질적 도움이 될 것이라고 생각해서, 함수의 역사적 배경과 변천과정을 살펴보기로 하자.

(1) 함수의 역사적 발생과 변천과정

함수개념은 수학의 다른 여러 개념들과 마찬가지로 오랜 세월에 거쳐 발달해왔다. 함수개념의 암묵적인 출현은 기원전 2000년경의 고대 바빌로니아 시대까지 거슬러 올라간다. 기원전 5세기경의 바빌로니아 사람들은 천문학 연구에서 천체 위치의 주기성을 발견하고 이 경험적 자료를 바탕으로 천체 운동을 나타내는 경로를 추정하고 이를 수표로 나타내었다. 그러한 수표는 흔히 함수를 나타낸다. Ptolemaeus의 천문학 책 속의 현표는 그리스 천문학자들이 오늘날 삼각함수로 일컫는 것을 알고 있었다는 사실을 말해준다. 일차함수, 이차함수, 삼차함수와 같은 초등함수의 기원 역시 의식적으로 다루어지지 않았지만 바빌로니아 수학에서 찾아볼 수 있다.

그리하여 수학적인 함수가 의식적으로 개념화되어 나타나기 시작한 것은 대략 17세기쯤이라 할 수 있다. 이때의 함수는 역학에서 물체의 운동을 양적으로 조직화하는 것으로부터 시작하여 시간과 거리와 같은 변량 사이의 관계로서 수학에 도입되었다. 그 당시에는

운동을 나타내는 여러 가지 곡선과 결합되어 도형적으로 개념화되었기 때문에 기하학적인 함수라 말할 수 있다.

함수란 용어는 17세기에 Leibniz가 처음 사용하였다. 함수의 영단어 function은 기능이나 작용을 뜻하는 단어로서 수학에서 함수가 중요한 기능을 하고 있기 때문에 그렇게 이름을 붙였다. Leibniz는 '변수 x 값의 변화에 따라서 다른 변수 y가 정해지면, 이때 y를 x의 함수'라고 정의하였다. 또 함수와 곡선을 같은 것으로 보아 '곡선의 함수를 규정하는 것'이라고 생각하였다.

그 후 곡선과 결합된 함수를 나타내는 방정식이 강조되면서 본래 곡선과 무관하게 단지 방정식에 등장하는 기호의 역할 및 기호 사이에 성립하는 관계가 주목받게 되고 17세기말까지는 대수적인 함수가 출현하게 되었다. 이 때까지 함수는 어떤 양에 종속되는 다른 한 양, 즉 종속변수에 해당하는 것이었다.

함수 개념은 Newton등 많은 수학자에 의하여 미분적분법의 바탕으로 이용되기 시작하였다. Newton과 Leibniz는 기하학적이고 운동학적인 양 사이의 함수 관계에 대해 연구하였으나 이를 명확히 하고 기호로 나타내게 된 것은 그 후의 일이며, 양의 기호와 함수 사이의 혼동이 오랫동안 지속되었다.

Leibniz의 제자인 Bernoulli에 의해 Leibniz의 함수 개념은 더욱 발전하였다. Bernoulli의 제자인 Euler는 함수기호 f를 처음 사용하였고, 18세기 전반기에 함수 개념을 명확히 정의하였다. Euler는 그의 책 「무한 해석 입문(Introduction analysis infinite), 1748」에서 '한 개의 변수의 함수란, 그 변수와 몇 개의 상수로 만들어진 해석적인 식'이라고 말하였다. 이것은 곡선과 함수 개념을 분리시키려는 시도

로 볼 수 있다. Euler는 x의 임의의 함수는 직선 또는 곡선으로 나타낼 수 있으며, 역으로 임의의 곡선은 함수로 낼 수 있다고 보고, Leibniz가 함수를 기하학적 대상으로 보던 것을 수식화하여 해석적으로 다룰 수 있게 하였다.

18세기에 들어서면서 17세기 해석학이 점차 기하학적인 원천과 배경으로부터 분리되는 과정에서, 곡선에 관련된 종속변수로서 기하학적인 함수 개념은, 그 개념을 포괄하는 대수적인 식으로서 표현되는 함수 개념으로 거의 완벽하게 대체되게 되었다. 대수적인 함수 개념에서는, 이전과 달리 독립변수와 종속변수의 구별이 명확해졌다. 각각의 변수들이 독립변수로 선택될 수 있었으며, 각 변수의 구체적인 변화와 무관하게 다만 각 변수를 어떤 형태로든 서로 '연결'할 수 있느냐 없느냐 하는 것이 중요시되었다. 이것은 더 나아가, 함수가 그 기하학적인 원천과 관계없이 대수적으로 조작 가능하다는 것을 의미했다. 그리고 그 주된 조작성으로 '합성'과 '역함수 구하기'가 포함되게 되어, 이전에는 전혀 알 수 없었던 새로운 함수들이 등장할 수 있었고, 동시에 함수의 새로운 세계를 열게 되었다.

18세기 후반에 진동하는 끈에 대한 편미분 방정식의 해에 대한 논의에서 하나의 해석적인 식으로 낼 수 없는 함수가 등장하였고, Fourier는 푸리에 급수라고 일컬어지는 곡선을 연구하던 중, 변수들 사이에 과거 함수라고 하던 것보다 일반적인 관계에 대하여 고찰함으로써 기존의 함수 개념을 비판하게 되었다. 그는 임의의 함수는 삼각함수로 전개가 가능하다는 주장을 제기하였는데, 이를 계기로 함수는 하나의 해석적인 표현이 가능한 것이라는 전통적인 관념에 혁명적인 변화가 일어났다[4].

1821년 Cauchy는 「해석교정」에서 여러 변수들 중의 하나에 어떤

값들을 주면 그것에 대해서 다른 변수들의 값이 '독립변수'가 된다고 하였다. 이 때, 다른 변수를 '종속변수'라 하고, 그것을 그 독립변수의 '함수'라고 정의하였다. 즉 '두 변수 x, y 사이에 어떤 관계가 있어서 x의 값이 정해지면 그에 대한 y의 값이 정하여질 때, y를 x의 함수'라고 하였다. Cauchy는 Euler와 달리 해석적인 식으로 나타내어진다는 조건을 없애고 변수 사이의 대응 관계로 함수를 정의하였다. 따라서 기하학적인 면이나 구체적인 식으로 표현되는 해석적인 개념으로부터 함수의 개념이 분리되기 시작한 것이다.

Dirichiet는 Cauchy의 정의를 문자 그대로 해석하고 함수를 '어느 구간 내의 어떤 변량 x 각각의 값에 y의 값이 각각 정해질 때, y를 x의 함수라고 한다'라고 정의하였으며, 폐구간 $[a, b]$에 속하는 x에 대하여 변수 x의 함수는 전 구간에서 y가 어떤 일정한 규칙에 의해서 x와 관계할 필요도 없고, 종속변수를 수학적 연산으로 나타낼 필요가 없다고 하였다.

Dirichiet의 함수로

$$D(x)=\begin{cases} a, & x\text{가 유리수 일 때} \\ b, & x\text{가 무리수 일 때} \end{cases}$$

은 해석적인 표현으로 나타낼 수 없고, 또 마음대로 그릴 수 있는 곡선도 아닌 함수의 예이며, 어디서나 불연속인 예이다. 다시 말해서 함수의 개념을 임의의 짝짓기로써 설명한 것이다. 이는 함수란 하나의 대응관계에 불과한 것이라고 고찰한 점에서 오늘날 함수 정의와 유사함을 엿볼 수 있다.

18세기 후반 들어 다양한 함수가 도입되었고 이와 같은 결과로 한 변수가 다른 한 변수에 종속되든 종속되지 않든 또는 한 변수가 다

른 한 변수에 종속된다고 할 경우에도 그 종속이 수학식으로 표현될 수 있는 것은 문제시되지 않았으며, 다만 한 변수의 값에 다른 한 변수의 유일한 값이 대응될 수 있느냐 하는 논리적 조건의 만족 여부만이 문제로 되었다. 이와 같은 논리적 함수 개념이 기하학적 함수 개념과 대수적 함수 개념을 지배하던 '종속'이라는 속성을 희석시켰으며, 19세기말에는 독일의 수학자 Cantor가 집합론을 연구하여 집합 원소 사이 대응이란 개념을 도입하였고, 그의 영향을 받은 Dedekind가 현재 우리가 사용하는 함수의 정의, 즉 '두 집합 A, B가 주어졌을 때 A의 각 원소에 대응하여 B의 원소가 오직 하나씩 대응되는 규칙이 있으면 이 대응규칙을 A에서 B로의 사상(mapping)' 이라 하게 되었다. 특히 A와 B가 수로 이루어진 집합이면 이 사상을 함수라고 정의하였다. 19세기말에는 '임의의 대응'이라고 하는 함수 개념의 속성이 보편적으로 받아들여졌으며, '함수'라는 용어도 '해석적 표현'이라는 용어에 관계없이 분명한 의미를 획득하게 되었다. Dedekind가 확립한 사상(mapping)의 개념이 뒷받침되어, Weierstrass가 연속이지만 모든 점에서 미분 불가능한 함수를 발견하게 되자 급진전을 이루게 되었다. 이와 같은 결과로 Lebesque의 측도론을 거쳐 실변수 함수론, 함수해석학으로 발전하기에 이르렀다.

이상으로 함수 개념의 역사적 배경을 살펴보았다. 그 결과 함수 개념은 처음 종속변수와 독립변수와의 관계에 관한 것으로 형성되었으나 현대에 쓰이고 있는 집합과 대응의 개념은 19세기말부터 시작되어 20세기 전후에 형성된 것이라는 것을 알 수 있었다.

이와 같이 오랜 세월을 거쳐 함수 개념이 발달하여 왔음에도 오늘

날 함수교육에서는 이러한 과정은 거의 드러나지 않은 모습으로, 잘 다듬어진 형태로만 제공되고 함수 개념의 형성과 발달의 계기나 필요성에 관한 고찰은 간과하고 있는 실정이다. 단지, 설명을 통해 개념의 다양한 측면을 잘 드러내는 연습문제 풀이로 학생들은 그 개념을 이해하고 내면화하며, 익힐 수 있을 것이라고 생각해 온 것이다. 그러나 그러한 생각은 잘못되었으며 여전히 학생들에게 함수는 가장 어려운 개념으로 여겨지고 있는 현실이다.

현재 우리 나라 교육과정에서는 집합과 대응의 개념으로 함수를 지도하고 있는데 학생들에게 가장 어려운 개념인 함수 지도 방법의 문제점에 관하여 다시 한번 생각해 볼 필요성이 있다고 생각되었다. 요즘 세계적인 추세가 변수사이의 관계로 함수를 정의하는 것으로 돌아가고 있는 실정이고, 우리 나라에서도 변수사이의 관계로 함수 개념을 도입하자는 의견이 나오고 있으므로 이러한 개념에 관하여 많은 연구와 노력이 뒤따라야 할 것이다[4].

(2) 학교수학에 함수가 도입된 배경

함수개념이 학교 수학에 도입된 것은 20세기초에 독일에서 Klein이 수학 교육 개혁을 주창한 이후이다. Klein은 함수적 사고교육의 중요성을 강조하고 미적분 지도의 필요성을 주창하면서 독일의 수학교육 개혁 운동을 주도하였다. 이 때 함수 개념이 학교 수학에 도입된 것이다.

그는 개념적 사고 방법을 중요하게 보면서 함수적 사고 습관의 도야를 강조하였으며, 함수개념이 수학 수업에 스며들어 학생들에게 살아있는 자산이 되도록 지도되어야 한다고 주장하였다. 함수적 사고는 대수와 기하를 관련지어 주고 응용 수학을 포함하여 수학적

사고 전체의 바탕에 놓여 있는 기본적이고 핵심적 관점이라고 판단하였다.

함수 개념은 초기에는 여러 가지 변화 현상 가운데 그 종속 관계를 설명하고 기술하고 조직하기 위한 도구로서 도입되었다. 이는 역동적인 변화 현상과 관련성이 풍부한 특징을 보이고 있다. 함수 개념은 여러 가지 물리적, 사회적, 정신적 세계 특히 수학적 세계에서 일어나는 변화 현상 가운데 그 '종속관계'를 설명하고 기술하고 조직하기 위한 도구로서 도입되었다고 하였다.

1960년대 수학교육 현대화 운동 이후 학교 수학의 현대 수학화를 위한 노력에 의해 함수 개념에 대한 현대적 관점이 도입되었다. 그러나, 이러한 관점으로 함수 개념을 도입하는 구조주의적 방법은 학생들에게 함수적 사고를 개발하는데 도움을 주는 것이 아니라 오히려 어려움의 원인이 되며 수학적 개념 발달 메커니즘과도 부합되지 않는다는 것이 거듭 지적되어 왔다. 그러나 학교 수학에서는 함수를 여전히 구조주의적인 관점에서 '두 집합 사이의 대응'으로 지도하고 있으며, 이런 지도 방법은 단지 함수에 대한 피상적인 지식만을 전달할 뿐, 함수적 사고의 형성을 어렵게 하고 있다고 판단된다.

이상에서 살펴본 바에 의하면 함수가 학교 수학에 도입된 초기에는 두 변수 사이의 종속관계로 함수 개념이 설명되어졌으나 1960년대 수학교육 현대화 운동 이후부터 현대적 관점으로 변화하여 '두 집합 사이의 대응'으로 변화되었음을 알 수 있다.

(3) 우리 나라 함수개념지도

해방직후 미군당국에서 교수요목을 제정하여 발표하였는데, 그 당시 초급중학교 제 1학년 수학과 교수요목을 살펴보면, 비례, 제곱의

비례, 복비례, 좌표의 내용이 나와 있기는 하나 구체적으로 언급하지 않았다.

6.25가 끝난 후 1954년 4월 20일 문교부령 제 35호로 교육과정 시간배당 기준령이 발표되고 1955년 8월 1일 문교부령 제 45호로 각급 학교 교육과정이 제정 공포되었는데, 이때부터 지금까지의 교육과정에서 함수단원에 해당되는 지도내용을 살펴보면 다음과 같다.

가. 교수요목기(1945~1954)

함수의 정의는 초급 중학교 2학년에서 「2개의 양 x, y가 있어서, x값이 정하여지면, 그것에 따라 y의 값도 정하여지고, x의 값이 변하여지면 그것에 따라 y의 값도 변하여 질 때에, y는 x의 함수」라고 두 개의 양 변화를 대상으로 함수를 정의하고 있다. 양 x의 값에 따라 양 y의 한 개 값이 아닌 단순히 y의 값만 정해질 수 있으면 그것은 함수가 된다고 정의하고 있으므로 일가 함수, 이가 함수 등 다가 함수를 생각할 수 있음이 지금의 함수 개념과 다른 점이다.

나. 제1차 교육과정기(1954~1963)

중등 수학 3학년에서 「두 개의 변수 x와 y가 있어서 (x가 들어있는 식)으로 표시되어 x값이 정해지면, 이에 따라서 y의 값도 정해질 때 y는 x의 함수라고 한다.」고 정의한다. 즉, 수식으로 나타낼 수 있는 경우에는 다가 함수의 정의가 가능하게 되어 있다.

다. 제2차 교육과정기(1963~1973)

함수에 관해서는 두 수량 x와 y에서 나타나는 관계에 중점을 두어 정의하였고, 현대적인 의미와 함수 개념이 정착되었다. 당시의 교과서에서 함수의 정의를 살펴보면 다음과 같다.

「변화하는 두 수량 x, y중 x의 값이 정해지면 그에 대응하여 y

의 값이 단 하나로 정해지는 관계가 있을 때 y는 x의 함수라고 하고, x와 y는 함수 관계가 있다고 한다.」 즉, 수량 사이의 관계로 정의되고 있는 점을 제외하면 오늘날의 정의와 유사하다. 정의역, 공역, 치역 등의 용어가 처음으로 도입되기도 했다.

라. 제3차 교육과정기(1973~1981)

제3차 교육과정에서는 함수에 관한 도입 단계로써 순서쌍과 곱집합을 지도하며 집합 사이 대응 관계의 고찰을 통하여 함수 관계의 개념을 이해시키고 있다. 당시에 함수의 정의를 보면「집합 X의 각 원소에 대하여 집합 Y의 원소가 하나씩 대응할 때 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수이다.」 즉, 두 집합 사이의 대응으로써 함수를 정의하고 있어 현대적인 의미에서 함수의 정의가 처음으로 지도되기 시작했다.

마. 제4차 교육과정기(1981~1987)

제4차 교육과정 당시에 함수의 정의를 보면「집합 X의 각 원소에 대하여 집합 Y의 원소가 하나씩 대응할 때 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수이다.」 즉, 두 집합 사이의 대응으로써 함수를 정의하고 있으며 3차 교육과정기와 크게 다를 것이 없음을 알 수 있다. 단, 3차 교육과정에서 상당 분량의 내용이 새로 첨가되었기 때문에, 4차 수학과 교육 과정에서는 새로 첨가된 내용은 없으며 수학I에서 함수의 연산이 삭제되었고, 함수의 극한에 관한 정의는 직관에 의해 지도하도록 하였다.

바. 제5차 교육과정기(1988~1994)

제5차 교육과정에서는 함수를 두 집합 사이의 대응 관계를 통하여 함수의 뜻과 함수에 관한 용어를 이해하게 하고, 함수를 「집합 X의

각 원소에 대응하는 집합 Y의 원소가 단 하나만인 대응을 f라 할 때, 이 대응 f를 X에서 Y로의 함수라 한다.」고 정의하고 있다.

사. 제6차 교육과정기(1995~2000)

제6차 교육과정에서는 함수를 두 집합 원소 사이의 대응이라고 보고 있다. 함수의 정의를 「집합 X의 각 원소에 대응하는 집합 Y의 원소가 단 하나 만 대응할 때 f를 X에서 Y로의 함수라 한다.」라고 정의하고 있다.

제한된 정의역에서도 이차함수의 최대, 최소를 다루었으나 이를 삭제하였고, 이차함수의 활용부분도 전면 삭제하였다. 그 이유는 3학년 내용이 과다하고 시간이 부적합한 것을 감안하여, 내용을 경감하고 평이하게 하기 위해서였다. 함수에서 취급하는 변역이라는 용어를 삭제함으로서 학습자들의 불필요한 용어의 도입을 줄이고자 하였다.

아. 제7차 교육과정기(2000~현재)

제7차 교육과정기에서는 규칙성에 유의하여 규칙성인 함수와 정비례・반비례에 중요시하고 있다. 6차 교육과정기와 7차 교육과정기를 비교하여 보면 영역명이 변경되었고 함수의 개념을 변화 관계로 도입하였다.

모든 과정이 중요하고 학습자들에게 단순히 문제풀이의 수학이 아닌 것을 상기시킴으로서 이 시대에 맞게 사회, 경제, 상황, 철학 등에 따라, 또 학생들의 능력, 관심, 정서에 따라 부합될 수 있게 적절한 비중을 두고 가르치는 것이 수학 교육의 올바른 목적이다.

2. 선행연구

(1) 변수

변수는 일반적으로 수를 나타내기 위해 사용되는 문자나 문자열인데, 함수에서는 관계를 설명하고 분석하는 수단으로서 서로 다른 두 개의 변수를 포함하는 수식 내의 한 변수에 수를 대체함으로 인해서 다른 변수의 값이 결정된다면, 전자의 변수를 독립변수라 부르며 후자의 변수를 종속변수라 부른다. 변수는 수학의 추상화에 필요한 기본 요소이며 특히 함수에서는 관계를 설명하는 중요한 수단이지만 많은 학생들이 변수의 의미를 잘 알지 못한다.

Wagner, Rachlin, Jensen(1984)은 미국 조지아 주의 Athens과 캐나다의 Calgary에서 인원은 적지만 신중하게 선택한 9학년 학생들을 대상으로 연구를 수행하였다. 이 연구의 목적은 초등 대수에서 일어나는 학습 장애를 조사하는 것이었다. 주어진 과제 중의 하나는 어떤 변수에 관한 방정식을 푸는 것으로 연구자가 변수의 이름을 바꾼 뒤, 학생에게 '새로운' 변수에 관한 '새로운' 방정식을 풀게 하였다. 처음 문제에 대한 이해가 제시되었음에도 불구하고 학생의 1/3이 다시 처음부터 이 문제를 풀었다. 평균 연령이 16세 이상인 고등학교 학생들을 대상으로 한 Wagner(1981)의 연구에서도 유사한 결과가 나왔다. 위와 같은 상황에서 학생들이 보이는 반응을 대체로 두 가지 유형으로 나눌 수 있다. 한 가지는 변수 이론의 변화를 이해하고 문자는 숫자가 그대로 있는 한 아무런 차이가 없다고 생각하는 것이고, 또 하나는 변수 이름이 바뀌면 완전히 새로운 문제로 보는 것이다. Wagner는 이러한 이해의 부족을 피아제의 변수 보존 이론과 연결짓고 몇 가지 잘못된 개념을 범주화하려고 하였다. 학생 집단의 규모가 커지면 15~25%가 Wagner 연구에서의 고등학교 학

생들처럼 반응한다 할지라도 그 상황은 놀라운 것이다.

한 연구에서는 현직교사 194명, 예비교사 139명을 대상으로 조사를 실시한 결과, 교사들이 변수 개념을 올바르게 파악하고 있지 못하며 변수 개념을 학생들에게 지도할 때에도 그다지 신중을 기하고 있지 않다는 사실을 알 수 있었다. 이를 구체적으로 살펴보면 많은 교사들이 포괄적인 의미를 가지는 변수를 용어 그대로 해석, 상당히 축소된 의미인 '변하는 수'로 단순히 해석하고, 변수가 나타내는 대상을 극히 제한된 범위에서만 생각하고 있었다. 그들은 변수의 본질인 변하는 대상에서의 의미를 고려하고 있지 않았으며 변수 개념의 본질을 함의하고 있는 문자를 변수의 사례로서 바르게 인식하고 있는 경우도 매우 드물었다. 또한 상당수의 교사들이 수학적 문맥에서 나타나는 변수의 구체적 사례들을 변수라는 개념을 통해서 보고 있지 못함을 알 수 있었다. 더욱 놀라운 것은 교사가 학생들에게 변수 개념을 지도할 때 그 다양한 의미에 대한 고려 없이 몇 가지 예를 통해 직접적으로 도입하고 있다는 점이다. 교사들은 변수가 사용된 몇 가지 예 가령, 함수나 방정식에서 사용되는 x, y 따위의 문자들을 예로 들면서 '이와 같이 사용된 문자를 변수라고 한다'라는 식의 설명에 그치고 있으며 심지어는 '특별히 설명하지 않는다', '변수 개념을 알고 있다고 생각하고 변수 개념을 언급하지 않을 때가 많다.'라고 말함으로서 학교수업에서 변수 개념을 암묵적으로 다루고 있음을 알 수 있었다. 이와 같은 결과는 현재 이루어지고 있는 변수 개념 지도에 문제점이 적지 않음을 시사하는 것이다[17].

(2) 함수, 그래프, 시각화

대부분의 학생들은 간단한 함수 그래프를 그릴 수는 있지만, 흔히

함수의 그래프를 함수 자체와는 다른 것으로 보며, 함수의 본질적인 부분이 아니라고 생각한다. (Vinner & Dreyfus, 1989) 더욱이 자신이 그린 함수의 그래프를 그래프 자료와 연결시키지 못하는 경우도 있다. 다음은 이스라엘의 필수 수학 과정을 마친 학생들을 대상으로 하는 최근의 대학 입학 시험에 출제된 문제이다.

반지름이 8.5cm인 원이 세 각이 100°, 34°, 46°인 삼각형에 외접한다. 이 삼각형의 내접원의 반지름을 구하여라.

그림을 먼저 그리지 않고 이 문제를 풀기 시작하는 것은 거의 불가능하다. 그러나 이 시험을 치른 수천 명의 학생들이 그림을 잘못 그렸으며, 게다가 다시 살펴보려고도 하지 않았다. 학생들은 문제의 조건을 생각하지 않고 그림을 그렸으며 그 결과 삼각형을 반원에 그린 경우도 많았다. 그러나 신기한 일은 그렇게 그려놓고도 크게 개의치 않았다는 점이다. 그림을 정확하게 그리는 것이 오히려 답을 구하는 과정을 복잡하게 만든다고 생각하는 것 같다. 열 명의 고등학교 수학 교사에게 똑같은 문제를 제시하였다. 여덟 명이 문제를 부정확하게 그렸고, 다섯 명만이 약속된 시간(15분) 내에 문제를 해결했다.

점 (5, 5)에서 원 $x^2+y^2=10$에 그은 접선의 방정식을 구하는 문제를 300명 이상의 학생에게 제시하였다. 강사를 포함해서 그들 중 80%가 이 문제에 알맞은 그림을 그리지 못했다.

$x=3$일 때, 직선 $2x+3y=a$가 $f(x)=bx^2$의 접선이 되도록 a, b의 값을 구하라는 문제와 부등식 $x-3\geq\sqrt{2x+9}$를 푸는 문제에서도 마

찬가지였는데, 두 문제 모두 조건을 시각적으로 해석하지 않고 해석적으로 접근하였다. (Sleden, Mason & Selden, 1989)
Janvier, Karplus, Ponte 등은 미적분학을 배운 학생 40명을 대상으로 대수적 형태와 그래프 형태의 두 가지로 그래프를 제시하고, 그 역함수를 구하라는 문제를 주었는데, 90%가 대수적 문제를 풀 수 있었고, 그 중 55%는 그들이 풀이한 과정을 논리적으로 설명할 수 있었다. 30%는 기하학적인 경우에 "직선 $y=x$에 대칭"이라는 방법을 알고 있었지만, 그 과정을 설명할 수 있는 학생은 없었다. 즉, 학생들은 왜 그런지에 대한 이해도 없이 정확한 결과를 얻었던 것이다. 이는 시각적으로 표상 된 것을 해석하는 능력이 부족함을 보여주고 있다.

Norman은 미국의 중등교사들을 대상으로 연구한 결과 중의 하나로 대부분의 교사들이 함수의 그래프를 단순히 식에 의해서 표현되는 관계성을 시각화하는 방법으로만 여긴다고 하였다.

신인숙은 중학교 2학년 학생들을 대상으로 함수에 관한 문제풀이 과정에서 발생하는 오류의 유형을 조사하여 학생들이 좌표축 위의 점에 대해서 제대로 이해하지 못하며, 대부분의 학생들은 그래프를 기호나 식으로 번역할 때 많이 어려워하고 함수의 여러 표상들을 관련짓지 못해서 서로 별개의 지식이 심상으로 나타남을 알아냈다. 따라서 함수 그래프를 지도할 때는 대수식의 관점에서 정보를 추출해 내고, 대수식을 지도할 때는 그래프적 관점에서 바라볼 수 있도록 두 가지 표상을 쌍으로 지도하는 것이 바람직하다. 또 함수의 이해를 돕기 위해서는 함수의 다양한 표상들-특히 대수식과 그래프-을 서로 관련짓고, 통합시킬 수 있는 수업계획을 세워야 하며, 학생들의 오류를 제거하기 위해서는 개념에 대한 다양한 표상이 제시되

고 탐구되거나 제안되어야 할 것이다.

일반적으로 수학, 특히 함수는 그래프를 그려서 살펴보는 것이 자연스러워 보인다. 그러나 학생들이 함수에 대해 갖고 있는 이런 개념 이미지는 단순하지 않다. 학생들은 시각적인 것이 아니라 해석적으로 정보를 처리하고 연습 문제를 풀려고 한다. 이것은 새로운 사실이 아니다. 역사적으로 볼 때, 함수에 대한 '시각적 개념 이미지'와 '해석적 특성화'는 수백 년 동안 논쟁의 대상이 되었고, 결국 함수에 대한 시각적 이미지는 사라지게 되었다. (Kleiner, 1988)

역사적인 발달 과정에서 볼 수 있듯이 함수의 기하적 개념은 점차 사라지게 되었다. 그러나 곧 함수의 새로운 '논리적' 개념과 이전의 '대수적' 개념이 계속해서 새로운 논쟁의 대상이 되었다. (이 논쟁은 '논리적'이 '추상적', '종합적', '공리적'으로, '대수적'이 '구체적', '해석적', '구성적' 개념으로 이름만 변형되어 오늘날에도 계속되고 있다.) 이런 특성 사이의 논쟁은 그림을 포함하는 '논리적' 기술(description)과 함께 사실상 3파전이 되고 있다. 오늘날 이러한 개념 문제는 적어도 수학적으로 말하자면, 해석적 기술 쪽으로 정착되는 것 같다. 그러나 이 과정에는 좀더 심오한 무엇이 있었던 것으로 보인다. 그 과정에서 수학의 본질 그 자체가 결정된 것처럼 보인다[17].

(3) 함수의 개념 · 용어 이해

Dubinsky & Harel은 이산 수학 과정에 있는 22명의 학생들에게 24가지 상황으로 구성된 질문지와 인터뷰를 실시한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 두 변수로 이루어진 등식이 주어진 경우, 많은 학생들이 한 변수를 다른 변수로 풀 수 있을 때만, 즉 한 변수를 좌변에 다른 변수의 식이 우변의 꼴로 나타낼 수 있을 때, 그 등식을 함수라고 여

기는 경향이 있다.

둘째, 점들은 함수의 그래프가 아니라고 여기는 경향이 있다.

셋째, 조작적 제한(Manipulation Restriction) 현상이 있다. 이는 분명한 조작을 수행할 수 있어야만 함수라고 여기는 현상, 즉 분명한 공식과 함께 연산(조작)을 할 수 있는지의 여부가 함수인지 아닌지를 결정하는 중요한 도구로 이용되는 현상이다.

넷째, 연속적 제한(Continuity Restriction) 현상, 즉 함수를 나타내는 그래프는 연속이어야 한다고 여기는 현상이 있다.

다섯째, 조작적 제한 현상으로부터 수반되는 양적 제한(Quantity Restriction) 현상, 즉 함수는 대수적으로 조작할 수 있는 대상이 되기 위해서 수를 대입하고 산출할 수 있는 공식이나 식을 반드시 포함해야 한다고 생각하는 경향이 있다.

여섯째, 어떤 학생은 그래프가 함수인지 아닌지 여부를 오직 기억에 의해서만 인식한다.

Sfard는 함수의 개념에 대하여 연구한 결과 학생들의 67%가 특정한 공식과 함수를 관련지었으며, 학생들의 함수에 대한 개념은 구조적이기보다 연산적이라는 주장을 하였다.

황우형, 심재웅, 이송이 등 세 사람은 두 명의 고등학교 2학년 학생이 함수개념을 이해할 때 드러나는 어려움과 잘못된 개념 인식을 연구하여 다음과 같은 결과를 제시하였다.

첫째, 함수를 정의할 때 정의역과 공역을 무시하는 경향이 있다. 함수의 그래프에서 순서쌍이 나타내는 것을 잘 알고 있지만 그 밖의 개념이 나타내는 것을 잘 모른다.

둘째, 불연속 함수나 2차 이상의 함수 그래프에 대한 이해가 부족했다.

이상으로 함수 개념 도입에 관한 선행연구를 고찰해 보았다.

위의 선행 연구들을 종합해 보면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

첫째, 대부분의 학생들은 변수 개념의 이해를 어려워하고 있다.

둘째, 교실에서 교사가 함수의 개념을 형식적으로 전달하는 것은 학생들의 함수 개념 파악에 큰 도움이 되지 못한다.

셋째 , 대부분의 학생들은 함수의 문제를 풀 때, 형식적인 용어가 아닌 학생이 가지고 있는 함수의 이미지에 의존하여 문제를 푼다.

넷째, 학생들은 함수의 문제 풀이 과정에서 그래프 등을 활용하지 못하여 시각화하지 못하고, 각각 별개로 인지하고 있는 경우가 많다.

3. 연구 설계

(1) 연구대상

본 연구는 중학교 수준에서는 역함수·상수함수 등이 도입되지 않음을 고려하여, 경기도 의정부시에 소재하고 있는 K고등학교 2학년을 대상으로 하였다. 이 학생들은 고등학교 1학년 함수 과정을 모두 이수한 남, 여학생들이며, 학력수준은 상·중·하로 나눌 때 상층에 속한다.

본 검사 문항은 고등학교 10-나 중 함수 과정에서 출제하였다.

(2)검사도구

함수의 개념·용어 검사지는 Zvia Markovits, Bat Sheva Eylon, Maxim Bruckheimer가 함수 개념을 제대로 이해하는지 알 수 있도록 개발한 문제들을 본 연구자가 우리 나라 현행 고등학교 수준에

알맞게 변형하여 고안한 문항과 본 연구자가 여러 교과서 및 문제집을 참고로 하여 직접 제작한 문항으로 구성하였다.

검사지의 검사 문항은 현행 고등학교 10-나에서 다루고 있는 함수 부분을 내용 영역으로 선정하였다. 이 검사 문항은 학생들의 함수 개념과 용어에 대한 이해 정도를 측정하기 위해 다음과 같이 총 13 문항으로 구성되었다.

1번 문항부터 9번 문항까지는 개념· 용어 검사를 위한 문항으로 구성하였다.

학생들이 함수의 정의를 어떤 형태로 기억하고 있는지, 그리고 인지되는 함수의 표상은 어떤 형태인지를 알아보기 위하여 문항 1에서는 정의와 예를 쓰라고 제시하였다.

문항 2를 통하여 그래프로 제시되었을 때, 정의역·공역·치역을 구분하여, 그래프로 표현된 함수를 어느 정도 이해하고 있는지를 알아보고, 잘못 이해하고 있는 경우 그 원인을 조사하였다.

문항 3에서는 그래프를 제시하고 함수가 아닌 것을 찾아내게 함으로서 함수의 정의를 그래프로 연장하여 이해하고 있는가를 알아보았다.

문항 4부터 6까지는 함수의 역함수를 구하고 특히, 정의역이 있을 때의 역함수를 구할 수 있는가를 알아보았다.

문항 7에서는 정의역이 다를 경우 같은 수식으로 표현된 함수가 다른 함수인지를 어느 정도 이해하고 있는지를 조사하였다.

문항 8에서는 일대일 대응이 아닌 것을 고르게 하여, 정의역에 따라서 함수의 성질이 달라지는 것을 이해하고 있는지를 알아보았다.

문항 9는 5가지의 그래프를 제시하고, 일대일 대응, 일대일 함수, 항등함수, 상수함수를 고르는 문제로, 이를 통해 각각의 용어의 이

해 정도를 조사하였다.

문항 10부터 14에서는 '관계식으로부터 그래프로'와 문항 15부터 19에서는 '그래프에서 관계식으로' 번역하는 두 가지 능력을 검사하기 위하여 선행연구를 참고하여 고안하였다. 본 번역 능력의 검사 문항은 현행 고등학교 10-나에서 다루고 있는 함수 부분을 내용 영역으로 선정하였다.

4. 연구의 실제

(1) 예비검사

1차 예비 검사 문제를 작성하여 해당 수학교사의 도움을 받아 검사를 실시하였다. 1차 예비검사는 1개반 35명을 대상으로 실시하였으며, 검사지에 답을 하도록 하여 검사지를 모두 회수하였다.

예비검사는 본 검사를 실시하기 전 본 검사 도구의 신뢰성과 타당성을 확인하기 위해, 즉 문제의 난이도, 내용의 적절성, 학생이 문제에 답하는데 소요되는 시간 등을 알아보고 검사 문항을 수정・보완하기 위해 실시하였다.

(2) 본검사

예비 검사를 통해 수정・보완하여 작성한 본 검사 문제는 해당교사의 감독 아래 2003년 11월 15일에 시행하였다. 본 검사는 예비 검사를 실시하지 않은 4개 반 총 130명을 대상으로 하였다.

검사는 다음과 같은 방법으로 실시되었고, 투입된 자료는 100% 회수하였다.

1) 검사 실시 전에 검사의 목적과 답안지 작정요령에 대해 설명한다. 답안지는 별도로 작성하지 않고, 문제지에 바로 기입하도록 한

다.

2) 검사에 소요되는 시간은 50분으로 한다.

3) 검사 실시 후 문제지는 모두 회수한다.

4) 학생이 문제의 뜻을 이해하지 못한 경우에만 손을 들고 질문하도록 한다.

5) 학생 상호간에 영향을 끼치지 않도록 주의한다.

(3) 자료의 처리 및 분석

검사지의 배점은 100점 만점이며, 각 문항의 배점은 표1과 같다.

함수 개념 및 용어에 관한 분석은 문항1부터 7번까지로 구성하였다. 특히 1번 문항의 정의에 대한 배점은 표준적인 정의를 제시한 경우는 10점, 표준적인 정의를 정확히 제시하지는 못했으나 대응관계는 이해하고 있는 경우는 6점으로 하였다.

연구문제 1의 분석을 위하여 문항 1부터 9까지는 각각의 문항으로 나누어 각각의 평균과 백분율, 표준편차, 최소・최대값을 계산하여 제시하였으며, 전체의 평균균과 백분율, 표준편차, 최소・최대값을 계산하여 제시하였다.

각 문항별로 나누어 정답수와 오답자수와 무응답수를 조사하여 각각의 백분율을 계산하였고, 다시 각각의 세부 문항으로 나누어서 정답자수와 오답자수와 무응답자수를 조사하여 각각의 백분율을 계산하였다.

문항번호	배점	세부문항	배점
1	12	정의	8
		예	4
2	6	함수가 아닌 것 고르기	3
		이유	3
3	3		3
4	3		3
5	3		3
6	3		3
7	6		3
			3
8	6	두 개 모두	6
		한 개만	3
9	4	일대일	2
		일대일 대응	2
		항등함수	2
		상수함수	2
10	5		5
11	5		5
12	5		5
13	5		5
14	5		5
15	5		5
16	5		5
17	5		5
18	5		5
19	5		5
총합	100		100

표1. 각 문항별 배점표

연구 문제의 분석을 위하여 문항1은 학생들이 인지하고 있는 함수의 정의의 유형과 그 분포를 다음과 같이 10가지로 분류하고 그 분포를 조사하였다.

1. 표준적인 정의
2. 대응
3. 관계
4. 정의역, 공역, 치역
5. 식
6. 변화
7. 그래프
8. 순서쌍의 모임
9. 함수상자
10. 무응답

또한, 학생들의 함수의 예의 제시 형태에 따라 다음과 같이 6가지로 나누어 분류하여 그 분포를 조사하였다.

1. 화살표 다이어그램
2. 식
3. 그래프
4. 언어적 표현
5. 잘못된 예
6. 무응답

함수의 표상 능력에 관한 분석은 문항 10번부터 19번까지의 결과로 분석하였다.

학생들의 관계식으로부터 그래프로의 번역 능력을 측정하기 위해 관계식을 주고 그래프를 그리도록 하는 문제를 총 5문항으로 구성

하여 배점은 각 문항당 5점으로 하였다.

학생들의 그래프로부터 관계식으로의 번역 능력을 측정하기 위해 그래프를 보고 관계식을 구하는 문제를 총 5문항으로 구성하였다. 배점은 각 문항당 5점으로 하였다.

(4) 검사결과의 분석

1. 연구문제 1

연구 문제1: 고등학교 1학년 함수 과정을 이수한 학생들의 함수 개념과 용어 파악은 어느 정도인가?

함수의 개념·용어 파악을 위한 1번 문항부터 9번 문항까지의 결과는 다음 표 2와 같다.

문항번호	배점	평균	백분율	표준편차	min-max
1	12	7.37	56.85	5.23	0-12
2	6	4.25	70.77	1.47	0-6
3	3	2.40	80.00	0.54	0-3
4	3	2.29	76.15	1.96	0-3
5	3	0.42	13.85	0.96	0-3
6	3	0.53	17.69	1.04	0-3
7	6	4.29	52.31	1.45	0-6
8	6	4.43	72.31	1.34	0-6
9	8	4.06	50.77	2.81	0-8
전체	50	25.32		2.02	0-50

표 2. 함수의 개념·용어 파악을 위한 각 문항별 결과

먼저, 문항을 통해 함수의 정의와 예를 쓰라고 제시하여 학생들이 함수의 정의에 대해 어떻게 인지하고 있는지 알아보았다. 그 결과

총 130명 중 38명(29.23%)만이 표준적인 정의를 제시할 수 있었고, 51명(39.23%)의 학생만이 예를 제시할 수 있었다.

문항2는 정의역과 공역이 주어진 그래프를 보고 함수인지 아닌지를 판별해 내는 문항으로 70.77%가 제대로 판별해 내었다.

문항 3은 그래프를 보고 함수인지 아닌지를 판별해 내는 문항이었는데 정답률은 80%로 비교적 많은 학생들이 정답을 구해냈다.

문항 4부터 6까지는 역함수를 구하는 문제였는데, 정의역이 없는 1차 함수의 역함수는 76.15%의 학생이 정답을 찾아냈으나 정의역이 있는 2차함수나 무리함수의 경우 역함수를 찾아내는 5번과 6번 문항의 경우 13.85%와 17.69%의 학생만이 정답을 찾아내었다.

문항 7은 정의역이 주어진 함수의 식을 주고 같은 함수를 찾아내는 문제로 정답률은 52.31%였다.

문항 8은 식을 보고 일대일 대응이 아닌 것을 찾아내는 문제로 72.31%의 학생이 정답을 찾아내었다.

문항 9는 일대일 대응, 일대일 함수, 항등함수, 상수함수의 용어의 인지도를 측정하는 문항으로 전체의 50.77%가 해당 함수를 찾을 수 있었다.

함수 개념·용어 검사를 통해 나타난 각 세부 문항별 응답분표는 표 3과 같다.

문항번호		정답	백분율(%)	오답	백분율(%)	무응답	백분율(%)
2		92	70.77	25	19.23	13	10
3		104	80.00	19	14.62	7	5.38
4		99	76.15	31	23.85	0	0
5		18	13.85	102	78.46	10	7.69
6		23	17.69	98	75.39	9	6.92
7	(1)	72	55.39	35	26.92	23	17.69
	(2)	64	49.23	39	30	27	20.77
8		94	72.31	15	11.54	21	16.15
9	일대일 대응	74	56.92	41	31.54	15	11.54
	일대일 함수	40	30.77	21	16.15	69	53.08
	항등함수	47	36.15	54	41.54	29	22.31
	상수함수	103	79.23	23	17.69	4	3.08

표 3 . 함수 개념· 용어에 관한 문항별 분포

2. 연구 문제 2

연구 문제 2: 학생들의 함수 개념과 용어 이해 과정에서 발생하는 어려움에는 어떤 것들이 있는가?

연구 문제 2에서는 함수 개념·용어를 위해 출제한 문항 1부터 9까지를 통해 나타난 결과를 다음과 같이 분석해 보고자 한다.

범주	빈도(명)	백분율(%)	실례
표준적 정의	25	19.23	◈집합 X의 각 원소가 Y의 단 하나의 원소에 대응
대응	45	34.61	◈집합 X에서 집합 Y로의 대응 ◈ X의 모든 원소가 Y에 대응 ◈ X와 Y의 일대일 대응 ◈ X의 원소가 Y의 원소로 알맞은 조건하에 대응 ◈정의역에서 공역으로 하나씩 가는 것 ◈ $f:X\rightarrow Y$ ◈ $f(x)\rightarrow Y$
관계	13	10.00	◈ X와 Y의 관계 ◈정의역과 치역의 관계 ◈정의역과 공역의 관계
정의역 치역 공역	6	4.62	◈정의역과 치역이 같은 것 ◈정의역에 대응하는 치역이 존재하는 것 ◈정의역의 변화에 따르는 치역의 값
식	6	4.62	◈일정한 규칙에 따라 대응되는 수의 식 ◈ x와 y에 관한 식 ◈ $y=f(x)$ ◈ $y=ax+b$
변화	5	3.85	◈ X의 변화에 따라 Y가 변화하는 것 ◈ X에서 Y로 변화하는 과정
그래프	3	2.31	◈그래프를 그리는 것 ◈한 쌍의 순서쌍을 가지는 그래프 ◈좌표 평면 위에 관계식을 나타낸 것
순서쌍의 모임	2	1.54	◈순서쌍의 모임
함수상자	1	0.76	◈ x에서 $f(x)$를 거쳐 y가 나오는 것 ◈조건에 맞는 입출력
무응답	24	18.46	
전체	130	100	

표 4 . '함수의 정의'에 대한 응답의 범주별 분포표

1) 문항 1 (함수의 정의와 그 예)에 대한 결과

전체 학생의 29.23%만이 함수 개념의 정확한 형식적 정의를 쓸 수 있었고, 전체의 39.23%가 함수의 예를 쓸 수 있었다. 이는 함수 개념의 형식적인 정의보다는 구체적인 여러 가지 예나 그림으로 이해하고 있음을 알려준다. 함수의 정의에 대한 응답의 범주별 반응을 정리해 보면, 표 4와 같다.

함수의 정의에 대한 응답의 범주별 분포를 정리해보면 44.62%의 학생들이 대응이나 관계라고 답하였고, 정의역에 대응하는 치역이 존재하는 것, 치역의 값 등 여러 가지 반응이 나타났다.

또한 39.23%의 학생이 함수의 예를 제시할 수 있었으며 '함수의 예'에 대한 응답의 범주별 분포를 나타낸 표 5에서 알 수 있듯 예를 제시할 수 있는 학생들 중 54.62%가 함수 개념 도입시 가장 많이 사용하는 화살표 다이어그램으로 제시했다. 이는 함수 개념 도입시 사용되고 있는 표상이 함수 개념 이미지에 주는 영향이 얼마나 큰가를 말해주고 있다.

범주	빈도(명)	백분율(%)
화살표 다이어그램	71	54.62
식	35	26.92
언어적 표현	2	1.54
잘못된 예	3	2.31
무응답	19	14.62
계	130	100.01

표 5. '함수의 예'에 대한 응답의 범주별 분포표

2) 문항 2와 3에 대한 결과

문항 2와 3은 모두 그래프를 보고 함수인지 아닌지를 묻는 문제로서 오답의 원인을 분석하여 함수의 그래프에 대한 학생들의 내적 표상에 어떤 어려움이 있는지를 살펴보았다.

문항 3은 정의역이 제시되지 않은 상태에서 단순히 그래프를 보고 함수인지 아닌지를 묻는 문제였는데 많은 학생들이 쉽게 답을 찾은 반면, 문항 2에서는 정의역과 공역을 인식하지 못하는 경우가 30%로 가장 많이 나타났다. 또한 7.69%의 학생들은 서로 다른 x의 값에 하나의 함수값이 대응되면 함수가 아니라고 생각하는 경우도 있었다. 그 외에 주목할만한 것은 함수의 그래프에 대한 제한된 이미지로 인한 잘못된 개념을 볼 수 있었다. 함수의 그래프에 대한 제한된 개념을 다음과 같이 세가지로 분류할 수 있다. 첫째, 함수의 그래프는 매끄러워야 한다. 둘째, 함수는 규칙이 있어야만 한다. 셋째, 연속되지 않은 그래프는 함수가 아니다.

3) 문항 4와 5, 6에 대한 결과

문항4와 5, 6은 역함수를 구하는 문제로 4번의 경우 정의역이 제시되지 않은 일차함수의 역함수를 구하는 문제로 대부분의 학생들이 쉽게 구해내었다. 그러나 정의역이 제시된 5번 문항과 6번 문항에서는 정답을 구할 때 정의역을 고려하지 않는 경우가 오답의 60%이상이었다.

4) 문항 7에 대한 결과

문항 7은 모두 정의역과 공역을 바꾸거나 전체 함수식에 두배를 하였을 때, 다른 함수임을 아는지를 묻는 문제이다. 오답의 대부분

의 학생들(65%)이 정의역과 공역이 다르면 다른 함수가 됨을 모르고 있음을 알 수 있었다. 또한 (2)번 문항에서는 함수를 두배하면 정의역과 공역이 변함을 모르는 학생이 12.82%였다.

5) 문항 8에 대한 결과

문항 8은 보기의 식을 보고 일대일 대응을 찾는 문제였다. 오답자 15명중 7명인 46.67%가 ③ $y=x^2+2x+3$ {정의역$x \leq -1$, 공역$y \geq 2$}를 정답으로 하여 정의역과 공역이 주어졌을 때 함수의 성질이 달라짐을 인식하지 못함을 알 수 있었다.

6) 문항 9에 대한 결과

문항 9는 함수의 용어(일대일 대응, 일대일 함수, 항등함수, 상수함수)에 대한 이해도를 측정하기 위한 문제로서 각 세부 문항별 정답・오답・무응답의 분포는 표 3에 제시한 바와 같다. 문항 9의 답안으로부터 일대일 대응과 일대일 함수를 혼동하는 경향이 있음을 알 수 있었다.

3. 연구 문제 3

연구 문제 3: 고등학교 1학년 함수 과정을 이수한 학생들의 '관계식으로부터 그래프로', '그래프로부터 관계식으로' 표현하는 번역 능력은 각각 어느 정도이며, 각 능력에는 어떠한 차이가 있는가?

이 두 가지 함수 번역 검사는 문항 10부터 19번까지로 구성하여 실행하였다.

각 문항별 정답과 오답 및 무응답의 분포는 다음 표 6과 같다.

문항번호	정답	백분율	오답	백분율	무응답	백분율
10	100	76.92	16	12.31	14	10.77
11	58	44.62	27	20.76	45	34.62
12	97	74.62	9	6.92	24	18.46
13	79	60.77	11	8.46	40	30.77
14	75	57.69	10	7.69	45	34.62
15	27	20.77	21	16.15	82	63.08
16	27	20.77	27	20.77	76	58.46
17	89	68.46	9	6.92	32	24.62
18	50	38.46	15	11.54	65	50.00
19	62	20.00	20	15.38	48	36.92

표 6 . 식을 그래프로, 그래프를 식으로의 변환 능력 검사 문항분포

식을 그래프로 변환하는 문항 10번부터 14번까지 총 5문항 25점 총점으로 하여 평균 15.73점이며, 문항 15번부터 19번까지는 총 5문

항 25점 총점으로 하여 평균 9.08점이었다. 따라서 고등학교 1학년 함수 과정을 이수한 학생들의 외적표상사이의 번역 능력은 관계식으로부터 그래프로의 번역능력이 그래프로부터 관계식으로의 번역 능력보다 우월하다고 볼 수 있겠다.

III. 결론 및 제언

본 연구의 주요 목적은 고등학교 10-나의 함수 과정을 이수한 학생을 대상으로 학생들이 함수의 개념과 용어를 학습할 때 발생되는 여러 가지 어려움들과 함수의 여러 표상 능력의 차이를 조사하여 이에 따른 효과적인 지도방안을 제시하는 데 있다.

연구의 목적을 달성하기 위해 다음과 같은 세가지 연구 문제를 설정하였다. (1)고등학교 1학년 함수 과정을 이수한 학생들의 함수 개념과 용어 파악은 어느 정도인가? (2)학생들의 함수 개념과 용어 이해 과정에서 발생하는 어려움에는 어떤 것들이 있는가? (3)고등학교 1학년 함수 과정을 이수한 학생들의 '관계식으로부터 그래프로', '그래프로부터 관계식으로' 표현하는 번역 능력은 각각 어느 정도이며, 각 능력에는 어떠한 차이가 있는가?

본 연구 문제의 분석을 위해 경기도 의정부시에 소재하고 있는 K 고등학교 2학년 130명을 연구 대상으로 담당 교사의 협조를 받아 검사를 실시하였다.

검사지는 선행연구를 참고하여 본 연구자가 직접 제작하였으며, 총 19문항으로 구성되었다.

먼저, 연구 문제 1의 조사 결과에 따른 결론 및 제언은 다음과 같다.

함수의 정의를 정확하게 제시할 수 있는 학생은 전체의 29.23%밖에 되지 않았고, 함수의 예를 제대로 제시할 수 있는 학생은 전체의 39.23%였다. 이러한 조사 결과로 비추어 보아 학생들에게 있어 함수 이미지가 함수의 형식적 정의보다는 예라는 것을 알 수 있었다. 따라서 함수의 정의를 지도할 때에는 다양하고 적절한 예와 동시에

제시하여 이해하도록 하는 것이 바람직하다.

다음으로 연구 문제 2의 조사 결과에 따른 결론 및 제언은 다음과 같다.

첫째, 학생들은 함수의 여러 표상을 연결시켜 이해하는데 어려움을 보여다. 화살표 다이어그램으로는 함수인 예와 아닌 예를 자세히 제시할 수 있었던 학생도 그래프가 함수인지 아닌지를 구분하는데는 많은 혼동을 보였다. 이는 학생들에게 있어서 함수의 정의와 이미지가 일치되지 못하고 있음을 보여준다. 따라서 함수의 예를 제시할 때는 같은 함수에 대해서 여러 가지 표상들을 연결해서 제시하는 것이 바람직하다.

둘째, 학생들은 함수에 대한 경직된 사고로 인한 잘못된 개념을 가지고 있었다. 이러한 잘못된 개념들을 살펴보면 다음과 같다. (1) 함수의 그래프는 매끄러워야 한다. (2) 함수는 규칙이 있어야만 한다. (3) 연속되지 않은 그래프는 함수가 아니다. (4) 함수는 공역과 치역이 같아야한다. 개념 검사 결과 많은 학생들이 공역과 치역의 용어 자체의 뜻을 알면서도 혼동하여 사용하거나, 공역과 치역이 같아야 함수라는 잘못된 생각을 가지고 있었다. 이러한 심각한 잘못된 개념들을 예방하기 위해 비연속 함수, 곡선과 직선이 함께 나타나는 함수, 매끄럽지 못한 함수, 불규칙함수, 공역과 치역이 다른 경우에 따른 적절하고 다양한 예를 계발하여 학생들에게 제시해야 할 것이다.

셋째, 학생들은 정의역과 공역의 범위를 인식하지 못하는 경우가 있었다. 함수의 개념・용어 검사 문항 2번과 4, 5, 6번에서 알 수 있듯이 정의역과 공역을 인식하지 않고 함수를 대하는 경우가 많다. 이는 학생들이 접하는 대부분의 함수의 예가 실수를 범위로 하고

있다는 데서 그 원인을 찾을 수 있을 것이다. 또한 부등호에 대한 인식이 부족하여 정의역과 공역의 범위를 혼동하는 경우도 있었다. 이러한 현상을 줄일 수 있게 하는 방법으로 문항 7과 8과 같은 문제를 제안한다. 또한 문제풀이 과정에서 부등호를 제대로 인식할 수 있도록 부등호 교육을 강화할 필요가 있다.

넷째, 정의역에 대응하는 공역의 원소를 찾을 때, 학생들에게 나타나는 다음 네 가지의 경향을 발견할 수 있었다. (1) 학생들은 정의역에 대응하는 치역의 값과 정의역에 대응하는 그래프상의 점과 혼동하는 경향이 있다. (2) 정의역에 대응하는 치역의 값과 정의역 자체와 혼동하는 경향이 있다. (3) 그래프가 곡선인 경우 극대, 극소값을 의식하여 문제의 의도에서 벗어나는 경향이 있다. (4) 정의역에 대응하는 치역의 값과 x 또는 y절편과 혼동하는 경향이 있다.

다섯째, 학생들은 일대일 대응과 일대일 함수를 혼동하는 경향이 있었다. 이는 일대일 함수이지만 일대일 대응이 아닌 예를 접함으로써 줄일 수 있을 것이다.

마지막으로 연구 문제 3의 조사 결과에 따른 결론 및 제언은 다음과 같다.

첫째, 학생들은 그래프로부터 관계식으로의 번역 능력이 관계식으로부터 그래프로의 번역 능력에 비해 부족함을 보였다. 이 조사 결과로 학생들이 함수식 이외의 다른 표상을 이해하는 데에 어려움을 보임을 알 수 있다. 이는 학교 수학에서 함수 학습을 가르치는 교사나 교과서가 제시하는 번역 연습이 한 가지 과정, 즉 관계식을 그래프로의 번역 연습에 치우친 데에서 그 원인을 찾을 수 있다. 이러한 중복된 번역 연습은 문제해결학습에서 필요한 여러 표상 사이의 연결에 크게 도움이 되지 못한다. 그래프를 이해하는 능력은 함수의

문제해결능력의 가장 기본이 되는 것이다. 특히 여러 가지 동일 함수의 다양한 표상 사이를 자유롭게 번역하는 능력은 함수의 문제해결능력에 결정적인 역할을 한다. 이를 위해 교과서나 교사는 다양한 표상간의 번역문제를 학생들이 자주 접할 수 있는 기회를 제공해야 하며, 각각의 표상을 연결시켜 지도해야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] 강옥기, 수학과 평가방법 그 이론과 실제, 교학사, 1991

[2] 교육부, 제 7차 교육과정 수학과 교육과정, 1997-15호

[3] 교육부, 고등학교 교육과정 해설 [별책5], 1997-15호

[4] 길영순, 이덕호, 변수에 의한 함수 지도가 함수개념 형성에 미치는 효과, 한국학교수학회논문집,(2001), 제 4권 제1호,

[5] 김응태, 박한식, 우정호, 수학교육학 개론, 서울대학교 출판부, 1996

[6] 김인수, 해석학의 기초 개념과 학습지도, 전남대학교 출판부, 1997

[7] 박경미, 제 7차 교육과정에서 수학과수준별 교육과정 운영방안 및 교수-학습자료, (1998), 한국 교육과정 평가원 세미나 자료집 연구자료 ORM 98-4-3

[8] 박교식, 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근, 대한 수학교육학외 논문집,(1992), 제 2권 제1호, p1-15

[9] 박교식, 우리나라 제 7차 수학과 교육과정의 7-가 단계 내용중 함수부분에 관한 비판적 고찰, 대한수학교육학회지<학교수학>제 1권 제2호

[10] 신인숙, 중학생의 함수에 대한 오개념 및 오류에 관한 연구, 한국교원대학교 석사학위논문, 1996

[11] 우정호, 수학학습-지도 원리와 방법, (2001),서울대학교 출판부

[12] 우정호, 학교수학의 교육적 기초,(2001), 서울대학교 출판부

[13] 장혜원, 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구, 서울대학교 박사학위 논문, 1997

[14] 장혜원, 수학적 개념 표상에 대한 고찰, 대한 수학교육학회 추계 수학 교육할 연구발표대회 논문집, (1996), 477-501
[15] 정영옥, Freudenthal의 수학와 학습-지도론 연구, (1997), 서울대학교 대학원 교육학 박사학위 논문
[16] 황후형, 심재웅, 이송이, 고등학교 함수개념 이해에 관한 사례연구, 대학수학교육학회논문집, 제5권 제 2호,(1995), p173-187
[17] David Tall, Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Publishers, 1991, p187-206

ABSTRACT

Teaching concept of function

Lee, Joo yeoun
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education
Sungshin Women's University
Supervised by Professor Shin, Yong su Ph.D

The math concept of function has become a key field of the school mathematics since Klein introduced it emphasizing the importance of functional thinking skills. After the modernization movement of the school mathematics education in 1960's, a modern viewpoint was employed to the function concept in the effort of modernizing the school mathematics. However, such a structure-oriented method was not only ineffective in developing students' functional thinking skills but also being an obstacle to achieve the goal. The modern school mathematics still teaches the function concept as "an equivalence of 2 sets" but such a teaching method only gives students a superficial knowledge about the subject and would not form a proper functional thinking skill. For the teachers who teach the function concept, it is very important to reconsider what the true nature of function is, how they explain it to their students and what

they want to deliver to their students by teaching it.

Having realized the above problems, I examined the theoretical changes of the function concept and the preceded studies conducted on the same subject. Then, I, in order to seek a solution to the problems, attempted to find out the difficulties and the emblematic gaps in skills that students are facing when learning the function concept and language.

I conducted a math test on the second grade students in K High School located in Gyeonggi-do. I prepared a test material referring the problems suggested by other scholars. Analyzing this test result led me to understand what kind of difficulties the students are facing when learning function and how much skill gap exists among the students, which consequently made me realize a solution for the problems.

<부록> 함수 검사지

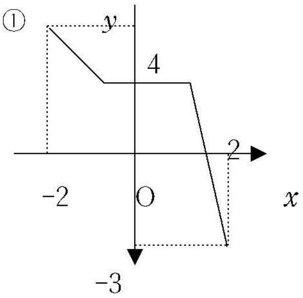
( )학년 ( ) 반 ( ) 번 이름:

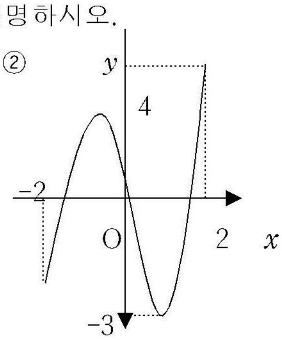
1\. 함수의 정의를 쓰고, 그 예를 하나만 들으시오.

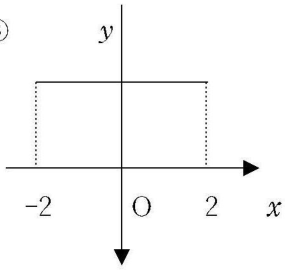
· 정 의:

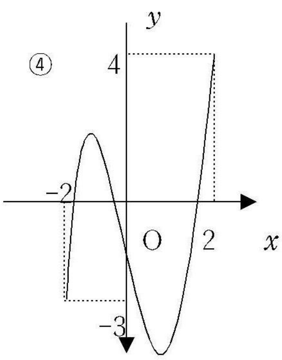
· 예:

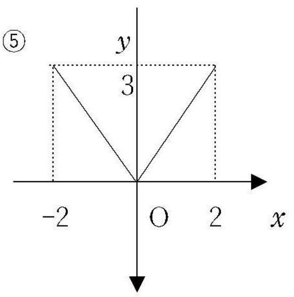
2\. 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$이고, 공역이 $\{y \mid -3 \leq y \leq 4\}$일 때, 다음 각 그래프 중에서 함수가 아닌 것을 고르고 그 이유를 설명하시오.

①


②


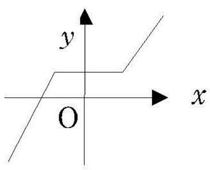
③


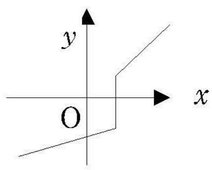
④


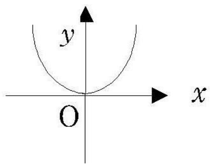
⑤


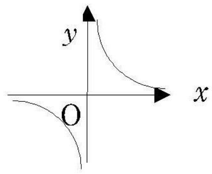
이유:

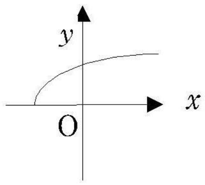
3\. 다음 중 함수의 그래프가 아닌 것은 ?

①


②


③


④


⑤


※다음 함수의 역함수를 구하여 보아라.

4\. $f(x)=2x+3$

5\. $y=x^2\ (x \geq 0)$

6\. $y=\sqrt{x-3}\ (x \geq 3)$

7\. 다음 각각의 함수들이 보기에 정의된 함수와 같은지 다른지 답하고, 그 이유를 설명하시오.

(보기) f : {자연수}→{자연수}

$f(x)=-x+5$

(1) g:{실수}→{실수}, $g(x)=-x+5$

이유:

(2) g:{자연수}→{자연수}, $g(x)=-2x+10$

이유:

8\. 다음 중 일대일 대응이 아닌 것을 고르면 ?

① $y=2x$

② $y=\sqrt{x+3}$ {정의역 $x \geqq -3$, 공역 $y \geqq 0$}

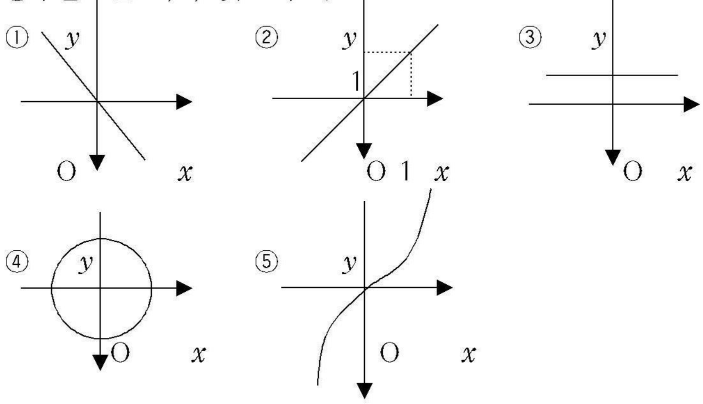
③ $y=x^2+2x+3$ {정의역 $x \leqq -1$, 공역 $y \geqq 2$}

④ $y=2|x+1|+1$ {정의역 $x \leqq 1$, 공역 $y \leqq 1$}

<부록> 함수 검사지

⑤ $y=3x+10$

9. 다음은 실수 R에서 R로의 함수 $f: R \to R$를 그래프로 나타낸 것이다. 일대일 함수, 일대일 대응, 항등함수, 상수함수를 각각 찾으시오.



일대일 대응: 일대일 함수:

항등함수: 상수함수:

※ 세 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

10. $y=f(x)$의 그래프를 그리시오.

11. $y=|f(x)|$ 의 그래프를 그리시오.

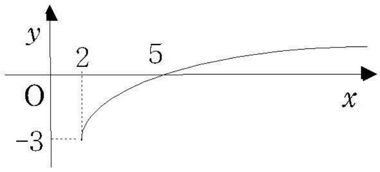
12. $y=g(x)$의 그래프를 그리시오.

13. $y=(f\circ g)(x)$의 그래프를 그리시오.

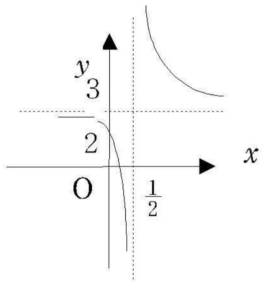
14. $y=(g\circ f)(x)$의 그래프를 그리시오.

※ 다음 그래프의 각 관계식을 구하시오

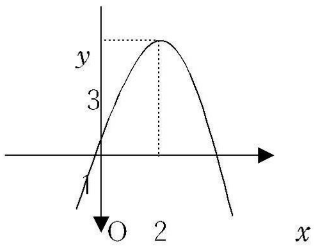
15.



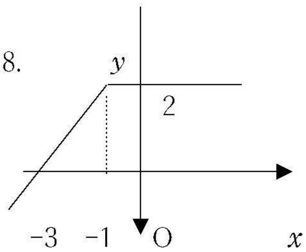
16.



17.



18.



19.