



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

박만식교수지도

석사학위 청구논문

## 학습곡선의 모형화

이항반응자료를 중심으로

2012

성신여자대학교 대학원

통계학과

이슬지

학습곡선의 모형화  
이항반응자료를 중심으로

박만식교수지도

이 논문을 석사학위 논문으로 제출함

2011년 11월

성신여자대학교 대학원

통계학과

이슬지

# 인준서

이슬지의 석사학위 논문으로 인준함.

심사위원 \_\_\_\_\_인

심사위원 \_\_\_\_\_인

심사위원 \_\_\_\_\_인

성신여자대학교 대학원

# 논문개요

연구자가 같은 작업을 반복적으로 수행할 때, 작업 효율성은 연구에 관련된 지식, 경험, 기술이 축적되면서 향상된다. 결과를 얻기 위해 연구에 투자하는 시간은 같은 작업을 반복함으로써 줄일 수 있다. 이러한 현상을 학습효과(learning effect)라고 일컫는다. 학습곡선(learning curve)은 학습의 변화를 시각적으로 나타낸 것으로 이전의 학습곡선 연구에서는 시간을 일정한 구간으로 나누어 구간별 작업에 대한 숙련도의 평균 차이 여부를 확인하였다. 이러한 방법은 구간을 어떻게 나눌 것인가 하는 기준이 존재하지 않으며, 연구자의 경험과 연구 과정에 의존하게 된다. 더욱이 이항 반응 자료는 학습곡선 모형에 적합하기 어려운 문제점을 가지고 있다. 본 연구에서는 이산형 확률변수 중 이항 반응 자료(베르누이자료)에 대한 학습곡선의 통계적 모형에 초점을 맞추고자 한다. 누적확률분포의 특성을 이용하여 학습곡선의 모형화를 통해 기존 연구에서의 학습곡선 적합의 한계를 보완하였다. 모형의 모수를 추정하기 위해서 뉴턴-랩슨 방법(Newton-Raphson method)과 베이시안(Bayesian) 접근방법을 사용하였고, 이 연구에서 제안한 모형의 점근적 분포를 델타 방법(Delta method)을 통하여 구하였다. 제안한 모형의 특성을 설명하기 위하여 모의실험을 수행하였고, Lim 등(2002)이 누적합 학습곡선 방법을 이용하여 분석한 방사선 전문의의 유방생체 검사 수행자료를 본 연구에서 제안한 방법으로 분석하였다.

**주요어 :** 이항반응, 학습곡선, 누적분포함수

# 목 차

<b>I.</b>	서론 . . . . .	<b>1</b>
<b>II.</b>	누적확률분포를 이용한 학습곡선의 모형화 . . . . .	<b>6</b>
2.1	모형 구축 . . . . .	6
2.2	뉴턴-랩슨(Newton-Raphson) 방법을 이용한 모수추정 . . . . .	10
2.3	델타 방법(Delta method)에 의한 실패 확률의 구간 추정 . . . . .	12
2.4	베이지안(Bayesian) 접근방법 . . . . .	13
<b>III.</b>	모의실험 . . . . .	<b>15</b>
3.1	모의실험 방법 . . . . .	15
3.2	모의실험 결과 . . . . .	16
<b>IV.</b>	실증연구 . . . . .	<b>28</b>
<b>V.</b>	결론 . . . . .	<b>31</b>
	참고 문헌 . . . . .	<b>33</b>
	Abstract . . . . .	<b>37</b>
	Appendix . . . . .	<b>39</b>

# 그림 목 차

그림 1.	누적합을 이용한 학습곡선의 적용 . . . . .	4
그림 2.	누적확률분포를 이용한 학습곡선의 모형화 . . . . .	7
그림 3.	누적확률분포와 $100 \times k\%$ 능숙지점 . . . . .	8
그림 4.	최대우도 추정법을 이용한 관측시점별 참확률과 추정확률, 그리고 95% 신뢰구간들 . . . . .	19
그림 5.	베이지안 접근법을 이용한 관측시점별 참확률과 추정확률, 그리고 95% 경험적인 신뢰구간 . . . . .	21
그림 6.	시나리오에 따른 관측시점별 참확률과 추정확률 의 차이( $P_i(\theta) - P_i(\hat{\theta})$ ) . . . . .	22
그림 7.	모의실험 한 세트에 대한 CUSUM을 이용한 학습 곡선 적합( $T = 500$ ) . . . . .	26
그림 8.	CUSUM을 이용한 학습곡선 적합( $T = 50$ ) . . . . .	27
그림 9.	실제 자료(Lim 등(2002))에 대한 CUSUM . . . . .	29
그림 10.	실제 자료(Lim 등(2002))에 대한 적합 . . . . .	30

# 표 목 차

표 1.	로지스틱확률분포를 이용한 모형의 추정결과 ( $T = 500$ ) . . . . .	17
표 2.	추정결과를 이용한 $100 \times k\%$ 능숙시점( $\lambda_k$ ) . . . . .	23
표 3.	로지스틱확률분포를 이용한 학습곡선모형의 추정결과 ( $T = 50$ ) . . . . .	24
표 4.	실제 자료(Lim 등(2002))를 이용한 적합 . . . . .	29

# 제 1 장

## 서론

19세기 독일의 심리학자 헤르만 에빙하우스는 ‘과제를 수행하는 횟수가 증가할수록 같은 일을 하는데 드는 시간이 줄어든다.’라는 학습 곡선 효과(learning curve effect)를 주장하였다. 1936년 미국의 라이트 패터슨 공군기지의 연구 결과, 비행기 생산량이 두 배가 될 때마다 노동 시간은 10-15%씩 줄어든다고 밝혔다. 이 현상을 통해 학습 곡선 효과에 대한 주장이 실증적으로 입증되었다. 생산 및 작업관리 분야에서는 노동비용과 생산량의 관계를 설명하기 위해 학습 곡선을 사용한다. 학습효과가 보편적인 용어로 대중화되고, 과거의 경험을 통해 같은 실수를 반복하지 않는다는 의미가 강해지면서 의학 분야에서는 수술의 경험횟수에 따른 수술의 성공여부를 설명하기 위해 개념화되었다. 학습곡선은 전형적으로 초기의 시도 후에 반복 학습으로 인하여 학습 정보의 축적으로 학습 효율이 증가하는 형태를 보이다가 어느 시점이후로는 완만해지는 형태를 보인다.

시행횟수에 따른 학습시간의 자료에서 학습시간이 급격하게 감소하는 시점을 경험을 토대로 학습극복시점으로 정하여 학습극복 전, 후의 차이를 비교하는 것이 일반적인 학습곡선에 대한 분석방법이다. 최유신 등(2006)은 조기위암에 시행된 복강경 보조 원위부 위절제술의 학습곡선 극복 시점을 연구자가 경험적으로 정하고, 카이제곱 검정과 t-검정을 이용하여 학습곡선 극복 시점 전후의 임상적인 차이를

연구하였고, 송수진 등(2003)은 수술시간을 학습곡선 전·후로 비교하여 내시경하 자궁근종절제술이 개복하 자궁근종절제술과 유의한 차이가 없다는 것을 카이제곱 검정과 독립표본 t-검정을 통하여 보였다. 이와 동일한 분석방법을 이용한 논문은 Kim 등(2005), Schauer 등(2003), Ferguson 등(2005), Sim 등(2006)이 있다. 김학선 등(2003)은 흉곽 내시경을 이용한 최소 침습 방법의 척추 기형 교정에 대하여 수술의 난이도와 증례수에 따른 학습 곡선을 통해 수술이 능숙해지는 시점을 제시하였고, 오윤경 등(2010)은 동일 기관에서의 세 명의 산부인과 전문의의 복강경하 전자궁절제술의 학습곡선을 비교하여 평균 변환점 연구하였다. 이와 같은 분석방법을 이용한 논문은 Ballantyne 등(2005)이 있다. Cook 등(2004)은 무작위 통제 시행(Randomized Controlled Trial:RCT)에서 새로운 수술 기법에 대한 학습곡선을 평가하기 위해 계층적 베이지 모형(hierarchical Bayes model)을 이용하였다. 이 때 학습곡선의 효과가 존재하도록 수술 결과를 조절하기 위하여 계층적 베이지 모형을 적용하였다. Lim 등(2011)은 로봇을 이용한 자궁절제술과 복강경 자궁절제술의 효율성을 비교하기 위하여 각 수술기법에 대한 수술시간의 학습곡선을 회귀모형을 이용하여 적합시켰다. Smith 등(2004)은 상태공간 모형(state-space model)을 이용하여 학습곡선에 적합시켰다. 이 때, EM-알고리즘을 이용하여 모수를 추정하였다. Adler 등(1991)은 두 곳의 전자 장비 회사의 제조 부서의 데이터를 활용하여 생산성을 향상시키는 모형을 구축하였다. 이 모형은 공정변화와 직원교육을 통하여 누적된 경험을 변수로 이용하였다. 동일한 작업의 반복에서 학습을 발생시키는 전통적인 경험 변수들의 역할과 공정변화, 직원교육과 같이 경영에 의한 변수들의 역할이 학습곡선이 발생하는 과정에 각각 어떠한 차이를 보이는지 기술하였다. Williams & Vivarelli(2000)는 정

규분포를 따르는 학습곡선의 신뢰구간을 제시하였다. 분석 데이터의 표본수에 따른 기대오차가 학습 곡선의 형태를 보이며, 이를 이용하여 정규분포를 따르는 학습곡선의 초기 양상을 설명하였다. Smunt(1999)는 연속적인 학습은 로그-선형(log-linear) 학습 곡선 모형에 근사하다는 것을 이용하여 제조업 데이터에서 생산성 경향을 분석하였다. 학습 곡선은 생산 계획과 가격을 예측하는 도구로 산업분야에서 활용되기도 한다. Lieberman(1984)는 37개의 화학 제품으로 학습 곡선과 가격 양상에 대한 가설을 검증하고 시장집중이 가격의 유연성과 가격 변화에 대한 학습곡선에 강한 영향을 미친다는 것을 연구하였다. Mazzola 등(1996)은 비용함수가 학습곡선의 경향을 따를 때 독점적인 생산 계획의 최적화를 모형화하였다. 이 때, 베이지안 방법을 이용하여 학습 곡선의 최적값을 결정하였다.

반응변수가 이산형인 경우 학습곡선을 적용할 수 있는 방법은 주로 누적합을 이용하고 있다. 순차적으로 일어나는 공정이 잘 관리되고 있다는 가정이 기각되는지를 판단하는 누적합 분석은 산업분야에서 품질관리를 위해 널리 이용되는 통계적 기법이다. 최근에는 의학분야에서도 시간에 따른 새로운 수술 기법의 습득 정도를 누적합 분석에 이용하여 수술의 품질평가에 이용하고 있다. 이는, 어떤 수술 기법이 정해진 수준까지 도달하는지의 평가를 시각적으로 쉽게 이해할 수 있다는 장점이 있다. 학습곡선-누적합 분석은 목표값으로부터의 차이를 순차적으로 누적시키면서 나타냄으로써 미리 정해둔 기준값으로부터 벗어나는 경우를 감지하는 방법이다. 이러한 관리도를 만들기 위해서는 허용되지 않는 실패율( $\rho_0$ )과 허용되는 실패율( $\rho_1$ ), 제1종 오류 및 제2종 오류를 미리 정해두어야 한다. 이들 변수로부터 한계값과 변수 값을 계산할 수 있다. 그림1과 같이 그래프는 기준부터 시작하며 기준

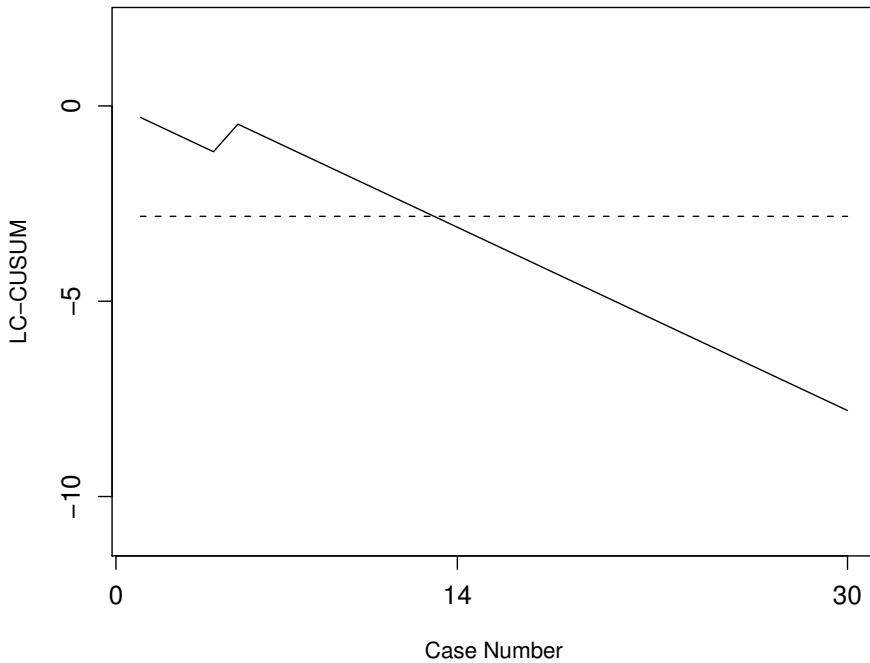


그림 1: 누적합을 이용한 학습곡선의 적용

을 관통하지 못한다. 따라서 연속되는 시술이 성공한 경우 직전의 누적합으로부터 만큼 빼고, 실패한 경우 만큼 직전의 누적합에 더한다. 결국, 성공한 시술에는 그래프의 방향이 음의 방향으로 향하게 되고, 실패한 시술에는 양의 방향으로 움직이게 된다. 만약 연속되는 실패로 기준을 충족하는 경우라면, 기준은 장애물로 작용하기 때문에 못 넘어간다. 이때 귀무가설은 ‘수술기법이 능숙하지 않은 상태’이며, 대립가설은 ‘수술기법은 능숙한 상태’이다. 따라서 누적합이 아래쪽 한계 값에 도달한다면, 이것은 귀무가설을 기각하고 대립가설을 선택하는 것이 통계학적으로 의의가 있다는 뜻이다.

시행횟수에 따른 학습의 성공 여부에 대한 자료에서는 누적합 분석 방법을 이용하여 학습이 능숙해지는 지점을 정할 수 있다. 서강열

등(2010)은 새로운 수술기법을 배우는 교육생이 얼마나 빨리 적절한 수준의 심폐소생술을 시행하게 되는지에 대하여 심폐소생술 교육을 받은 의과대학생들의 흥부압박의 능숙도(proficiency)를 학습곡선-누적합 분석(learning curve-Cumulative Sum analysis)을 이용해서 개인별로 능숙한 시술에 이르는 정도의 차이를 비교 분석하였다. Tekkis 등(2005)는 복강경 결장 수술과 직장 수술에서 왼쪽 절개와 오른쪽 절개의 수술 결과에 대한 차이를 학습곡선을 사용하여 비교하였다. 이 때, 학습곡선을 평가하기 위한 방법으로 위험요인이 조정된 누적합(Risk-adjusted Cumulative Sum) 분석을 이용하였다. 이와 동일한 분석 방법을 이용한 논문은 Filho(2002), Biau(2008), Lee 등(2006), Forbes 등(2004), Mazzola & McCardle(1999)이 있다.

이와 같은 방법들은 연구자의 주관적인 견해를 바탕으로 학습이 능숙해지는 지점을 정하기 때문에 연구자의 경험과 연구 과정에 의존하게 된다. 이는 일반화가 어렵다는 한계를 가지고 있다. 본 연구에서는 이항 반응 자료인 경우, 누적확률분포의 특성을 이용하여 통계적 모형화를 통해 기존 연구에서의 학습곡선 적합의 한계를 보완하고자 한다.

본 논문의 순서는 다음과 같다. 제 2 장에서는 누적확률분포의 특성을 이용한 학습곡선 모형을 제안하고, 제 3 장에서는 제안한 모형에 대한 모의실험을 통해 모형을 설명한다. 제 4 장에서는 Lim 등(2002)이 누적합 학습곡선 방법을 이용하여 분석한 방사선 전문의의 유방생체 검사 수행자료를 본 연구에서 제안한 방법으로 분석하였고, 끝으로 제 5 장에서는 결론 및 앞으로의 연구방향에 관하여 논의한다.

## 제 2 장

# 누적확률분포를 이용한 학습곡선의 모형화

지금까지의 학습곡선은 작업을 능숙하게 성취할 수 있는 시점을 경험을 바탕으로 연구되어 왔다. 의학분야에서는, 임상학적으로 몇 번의 수술을 하였을 때 수술에 능숙도를 보이는지가 주요 관심대상이 된다. 따라서 본 연구에서는 누적확률분포의 특성을 이용하여 학습곡선의 통계적 모형화를 하고자 한다.

### 2.1 모형 구축

본 연구에서 관심 있는 사건은 특정 수술의 실패 여부이고 이에 대한 학습곡선의 모형 구축은 그림 2을 바탕으로 진행하고자 한다. 이 때, 작업 수행 시 실험 초기의 실패 확률을  $\theta_2$ , 더 이상 줄일 수 없는 실패 확률을  $\theta_1$ 이라 정의한다. 시행횟수  $t = 1, \dots, T$ 에 대하여 시점  $t$ 에서의 작업의 실패 횟수  $Y_t$ 는 실패 확률이  $p_t(\theta)$ 인 베르누이 분포(Bernoulli distribution)를 이룬다. 즉,

$$Y_t \sim \text{Bernoulli}(p_t(\theta))$$

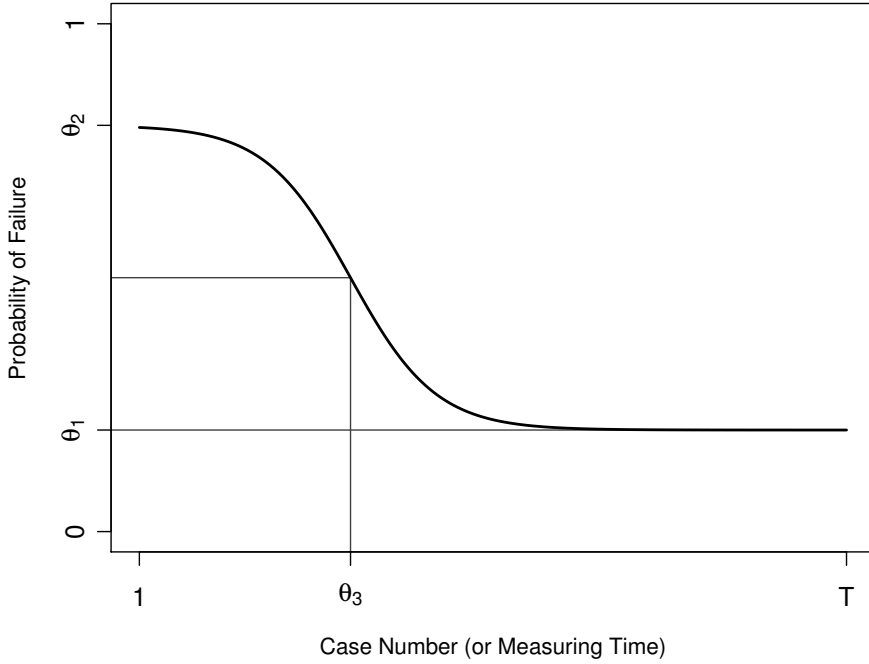


그림 2: 누적확률분포를 이용한 학습곡선의 모형화

여기서,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T$  이고,  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1$ 에 대하여

$$p_t(\theta) = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \cdot [1 - F(t|\theta_3, \theta_4)]$$

이라 정의한다. 이 때,

$$F(t|\theta_3, \theta_4) = \int_{-\infty}^t f(x|\theta_3, \theta_4) dx, \forall t \in \mathcal{R}$$

이다. 여기서  $\mathcal{R}$ 은 실수 전체를 의미한다. 누적확률밀도함수의 모수는 하나 이상이 될 수 있으나, 본 연구에서는  $\theta_3$ 와  $\theta_4$ 를 각각 위치모수(location parameter)와 척도모수(scale parameter)로 고려하였다.

학습곡선의 통계적인 모형화가 가능하다면 작업에 능숙해지기까

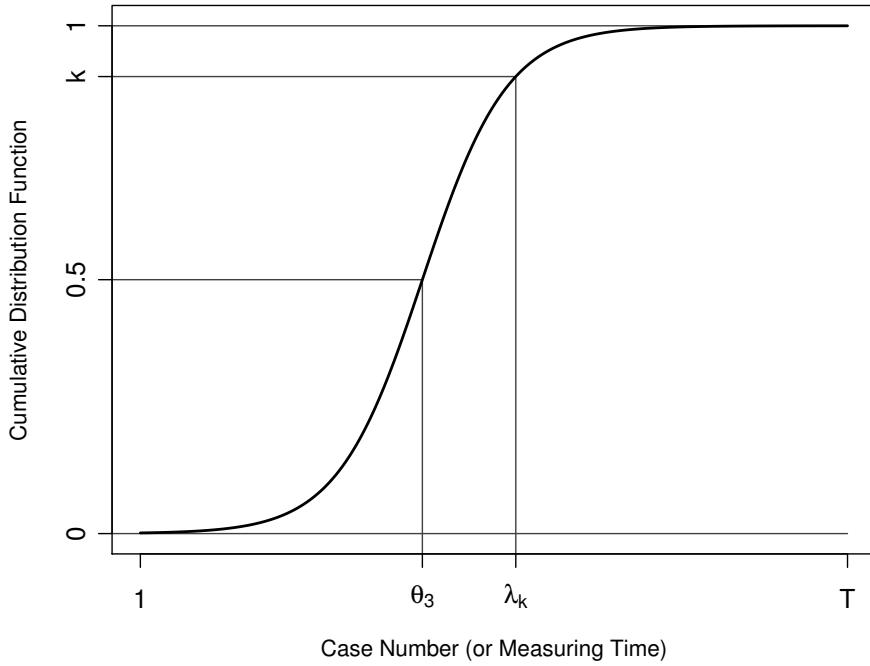


그림 3: 누적확률분포와  $100 \times k\%$  능숙지점

지 몇 번의 시행을 해야 하는지를 추론할 수 있다. 그러나 본 연구에서 제안한 학습곡선의 모형에서는 시행횟수를 늘려도 더 이상 줄일 수 없는 실패 확률인  $\theta_1$ 에 도달할 수 없다. 즉,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - F(t|\theta_3, \theta_4)) = 0$$

이므로,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \cdot [1 - F(t|\theta_3, \theta_4)]] = \theta_1$$

이 된다. 또한, 현실적으로 능숙도가 100%인 학습효과를 기대하기 어렵고, 시행횟수를 무한히 늘릴 수 없기 때문에 본 연구에서는 능숙도가

100 × k%인 시행횟수를  $\lambda_k$ 로 정의한다. 그림 3은  $\lambda_k$ 의 개념을 도식화하였다. 즉, 처음 시행횟수부터  $\lambda_k$ 까지 실패확률의 넓이가  $k$ 가 된다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$k = F(\lambda_k | \theta_3, \theta_4) = \int_{-\infty}^{\lambda_k} f(x | \theta_3, \theta_4) dx.$$

본 연구에서는 로지스틱 분포를 이용하여 학습곡선을 모형화 하였다. 시점  $t$ 에서의 작업의 실패 횟수인  $Y_t$ 가 실패확률이  $p_t(\theta)$ 인 베르누이 분포(Bernoulli distribution)를 따르고,

$$Y_t \sim \text{Bernoulli}(p_t(\theta))$$

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T$  이고,  $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1$ 에 대하여 실패확률인  $p_t(\theta)$ 가 다음과 같을 때,

$$p_t(\theta) = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \cdot [1 - F(t | \theta_3, \theta_4)]$$

에서  $F(t | \theta_3, \theta_4)$ 가

$$F(t | \theta_3, \theta_4) = \left[ 1 + \exp\left(-\frac{t - \theta_3}{\theta_4}\right) \right]^{-1}$$

인 로지스틱 분포의 누적확률분포함수의 형태이면 실패확률인  $p_t(\theta)$ 는

$$p_t(\theta) = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \cdot \left[ 1 + \exp\left(\frac{t - \theta_3}{\theta_4}\right) \right]^{-1}$$

로 나타낼 수 있다. 누적확률분포함수의 형태가 로지스틱 분포인 경우의  $\lambda_k$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(\theta) = \theta_1 \implies \lambda_k = \hat{\theta}_3 + \hat{\theta}_4 \cdot \ln\left(\frac{k}{1-k}\right)$$

## 2.2 뉴턴-랩슨(Newton-Raphson) 방법을 이용한 모수추정

로지스틱분포를 이용한 학습곡선 모형의 모수  $\theta$ 를 참값에 가까운 값으로 추정하기 위하여 본 논문에서는 뉴턴-랩슨 방법(Newton-Raphson method)을 이용하였다. 뉴턴-랩슨 방법은 주어진 현재의 추정값으로부터 다음 단계의 추정값의 차이가 반복 과정을 거치면서 수렴할 때까지 진행된다. 여기서 행렬의 과중한 계산 부담을 줄이기 위해 스코어(scoring) 방법을 사용한 후 뉴턴-랩슨 방법으로 바꾸는 알고리즘을 사용하였다. 이 때, 스코어 방법은

$$\hat{\theta}^{(m)} = \hat{\theta}^{(m-1)} + [\mathcal{J}^{(m-1)}]^{-1} \cdot U^{(m-1)}$$

으로 정의되는 반복모형을 사용한다. 여기서  $\mathcal{J}^{(m-1)}$ 은  $\theta = \theta^{(m)}$ 을 사용하여 계산된 정보행렬(Information -matrix)이다. 작업의 실패 확률을

$$p_t(\theta) = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1) \cdot [1 - F(t|\theta_3, \theta_4)] \equiv p_t$$

라고 정의할 때, 우리가 추정해야 할 모수는  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)^T$ 이며 로지스틱분포의 누적확률분포함수는

$$F(t|\theta_3, \theta_4) = \left[ 1 + \exp\left(-\frac{t - \theta_3}{\theta_4}\right) \right]^{-1}$$

이다. 확률변수  $Y_t$ 가 이항분포를  $B(n_t, p_t)$ 를 따른다고 할 때, 이항분포의 확률질량함수는

$$f(y_t|p_t) = \binom{n_t}{y_t} p_t^{y_t} (1-p_t)^{n_t-y_t}, \quad y_t = 0, 1, 2, \dots, n_t, \quad t = 1, \dots, T$$

이고, 로그우도함수는

$$l(p_t) = \sum_{t=1}^T \log f(y_t|p_t) = \sum_{t=1}^T \left\{ y_t \log p_t + (n_t - y_t) \log(1-p_t) + \log \binom{n_t}{y_t} \right\}$$

로 단순화된다. 이것을 이용하여  $p_t(\theta)$ 에 대한 1차 편미분은

$$l'(p_t) = \sum_{t=1}^T \frac{\partial \log f(y_t|p_t)}{\partial p_t} = \sum_{t=1}^T \left( \frac{y_t}{p_t} - \frac{n_t - y_t}{1-p_t} \right) = \sum_{t=1}^T \left( \frac{y_t - n_t p_t}{p_t(1-p_t)} \right)$$

이다. 다음으로  $p_t(\theta)$ 의 스코어 통계량(score statistic)은 각각의 모수에 대한 편미분을 하여 구한다.

$$U(\theta|p_t) = \sum_{t=1}^T \frac{\partial l(\theta|p_t)}{\partial \theta} = \{U_i(\theta|p_t)\}_{i=1, \dots, 4}$$

여기서,  $U_i$ 의 원소는 다음과 같다.

$$U_i = \sum_{t=1}^T \frac{\partial l(p_t)}{\partial \theta_i} = \sum_{t=1}^T \frac{\partial l(p_t)}{\partial p_t} \cdot \frac{\partial p_t}{\partial \theta_i}$$

이 때,  $p_t$ 에 대한 로그 우도 함수의 1차 편미분은

$$\frac{\partial l(p_t)}{\partial p_t} = \frac{y_t - n_t p_t}{p_t(1-p_t)}$$

이고,  $\theta_i$  각각에 대한  $p_t$ 의 편미분은

$$\frac{\partial p_t}{\partial \theta_i} = \begin{cases} F(t|\theta_3, \theta_4), & i = 1 \\ [1 - F(t|\theta_3, \theta_4)], & i = 2 \\ \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_4}\right) \exp\left(-\frac{t - \theta_3}{\theta_4}\right) \{F(t|\theta_3, \theta_4)\}^{-2}, & i = 3 \\ \frac{(\theta_2 - \theta_1)(t - \theta_3)}{\theta_4^2} \exp\left(-\frac{t - \theta_3}{\theta_4}\right) \{F(t|\theta_3, \theta_4)\}^{-2}, & i = 4 \end{cases}$$

이다. 모수인  $\theta$ 를 추정하기 위하여 정보행렬( $\mathfrak{J}$ )을 구한다.

$$\mathfrak{J} = \{I_{jk}\}_{j,k=1,\dots,4} = \left\{ \frac{\partial U_j}{\partial \theta_k} \right\}_{j,k=1,\dots,4}$$

여기서,  $i, j = 1, \dots, 4$ 에 대하여  $I_{jk}$ 는

$$I_{jk} = \frac{\partial U_j}{\partial \theta_k} = \frac{\partial U_j}{\partial p_t} \cdot \frac{\partial p_t}{\partial \theta_k} = \frac{\partial^2 l(p_t)}{\partial p_t^2} \cdot \frac{\partial p_t}{\partial \theta_j} \cdot \frac{\partial p_t}{\partial \theta_k}.$$

로 계산될 수 있으며, 이 때,  $p_t$ 에 대한 로그 우도 함수의 2차 편미분은

$$\frac{\partial^2 l(p_t)}{\partial p_t^2} = \frac{-n_t p_t^2 + (2p_t - 1)y_t}{\{p_t(1 - p_t)\}^2}$$

이다.

## 2.3 델타 방법(Delta method)에 의한 실패 확률의 구간 추정

델타 방법(Delta method)은 신뢰구간을 계산하기 위한 일반적인 접근법으로 최대우도함수를 이용한다. 이 방법은 분석적으로 분산을

계산하기 복잡한 경우 테일러 전개에 기반을 두어 함수의 평균과 분산을 간단하게 계산할 수 있다.

$p_t$ 에 대한  $(1 - \alpha) \times 100\%$  근사 신뢰구간(asymptotic confidence interval)은 다음과 같다.

$$p_t(\hat{\theta}) \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\widehat{\text{Var}}(p_t(\hat{\theta}))}$$

여기서,  $p_t(\hat{\theta})$ 의 기대값은 델타 방법에 의하여

$$E[p_t(\hat{\theta})] \approx p_t(\theta) + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial p_t}{\partial \theta_i} \cdot E(\theta_i - \hat{\theta}_i) = p_t(\theta)$$

이고,  $p_t(\theta)$ 의 분산은

$$\text{Var}(p_t(\hat{\theta})) = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial p_t}{\partial \theta_i} \right)^2 \text{Var}(\hat{\theta}_i) + 2 \sum_{i>j}^4 \frac{\partial p_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial p_t}{\partial \theta_j} \text{Cov}(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j)$$

가 된다.

## 2.4 베이지안(Bayesian) 접근방법

베이지안(Bayesian) 접근방법을 이용한 모수추정은 과거의 정보와 새롭게 얻어진 정보를 통하여 새로운 결론에 도달하는 방법이다. 즉, 어떠한 사실에 대한 주관적인 의견을 경험과 지식을 토대로 사전 정보를 정의하고 특정 사건을 통하여 얻어진 자료와 결합하여 사후정보를 추정하는 과정이다. 사전분포(prior distribution)  $p(\theta)$ 를 설정하고 데이터  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 가 관찰된 경우, 우도함수  $l(Y|\theta)$ 에 근거한 베이즈 정리는 다음과 같다.

$$f(\theta|Y) = \frac{l(Y|\theta) \cdot p(\theta)}{\int l(Y|\theta) \cdot p(\theta) d\theta}$$

이 때,  $f(\theta|Y)$ 를 사후분포(posterior distribution)이라 하며, 사후분포는 우도함수와 사전분포의 곱에 비례한다. 즉, 베이지안 접근방법은 사후분포를 이용하여 모수  $\theta$ 의 특성을 추론하는 방법이다.

각 모수에 대한 사전분포는 다음과 같이 정의한다.

$$\theta_1 \sim Unif(0,1)$$

$$\theta_2 \sim Unif(0,1)$$

$$\theta_3 \sim Unif(0,T)$$

$$\theta_4 \sim IGamma(0.1,0.1)$$

여기서,  $T$ 는 총 시행횟수이며,  $Unif(\cdot)$ 은 균일분포(Uniform distribution),  $IGamma(\cdot)$ 는 역감마분포(Inverse Gamma distribution)을 의미하고  $\theta_1 < \theta_2$ 가 되도록 제한을 두었다.

## 제 3 장

# 모의실험

누적확률분포의 특성을 이용한 학습곡선의 통계적 모형이 수술의 성공 여부에 대해 얼마나 잘 적합하는지를 살펴보기 위해 2장에  $\epsilon$  서 다른 추정을 바탕으로 모의실험을 수행하였다. 더 이상 줄일 수 없는 실패 확률( $\theta_1$ )은 0.2, 실험 초기의 실패 확률( $\theta_2$ )은 0.8로 고정시키고 학습곡선의 변곡점 시점을 결정하는  $\theta_3 = 100, 150, 250$ 으로 정하고 학습곡선의 변동폭을 결정하는  $\theta_4 = 10, 30, 50$ 으로 정하였다. 이와 같은 설계값으로 다음 절차에 따라 모수를 추정하였다.

### 3.1 모의실험 방법

모의실험의 절차는 다음과 같다.

- (1) 로지스틱 분포를 이용하여 시행횟수  $t = 1, \dots, 500$ 에 대한 실패 확률  $p_t(\theta)$ 를 계산한다.
- (2) 1단계에서 구한 실패확률이  $p_t(\theta)$ 인 베르누이 분포를 따르는  $Y_t$ 를 생성한다.
- (3)  $Y_t$ 로부터 임의의 200개의 데이터셋을 각각 생성한다.

$$\mathbf{p}^{(i)} = \left\{ p_t^{(i)} \right\}_{t=1}^T, \quad i = 1, \dots, N$$

- (4) 3단계에서 생성한 데이터셋을 통계패키지와 2.2절의 뉴튼-랩슨

방법을 이용하여 모수를 추정한다.  $p_t$ 에 대한  $(1 - \alpha) \times 100\%$  경험적인 신뢰구간(empirical confidence interval)은 다음과 같다.

$$\left( \{\mathbf{p}_t\}_{\left(\frac{k-\alpha}{2}+1\right)}, \{\mathbf{p}_t\}_{\left(k-\frac{k-\alpha}{2}\right)} \right)$$

여기서  $\{\mathbf{p}_t\}_{(i)}$ 는  $P_t$ 의  $i^{\text{th}}$  순서통계량이다.

- (5) 3단계에서 생성한 데이터셋을 2.4절의 베이지안 접근방법을 이용하여 모수를 추정한다.

## 3.2 모의실험 결과

표 1은 시나리오에 따른 모수  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 의 참값과 최대우도 추정값(maximum likelihood estimation), 베이지안 추정값(Bayesian estimation)들의 평균(mean), 표준오차(s-e), MAD의 결과를 각각 정리한 것이다. 여기서 MAD는 각 시점마다의 중위절대편차(Median Absolute Deviation; MAD)로 중위절대편차는 다음과 같이 정의한다.

$$\text{MAD} = \text{median}|\theta_i - \hat{\theta}_i|$$

전체적으로 최대우도 추정값과 베이지안 추정값이 거의 비슷한 결과를 나타내고 있다는 것을 확인할 수 있다. MAD 값을 중심으로 살펴보면 모수  $\theta_1, \theta_2$ 은 대체로 낮은 값으로 나타났으며 이는 추정치와 참값의 차이가 거의 나지 않음을 나타내며 학습곡선의 모양에 크게 영향을 받지 않는 값을 확인할 수 있다. 그에 비해  $\theta_3, \theta_4$ 는 학습곡선의 모양에 영향을 받으며, 특히  $\theta_4 = 50$ 인 경우에 추정치와 참값의 차이가 크게 나타났다. 이는, 학습의 일어나기까지 걸리는 시간을 나타내는 지표

표 1: 로지스틱확률분포를 이용한 모형의 추정결과 ( $T = 500$ )

Scenario	Parameter	Truth	ML			Bayesian		
			Mean	SE	MAD	Mean	SE	MAD
1.	$\theta_1$	0.2	0.195	0.002	0.013	0.198	0.002	0.012
	$\theta_2$	0.8	0.811	0.004	0.036	0.797	0.003	0.034
	$\theta_3$	100	99.323	0.550	4.899	99.617	0.524	4.911
	$\theta_4$	10	11.302	0.436	3.626	10.240	0.413	3.548
2.	$\theta_1$	0.2	0.197	0.002	0.016	0.202	0.002	0.018
	$\theta_2$	0.8	0.793	0.006	0.065	0.765	0.005	0.045
	$\theta_3$	100	102.240	1.149	11.170	104.659	0.937	9.483
	$\theta_4$	30	26.346	0.907	8.775	23.187	0.719	9.242
3.	$\theta_1$	0.2	0.200	0.002	0.020	0.204	0.002	0.020
	$\theta_2$	0.8	0.751	0.008	0.090	0.717	0.005	0.068
	$\theta_3$	100	114.005	1.834	18.921	118.796	1.570	16.385
	$\theta_4$	50	40.678	1.466	16.095	36.092	1.466	18.427
4.	$\theta_1$	0.2	0.199	0.002	0.017	0.203	0.002	0.016
	$\theta_2$	0.8	0.801	0.003	0.024	0.792	0.003	0.023
	$\theta_3$	150	150.113	0.503	4.716	150.228	0.487	4.756
	$\theta_4$	10	10.744	0.474	4.155	9.580	0.445	4.321
5.	$\theta_1$	0.2	0.195	0.002	0.018	0.199	0.002	0.019
	$\theta_2$	0.8	0.810	0.004	0.040	0.799	0.004	0.036
	$\theta_3$	150	149.137	1.113	11.830	149.484	1.050	11.922
	$\theta_4$	30	29.898	0.867	8.273	28.317	0.913	9.949
6.	$\theta_1$	0.2	0.198	0.002	0.025	0.203	0.002	0.026
	$\theta_2$	0.8	0.786	0.006	0.067	0.770	0.005	0.045
	$\theta_3$	150	154.391	1.651	18.077	155.723	1.522	14.735
	$\theta_4$	50	44.847	1.358	13.223	41.242	1.435	14.693
7.	$\theta_1$	0.2	0.196	0.002	0.018	0.201	0.002	0.019
	$\theta_2$	0.8	0.803	0.002	0.019	0.798	0.002	0.020
	$\theta_3$	250	249.651	0.480	4.567	249.551	0.479	4.666
	$\theta_4$	10	11.503	0.443	3.587	10.401	0.444	4.099
8.	$\theta_1$	0.2	0.193	0.003	0.025	0.197	0.003	0.026
	$\theta_2$	0.8	0.807	0.003	0.023	0.802	0.003	0.024
	$\theta_3$	250	250.410	0.943	9.664	250.414	0.962	9.884
	$\theta_4$	30	30.474	0.967	7.869	29.564	1.096	10.628
9.	$\theta_1$	0.2	0.196	0.004	0.032	0.198	0.004	0.035
	$\theta_2$	0.8	0.803	0.004	0.031	0.801	0.004	0.037
	$\theta_3$	250	252.874	1.578	13.344	251.807	1.559	12.582
	$\theta_4$	50	48.615	1.374	10.653	48.014	1.682	14.736

인  $\theta_4$ 의 값이 클수록 참값과 추정치 사이의 차이가 크게 나타남을 알 수 있다. 시나리오 1을 기준으로 살펴보면 시나리오 2, 시나리오 3과 비교하였을 때  $\theta_4 = 10$ 인 경우가  $\theta_4 = 30, 50$ 인 경우보다 SE와 MAD가 각각 0.436과 3.626으로 작은 값을 보였다. 또한  $\theta_3 = 100$ 으로 고정되었을 때  $\theta_4 = 50$ 일 때보다  $\theta_4 = 10$ 인 경우가  $\theta_3$ 의 SE와 MAD의 값이 각각 0.550, 4.899로 작은 값을 나타냈다. 다시 말하면  $\theta_3$ 가 고정되었을 때  $\theta_4$

가 작을수록  $\theta_4$ 의 값이 안정적이며,  $\theta_3$  또한 안정적인 값을 나타낸다는 것을 알 수 있다. 시나리오 1을 시나리오 4, 시나리오 7과 비교하였을 때  $\theta_3 = 100$ 인 경우가  $\theta_3 = 150, 250$ 인 경우보다 SE와 MAD가 각각 0.550과 4.899로 약간 큰 값을 나타내나  $\theta_4$ 의 SE와 MAD 값의 차이가 크지 않았다. 즉,  $\theta_4$ 가 고정되었을 때  $\theta_3$ 의 값의 변화가 모형에 미치는 영향력이 미미하다는 것을 알 수 있다.

그림 4은 작업의 성공 여부가 베르누이 분포를 따르는 데이터를 200번 반복하여 얻은 학습곡선의 적합 모형과 각 시점의 95% 경험적인 신뢰구간, 각 시점의 95% 근사 신뢰구간의 평균, 참값을 이용한 실패 확률과 각 최대우도 추정치를 이용한 평균 적합선을 나타내었다. 95% 경험적인 신뢰구간은 200번을 반복하여 구한  $t$  시점의 실패 확률을 오름차순으로 정렬하여 상위 여섯번째 값을  $t$  시점의 95% 경험적인 신뢰구간의 하한으로 정의하고, 하위 여섯번째 값을  $t$  시점의 95% 경험적인 신뢰구간의 상한으로 정의한다. 95% 근사 신뢰구간의 평균은 2.3절의 델타 방법을 이용하여  $t$ 시점에서 근사 신뢰구간을 200번 반복하여 각각 구한 후, 그 값들의 평균으로 나타내었다. 참값을 이용한 실패 확률과 각 추정치들을 이용한 평균 적합선의 차이가 거의 나타나지 않았고, 95% 근사 신뢰구간의 평균과 95% 경험적인 신뢰구간과의 차이가 거의 보이지 않을 정도로 일치하는 형태를 보였다.  $\theta_3$ 의 값은 학습곡선의 변곡점의 위치를 나타내며  $\theta_4$ 는 학습곡선의 휘어짐 정도를 나타낸다.  $\theta_4$ 가 커질수록 학습곡선의 완만하게 휘어지며 이는 동일한  $\theta_3$  값을 가질 때, 시작 시점에 비해 학습이 늦게 형성되는 것을 확인할 수 있다.

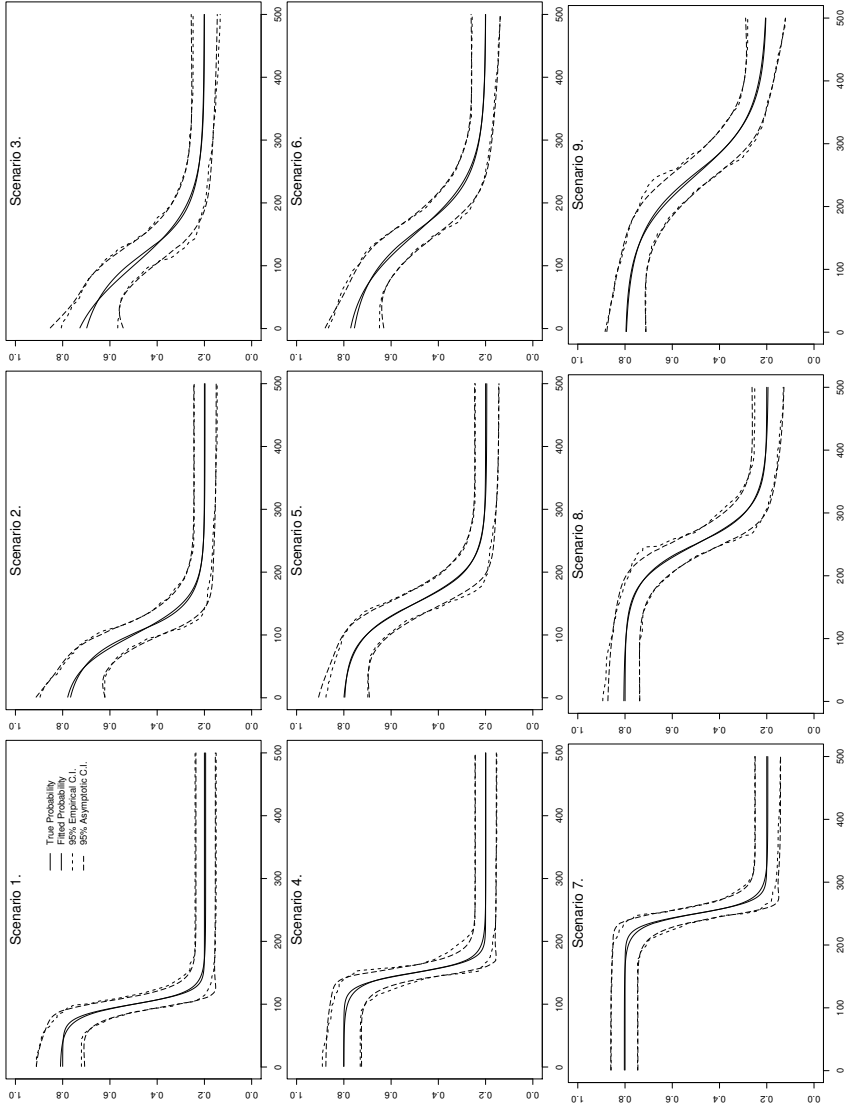


그림 4: 최대우도 추정법을 이용한 관측시점별 참확률과 추정확률, 그리고 95% 신뢰구간들  
 True Probability:  $P_i(\theta)$ , Fitted Probability:  $P_i(\hat{\theta})$ , 95% Empirical C.I.: 3.1 절 참고, 95% Asymptotic C.I.: 2.3 절 참고

그림 5는 각 시나리오별 베이지안 접근법을 이용하여 추정확률과 각 시점의 95% 경험적인 신뢰구간을 나타내었다. 그림 4과 마찬가지로 참확률과 추정확률이 거의 동일하게 나타나나, 경험적인 신뢰구간의 경우는 최대우도 추정법에 의해 구한 경험적인 신뢰구간이 베이지안 접근법에 의해 구한 경험적인 신뢰구간보다 더 좁게 나타났다. 베이지안 접근법에 의한 경험적인 신뢰구간을 살펴보면,  $\theta_3$ 가 고정되었을 때,  $\theta_4$ 가 커질수록 신뢰구간이 넓게 형성되는 것을 확인할 수 있으며,  $\theta_4$ 가 고정되었을 때,  $\theta_3$ 가 작을수록 신뢰구간이 넓게 형성되는 것을 확인할 수 있다. 즉, 베이지안 추정법을 이용하여 경험적인 신뢰구간을 구할 때,  $\theta_3$ 가 클수록,  $\theta_4$ 가 작을수록 신뢰구간이 좁게 형성되는 것을 알 수 있다.

그림 6는 시나리오에 따른 관측시점별 참확률과 추정확률의 차이를 나타낸 도표로 학습곡선이 휘어지는 변곡점(학습이 형성되는 지점)이 나타나는 시점( $\theta_3$ )에서 변동이 크게 나타나고 있음을 알 수 있다. 즉, 추정치와 참값의 차이가 변곡점이 나타나는 시점의 전후에서 커지다가 점차 차이가 나타나지 않는다는 것을 알 수 있다. 시나리오 5의 모의 실험과, 시나리오 8의 모의실험의 경우는 참확률과 추정확률의 차이가 근소하다는 것을 확인할 수 있으며 이런 경우는 안정적인 학습곡선의 형태를 보이고 있다.

표 2는 시나리오에 따른 최대우도 추정법과 베이지안 접근방법을 이용한  $100 \times k\%$  능숙시점( $\lambda_k$ )을 나타낸 결과이다. 표 2에서 확인할 수 있듯이 최대우도 추정법과 베이지안 접근방법을 이용한 결과가 비슷한 양상을 보이고 있으나, 베이지안 접근방법을 이용하여 구한  $100 \times k\%$  능숙지점의 MAD의 값이 더 작게 나타났음을 알 수 있다.

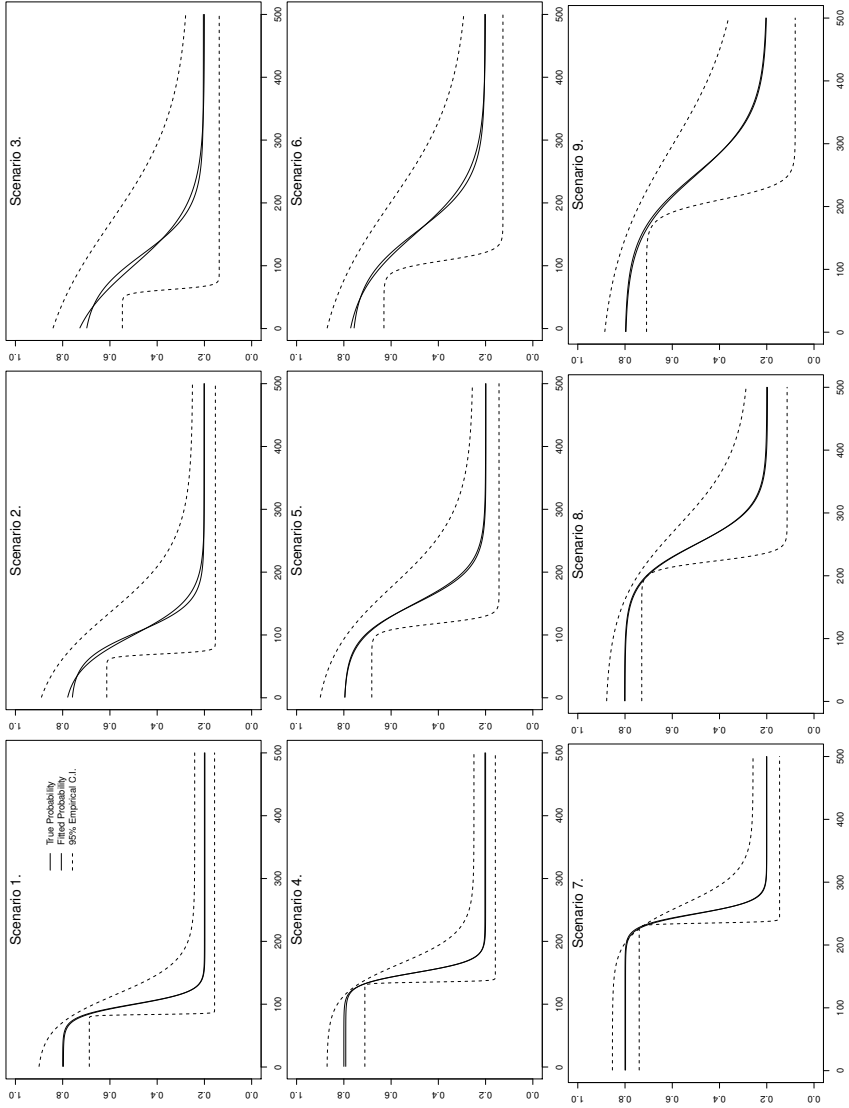


그림 5: 베이저안 접근법을 이용한 관측시점별 참확률과 추정확률, 그리고 95% 경험적인 신뢰구간  
 True Probability:  $P_i(\theta)$ , Fitted Probability:  $P_i(\hat{\theta})$ , 95% Empirical C.I.

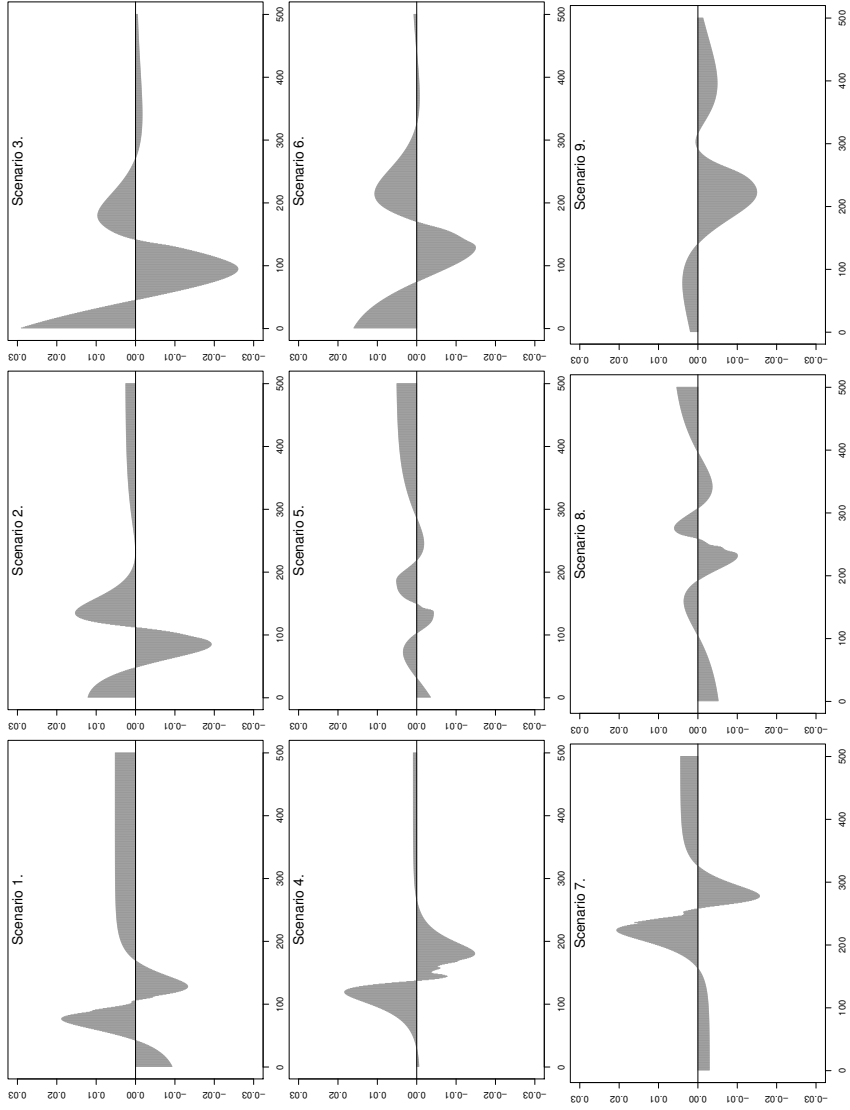


그림 6: 시나리오에 따른 관측시점별 참확률과 추정확률의 차이( $P_i(\theta) - P_i(\hat{\theta})$ )

표 2: 추정결과를 이용한  $100 \times k\%$  능숙시점( $\lambda_k$ )

Scenario	$k$	$\lambda_k$	ML			Bayesian		
			Mean	SE	MAD	Mean	SE	MAD
1.	0.90	121.972	124.155	1.024	10.917	122.116	1.021	8.705
	0.95	129.444	132.600	1.312	14.811	129.767	1.295	10.946
	0.99	145.951	151.256	1.990	23.431	146.670	1.938	16.641
2.	0.90	165.916	160.128	1.974	23.725	155.606	1.797	18.353
	0.95	188.333	179.814	2.565	30.701	172.931	2.273	24.753
	0.99	237.853	223.302	3.970	47.844	211.206	3.390	39.037
3.	0.90	209.861	203.383	2.987	38.800	198.099	3.362	33.950
	0.95	247.221	233.779	3.942	49.315	225.068	4.364	47.443
	0.99	329.756	300.925	6.218	74.389	284.644	6.681	78.173
4.	0.90	171.972	173.719	1.077	12.903	171.278	1.019	9.366
	0.95	179.444	181.747	1.401	16.694	178.436	1.321	11.994
	0.99	195.951	199.482	2.150	26.867	194.250	2.022	18.253
5.	0.90	215.916	214.829	1.959	26.885	211.702	2.127	21.816
	0.95	238.333	237.170	2.525	36.043	232.861	2.743	27.905
	0.99	287.853	286.522	3.866	56.007	279.603	4.176	42.676
6.	0.90	259.861	252.929	3.014	36.850	246.341	3.313	33.289
	0.95	297.221	286.439	3.912	47.778	277.158	4.295	43.646
	0.99	379.756	360.467	6.030	72.366	345.235	6.567	68.683
7.	0.90	271.972	274.925	1.080	11.984	272.403	1.074	8.519
	0.95	279.444	283.520	1.384	16.295	280.175	1.379	11.528
	0.99	295.951	302.508	2.086	24.563	297.343	2.081	17.878
8.	0.90	315.916	317.368	2.327	26.115	315.372	2.584	23.095
	0.95	338.333	340.139	3.002	34.375	337.462	3.358	30.397
	0.99	387.853	390.443	4.545	51.407	386.262	5.118	47.978
9.	0.90	359.861	359.692	3.312	43.801	357.304	3.846	36.496
	0.95	397.221	396.018	4.244	56.807	393.180	5.022	47.259
	0.99	479.756	476.266	6.406	83.835	472.436	7.710	71.055

시나리오 1의 결과를 중심으로 살펴보면 신뢰도의 값이 커질수록  $\lambda_k$ 의 SE의 값과 MAD의 값이 증가함을 알 수 있다. 능숙도가 90%인 시점은 약 122번째에서 나타날 것이고, 능숙도가 95%인 시점은 약 129번째에서 나타날 것이며, 약 146번을 시도하였을 때 능숙도가 99%에 도달할 것임을 알 수 있다. 모의실험 결과 능숙도가 90%인 시점은 약 124번째에서 나타났고, 능숙도가 95%인 시점은 약 133번째에서 나타났으며, 능숙도가 99%인 시점은 약 151번째에서 나타났음을 확인할 수 있다. 시나리오 1과 시나리오 4의 SE 값과 MAD의 값을 살펴보면,  $\lambda_k$ 의 SE 값과 MAD 값은  $\theta_4$ 에 대해 크게 영향을 받지 않는다는 것을 알

표 3: 로지스틱확률분포를 이용한 학습곡선모형의 추정결과 ( $T = 50$ )

Scenario	Parameter	Truth	Mean	SE	MAD
1.	$\theta_1$	0.2	0.163	0.005	0.056
	$\theta_2$	0.8	0.911	0.010	0.200
	$\theta_3$	10	9.831	0.358	2.071
	$\theta_4$	1	2.421	0.159	0.748
2.	$\theta_1$	0.2	0.153	0.006	0.066
	$\theta_2$	0.8	0.898	0.011	0.200
	$\theta_3$	10	10.334	0.633	2.531
	$\theta_4$	3	4.408	0.313	1.619
3.	$\theta_1$	0.2	0.148	0.007	0.073
	$\theta_2$	0.8	0.858	0.013	0.200
	$\theta_3$	10	12.743	0.685	3.771
	$\theta_4$	5	6.653	0.559	3.167
4.	$\theta_1$	0.2	0.157	0.005	0.058
	$\theta_2$	0.8	0.876	0.008	0.111
	$\theta_3$	15	15.308	0.225	1.980
	$\theta_4$	1	2.538	0.193	0.763
5.	$\theta_1$	0.2	0.158	0.006	0.063
	$\theta_2$	0.8	0.877	0.011	0.200
	$\theta_3$	15	14.864	0.534	3.060
	$\theta_4$	3	3.953	0.223	1.512
6.	$\theta_1$	0.2	0.137	0.007	0.079
	$\theta_2$	0.8	0.872	0.011	0.200
	$\theta_3$	15	16.153	0.776	4.059
	$\theta_4$	5	5.491	0.303	2.697
7.	$\theta_1$	0.2	0.160	0.006	0.057
	$\theta_2$	0.8	0.836	0.007	0.070
	$\theta_3$	25	25.037	0.241	1.482
	$\theta_4$	1	1.697	0.151	0.957
8.	$\theta_1$	0.2	0.141	0.007	0.075
	$\theta_2$	0.8	0.846	0.008	0.085
	$\theta_3$	25	25.589	0.363	3.036
	$\theta_4$	3	3.796	0.247	1.854
9.	$\theta_1$	0.2	0.139	0.008	0.100
	$\theta_2$	0.8	0.841	0.009	0.096
	$\theta_3$	25	25.809	0.488	4.302
	$\theta_4$	5	4.893	0.269	2.705

수 있다.

표 3은 표 1과 마찬가지로 시나리오에 따른 모수  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 의 참값과 추정값들의 평균(mean), 표준오차(s.e), MAD의 결과를 정리한 것이다. 표 1의 결과는 시행횟수가  $t = 1, \dots, 500$ 에 따른 결과이고 표 3은  $t = 1, \dots, 50$ 에 따른 결과를 나타낸다. 시나리오 1을 기준으로 살펴보면 시나리오 2, 시나리오 3과 비교하였을때  $\theta_4 = 1$ 인 경우가  $\theta_4 = 3, 5$

인 경우보다 SE와 MAD가 각각 0.159와 0.748으로 작은 값을 보였다. 또한  $\theta_3 = 10$ 으로 고정되었을때  $\theta_4 = 5$ 일때보다  $\theta_4 = 1$ 인 경우가  $\theta_3$ 의 SE와 MAD의 값이 각각 0.358, 2.071으로 작은 값을 나타냈다. 이는  $\theta_3$ 가 고정되었을때  $\theta_4$ 가 작을수록  $\theta_4$ 의 값이 안정적이며,  $\theta_3$  또한 안정적인 값을 나타낸 장기적인 시행횟수( $T = 500$ )에 대한 모의실험의 결과와 비슷한 양상을 보이고 있다. 시나리오 1을 시나리오 4, 시나리오 7과 비교하였을때  $\theta_3 = 10$ 인 경우가  $\theta_3 = 15, 25$ 인 경우보다 SE와 MAD가 각각 0.358과 2.071으로 약간 큰 값을 나타냈으며,  $\theta_4$ 가 고정되었을때  $\theta_3 = 15$ 인 경우에 대체로 안정적인 값을 나타냈다. 즉, 장기적인 시행횟수( $T = 500$ )에 대해서는  $\theta_4$ 가 고정되었을때  $\theta_3$ 의 값의 변화가 모형에 미치는 영향력이 미미하였으나, 단기적인 시행횟수( $T = 50$ )인 경우에는  $\theta_4$ 가 고정되었을때 학습곡선의 변곡점의 시점이 실패확률이 감소하기 시작하는 시점과 학습이 최종적으로 형성되는 시점의 평균 시점에서 안정적인 형태를 보인다는 것을 확인할 수 있다.

그림 7과 그림 8는 모의실험 한 세트에 대한 누적합 학습곡선 분석을 적용한 결과이다. 이 때, 허용되지 않는 실패율( $\rho_0$ )을 0.4, 허용되는 실패율( $\rho_1$ )을 0.2로, 제1종 오류( $\alpha$ )는 0.05로, 제2종 오류를 ( $\beta$ )를 0.2로 임의로 설정하였다. 이 기본값을 토대로 학습곡선이 일어났는지 판단의 근거가 되는 기준선을 계산할 수 있고, 이 경우의 기준선은  $-2.827$ 로 산출된다. 본 연구의 모의실험 자료에서는 관심있는 대상이 실패가 일어난 경우로 누적합의 그래프가 양의 방향으로 향하게 되며, 기준선을 통과하는 첫 시점을 학습이 능숙한 상태에 도달한 시점이라고 할 수 있다. 누적합 학습곡선의 결과 또한  $\theta_3$ 와  $\theta_4$ 에 영향을 받아 학습이 능숙해지는 지점이 결정되나 이를 결정하기 위해 경험에 의한 주관적인 값들이 필요하므로 신뢰하기가 어렵다는 단점이 존재한다.

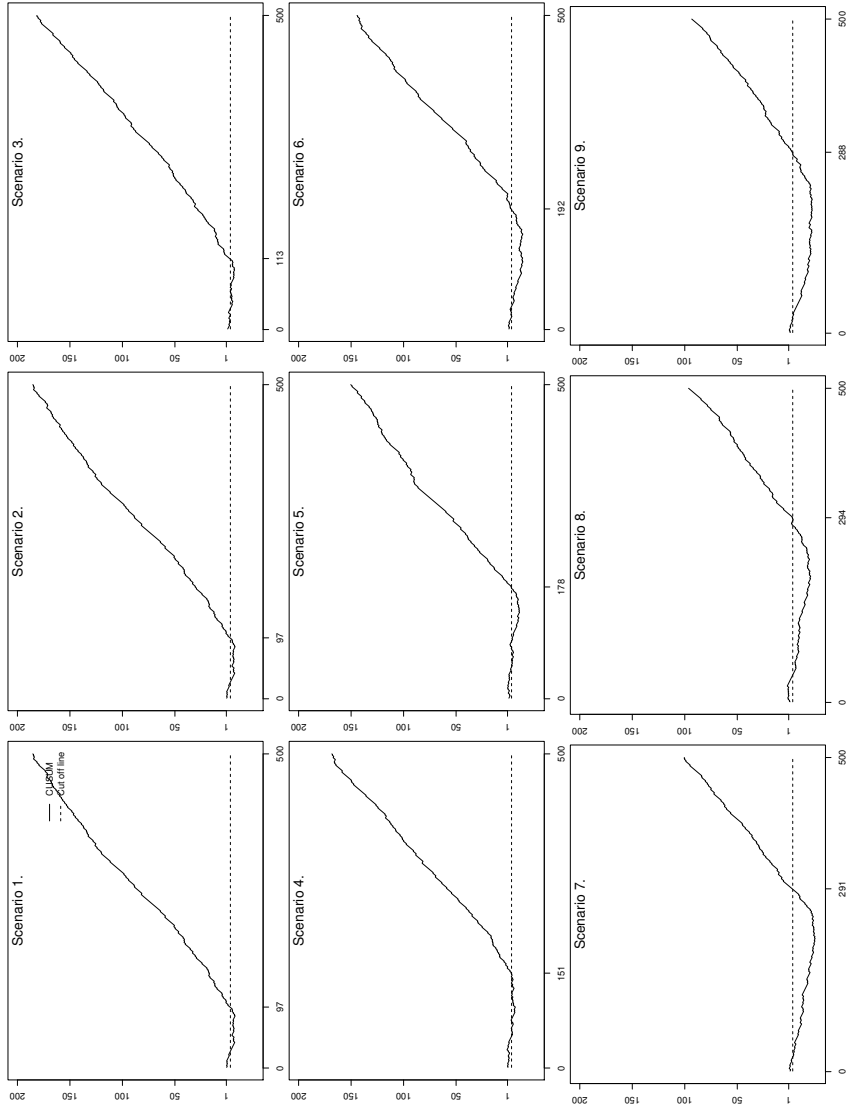


그림 7: 모의 실험한 세트에 대한 CUSUM을 이용한 학습곡선 적함( $T = 500$ )

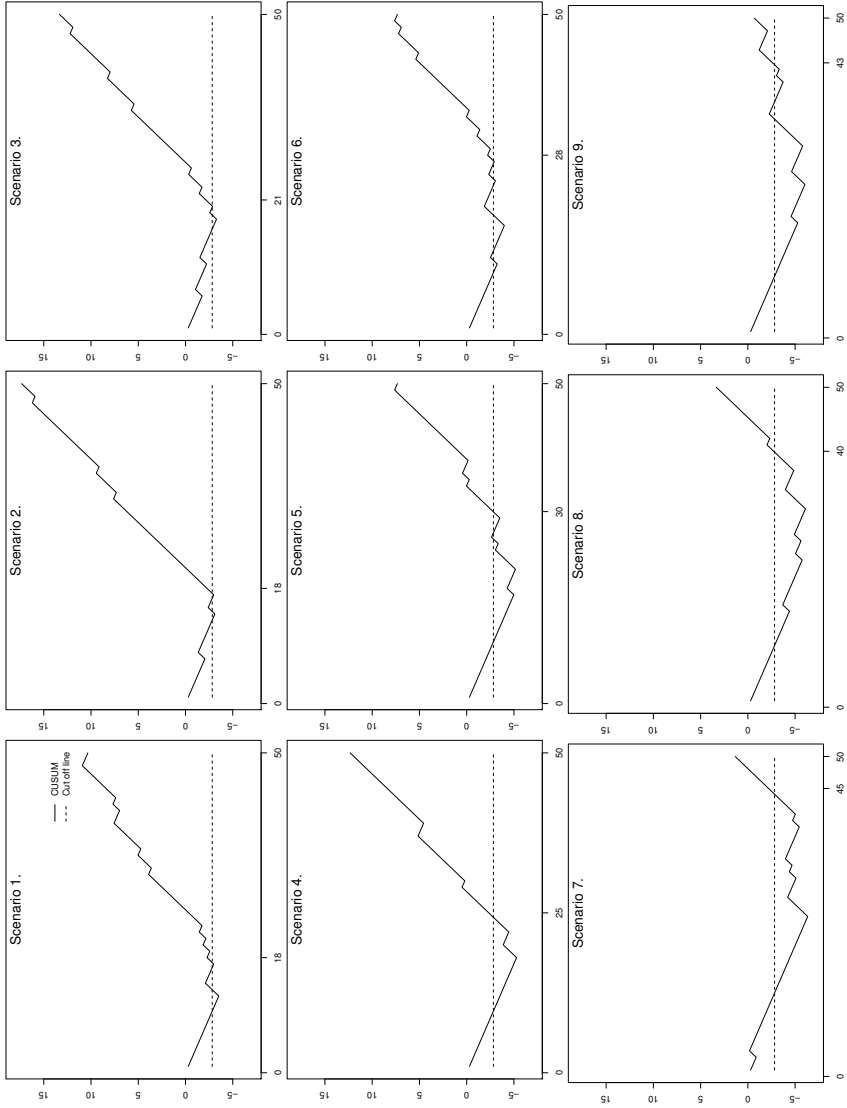


그림 8: CUSUM을 이용한 학습곡선 적합( $T = 50$ )

## 제 4 장

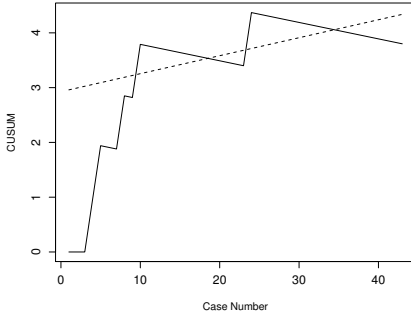
### 실증연구

2장에서 제안한 모형을 Lim 등(2002)의 방사선 전문의의 유방생체검사(breast biopsy) 수행자료에 적용하였다. 유방생체검사 자료는 한 명의 방사선 전문의가 교육기간부터 차후의 진료까지 유방촬영술에 의한 유방생체검사의 성공여부를 나타낸 자료로 총 45번의 시행을 하였다. Lim 등(2002)은 누적합을 이용하여 학습이 일어나는 시점을 구하였다. 이 때, 용인되지 않을 실패율을 5%로, 용인되는 실패율을 2%, 제1종 오류( $\alpha$ )는 0.05로, 제2종 오류를 ( $\beta$ )를 0.2로 설정하였다. 그림 9의 왼쪽 도표는 Lim 등(2002) 연구의 결과로 누적합 분석에 의하여 약 10번의 시행이후에 학습이 일어났음을 확인할 수 있다. 그림 9의 오른쪽 도표는 기존의 누적합을 이용한 학습곡선의 분석 방법으로 6번째에 학습이 일어났다는 것을 알 수 있다. Lim 등(2002)의 연구는 기존의 누적합을 이용한 학습곡선의 분석에서 발전된 형태를 갖추고 있기 때문에 기존 방법보다 정확하게 학습이 일어난 지점을 찾을 수 있으나, 기존의 방법의 경우 네 가지의 경험적인 값을 토대로 기준선을 산출하지만, Lim 등(2002)의 연구에서는 다섯 가지의 경험적인 값을 통하여 기준선을 산출하기 때문에 연구자의 경험과 지식에 의존하는 경향이 기존 방법보다 크다.

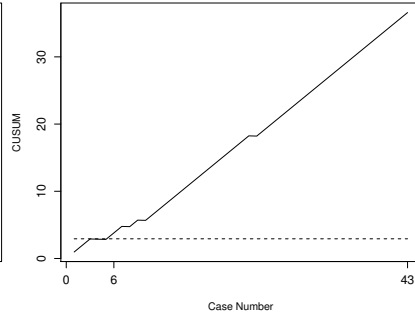
표 4는 위 논문의 자료를 본 논문에서 제안한 방법을 이용하여 적합시킨 결과이다. 그림 10의 왼쪽 그래프에서 확인할 수 있듯이 이 데

표 4: 실제 자료(Lim 등(2002))를 이용한 적합

Parameter	ML Estimation	Bayesian Estimation
$\theta_1$	0.030	0.052
$\theta_2$	0.400	0.3409
$\theta_3$	10.522	11.360
$\theta_4$	0.053	2.631



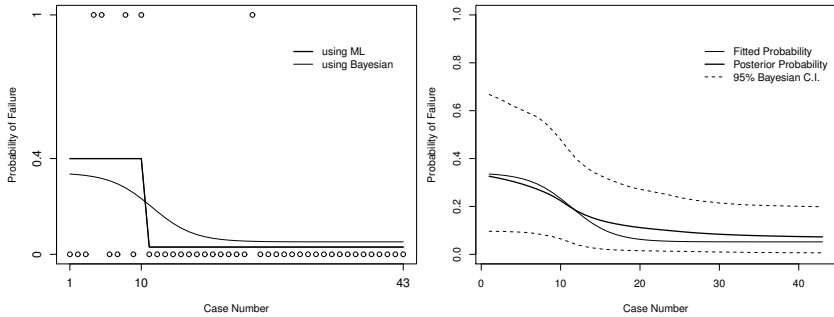
(a) Lim 등(2002) 연구결과



(b) 기존 CUSUM의 적합

그림 9: 실제 자료(Lim 등(2002))에 대한 CUSUM

이터는 실패 횟수가 적으므로 초기 시행 이후 빠르게 능숙해진다는 것을 알 수 있다. 그렇기 때문에 학습의 일어나기까지 걸리는 시간이 매우 짧으며, 이것을 나타내는 지표인  $\theta_4$ 가 0.053으로 굉장히 작은 값으로 추정되었다. 초기의 실패 확률( $\theta_2$ )은 0.400로, 더 이상 줄일 수 없는 실패 확률( $\theta_1$ )은 0.030, 학습이 일어나는 지점은 10.522로 최대우도방법을 통해 나타냈다. 베이지안 방법을 적용하여 얻은 결과와 최대우도방법을 이용한 결과를 비교해보면 그림 10의 왼쪽 그래프에서 확인할 수 있듯이 초기의 실패 확률( $\theta_2$ )과 더 이상 줄일 수 없는 실패 확률( $\theta_1$ )은 거의 동일한 형태를 보이나 베이지안 방법을 이용한 결과  $\theta_4$ 가 2.631로 추정되어 최대우도방법보다 부드러운 곡선의 형태로 나타났다. 이 때, 베이지안 접근방법을 이용하여 얻은 적합선은 추정치의 평균( $P_t(\hat{\theta})$ )을 이용하여 적합하였다. 그림 10의 오른쪽 그래프에서



(a) 제안 모형 적합

(b) 사후확률 및 95%신뢰구간

그림 10: 실제 자료(Lim 등(2002))에 대한 적합

는 베이지안 방법을 이용한 베이지안 신뢰구간과 사후확률을 확인할 수 있다. 여기서 사후확률은  $\hat{P}_i(\hat{\theta})$ 을 의미한다. 초기 시행에는 실패와 성공이 번갈아 일어나기 때문에 베이지안 신뢰구간의 폭이 넓게 나타나지만 시행을 거듭할수록 성공의 횟수가 많아지기 때문에 베이지안 신뢰구간이 점차 안정적인 모습을 나타낸다는 것을 알 수 있다.

Lim 등(2002)의 누적합을 이용한 결과와 본 논문에서 제안한 모형의 학습이 일어나는 시점의 결과가 각각 10회와 10.5회로 큰 차이가 나진 않았으나 Lim 등의 누적합을 이용한 방법은 학습이 일어나는 시점을 구하기 위해서는 경험적인 값들이 필요하다는 단점이 존재한다.

## 제 5 장

### 결론

본 연구에서는 이항 반응 자료에 대하여 누적확률분포의 특성을 이용한 학습곡선의 통계적 모형을 제안하였다. 모수를 참값에 가까운 값으로 추정하기 위하여 뉴턴-랩슨 방법을 사용하였고, 델타 방법으로 최대우도함수를 이용하여 신뢰구간을 추정하였다. 또한 베이지안 접근방법을 이용하여 모수를 추정하였다. 9가지 시나리오에 따라 모의 실험을 한 결과에 의하면 학습이 일어나는 시점부터 학습이 종료되는 시점까지의 변동폭이 큰 경우는 적합이 잘 이루어지지 않으며, 특히 학습곡선이 휘어지는 변곡점에서의 시점( $\theta_3$ )과 학습이 이루어지는 기간( $\theta_4$ )이 참값과 추정치 사이의 차이에 영향을 미쳤다. 즉, 학습곡선의 변곡점 시점을 결정하는  $\theta_3$ 를 고정하였을 때, 학습곡선의 변동폭을 결정하는  $\theta_4$ 의 값이 작을수록  $\theta_3$ 와  $\theta_4$ 의 값이 안정적이고,  $\theta_4$ 를 고정하였을 때는  $\theta_3$ 의 값의 변화가 모형에 미치는 영향력이 미미하다는 사실을 알 수 있었다. 작업에 완벽하게 능숙해지는 상태를 100%로 볼 때, 작업에  $100 \times k\%$  정도 능숙해지는 시점을 구할 수 있고, 실패 확률에 대한 95% 신뢰구간을 통하여 특정 시점에서 가능한 실패 확률의 범위와, 특정 실패 확률이 나타날 수 있는 시행횟수의 범위를 구할 수 있다. Lim 등(2002)이 분석한 유방생체검사에 대해 본 논문에서 제안한 모형을 적용한 결과 학습이 일어나는 시점은 Lim 등(2002)의 결과와 본 논문에서 제안한 모형의 결과와 큰 차이를 나타내지 않았으나, 본 논문은 기존의

학습곡선을 이용한 분석에 비하여 연구자의 주관적인 견해가 배제된 객관적인 학습곡선의 모형화가 가능해짐을 보였다. 향후에는 이항분포뿐만 아니라 보다 포아송분포, 음이항분포와 같은 다양한 확률분포를 고려한 학습곡선의 구축을 연구하고자 한다.

## 참고 문헌

- [1] 김학선, 최윤락, 이환모, 문성환, 김경희, 박진오, 하중원, 신동은 (2003). 흉곽 내시경을 사용한 척추 기형 수술시 학습 곡선, <대한척추외과학회지>, 제10권, 261-268.
- [2] 송수진, 김철호, 김성희, 박은영, 박근식, 문화숙, 김경서, 주보선, 김상갑 (2003). 내시경하 자궁근종절제술의 Learning curve, <대한산부회지>, 제46권, 2345-2351.
- [3] 오윤경, 황효순, 이경옥, 송승훈, 이재관, 허준용, 신정호 (2010). 세 명의 산부인과 전문의별 복강경하 전자궁절제술의 학습곡선, *Korean Journal of Obstetrics and Gynecology*, Vol. 53, 927-933.
- [4] 최유신, 박도중, 이혁준, 김민찬, 김형호, 양한광, 한호성, 이건욱 (2006). 조기위암에 시행된 복강경 보조 원위부 위절제술의 학습 곡선 극복 시점 및 극복 전후의 비교, <대한외과학회지>, 제70권, 370-374.
- [5] Adler, P.S. and Clark, K.B. (1991). Behind The Learning Curve: A Sketch Of The Learning Process, *Management Science*, Vol. 37, 267-281.
- [6] Ballantyne, G.H., Ewing, D., Capella, R.F., Capella, J.F., Davis, D., Schmidt, H.J., Wasielewski, A., Davies, R.J. (2005). The Learning Curve Measured by Operating Times for Laparoscopic and Open Gastric Bypass: Roles of Surgeon's Experience, Institutional Experience, Body Mass Index and Fellowship Training, *Obesity Surgery*, Vol. 15, 172-182.
- [7] Biau, D.J., Williams, S.M., Schlup, M.M., Nizard, R.S. and Porcher, R. (2008). Quantitative and individualized assessment of the learning curve using LC-CUSUM, *British Journal of Surgery*, Vol. 95, 925-929.

- [8] Cook, J.A., Ramsay, C.R. and Fayers, P. (2004). Statistical evaluation of learning curve effects in surgical trials, *Clinical Trials*, Vol. 1, 421–427.
- [9] Ferguson, G.G., Ames, C.D., Weld, K.J., Yan, Y., Venkatesh, R., Landman, J. (2005). Prospective evaluation of learning curve for laparoscopic radical prostatectomy: Identification of factors improving operative times, *Adult urology*, Vol. 66, 840–844.
- [10] Filho, G.R.O., MD (2002). The Construction of Learning Curve for Basic Skills in Anesthetic Procedures: An Application for the Cumulative Sum Method, *Economics, Education, And Health Systems Research*, Vol. 92, 411–416.
- [11] Forbes, T.L., DeRose, G., Kribs, S.W, and Harris, K.A. (2004). Cumulative sum failure analysis of the learning curve with endovascular abdominal aortic aneurysm repair, *Journal of Vascular Surgery*, Vol. 39, 102–108.
- [12] Kim, M.C., Jung, G.J., Kim, H.H. (2005). Learning curve of laparoscopy-assisted distal gastrectomy with systemic lymphadenectomy for early gastric cancer, *World Journal of Gastroenterology*, Vol. 47, 7508–7511.
- [13] Lee, J.H., Ryu, K.W., Lee, J.H., Park, S.R., Kim, C.G., Kook, M.C., Nam, B.H., Kim, Y.W., and Bae, J.M. (2006). Learning Curve for Total Gastrectomy with D2 Lymph Node Dissection: Cumulative Sum Analysis for Qualified Surgery, *Annals of Surgical Oncology*, Vol. 13, 1175–1181.
- [14] Lieberman, M.B. (1984). The learning curve and pricing in the chemical processing industrie, *Rand Journal of Economics*, Vol. 15, 213–228.
- [15] Lim, P.C., Kang, E., Park, D.H. (2011). A comparative detail analysis of the learning curve and surgical outcome for robotic hysterectomy

with lymphadenectomy versus laparoscopic hysterectomy with lymphadenectomy in treatment of endometrial cancer: A case-matched controlled study of the first one hundred twenty two patients, *Gynecologic Oncology*, Vol. 120, 413–418.

- [16] Lim, T.O., Soraya, A., Ding, L.M. and Morad, Z. (2002). Assessing doctors' competence: application of CUSUM technique in monitoring doctor' performance, *International Journal for Quality in Health Care*, Vol. 14, 251–258.
- [17] Mazzola, J.B. and McCardle, K.F. (1996). A Bayesian Approach to Managing Learning-Curve Uncertainty, *Management Science*, Vol. 42, 680–692.
- [18] Novick, R.J. and Stitt, L.W. (1999). The Learning Curve of an Academic Cardiac Surgeon: Use of the CUSUM Method, *Journal of Cardiac Surgery*, **14**, 312–320.
- [19] Schauer, P., Ikramuddin, S., Hamad, G., Gourash, W. (2002). The Learning curve for laparoscopic Roux-en-Y gastric bypass is 100 cases, *Surgical Endoscopy*, Vol. 17, 212–215.
- [20] Sim, H.G., Yip, S.K.H., Lau, W.K.O., Tan, Y.H., Wong, M.Y.C. And Cheng, C.W.S. (2006). Team-based approach reduces learning curve in robot-assisted laparoscopic radical prostatectomy, *International Journal of Urology*, Vol. 13, 560–564.
- [21] Smith, A.C., Frank, L.M., Wirth, S., Yanike, M., Hu, D., Kubota, Y., Graybiel, A.M., Suzuki, W.A., Brown, E.N. (2004). Dynamic Analysis of Learning in Behavioral Experiments, *The Journal of Neuroscience*, Vol. 24, 447–461.
- [22] Smunt, T.L. (1999). Log-linear and non-log-linear learning curve models for production research and cost estimation, *International Journal of Production Research*, Vol. 37, 3901–3911.

- [23] Tekkis, P.P., Senagore, A.J., Delaney, C.P., and Fazio, V.W. (2005). Evaluation of the Learning Curve in Laparoscopic Colorectal Surgery, *Annals of Surgery*, Vol. 242, 83–91.
- [24] Williams, C.K.I. And Vivarelli, F. (2000). Upper and Lower Bounds on the Learning Curve for Gaussian Processes, *Machine Learning*, Vol. 40, 77–102.

# Abstract

## Modelling of The Learning Curves on the Binary Responses

Seulji Lee

Department of Statistics

The Graduate School

Sungshin Women's University

When worker repeatedly performs same operation in the field, operation efficiency is improved by accumulating knowledge, experience and skill in regard to work. Investing time at an output is reduced by repeating same operation. This phenomenon is referred to learning effect. A learning curve is a graphical representation of the changing rate of learning. In a prior study, when the cases were accumulated, researcher decided rapidly decreasing point on his experiences. Because it has problem how to decide proficient point, it is difficult to fit a model. In this paper, we focus on a statistical modelling of the learning curve for binary data using CDF shape. For estimated the parameters, we use a Newton-Raphson method and Bayesian method for the estimation of parameters and Delta method for the approximate mean and variance of probability. We carry out simulations to described the characteristic of proposed model. We analyze one radiologist's performance of

stereotaxic core needle breast biopsy of non-palpable lesion with Lim et al(2002) using proposed method. Through simulation, When fixed decision of inflection point in learning curve( $\theta_3$ ), the lower the fluctuation of learning curve( $\theta_4$ ) the more stable  $\theta_3$  and  $\theta_4$ . We can get  $100 \times k\%$  proficient point. In real application, There is no difference between Lim's result and our result. Our result exclude subjective researcher's view. In our study, It is useful method for objective modelling.

**Keywords :** binary response, learning curves, cumulative distribution function

# Appendix

## I. SAS syntax

```
/*모수 벡터 정의*/
%LET theta1=0.2;
%LET theta2=0.8;
%LET theta3=150;
%LET theta4=30;

/*토지스틱 누적확률분포를 이용한 실패확률 생성 macro*/
%macro gen(theta1,theta2,theta3,theta4);
data pt_logi;
do i=1 to 500 by 1;
    p=&theta1+(&theta2-&theta1)*(1-cdf('logistic', (i-&theta3)/&theta4,0,1));
output;
end;
run;
%mend;
%gen(&theta1,&theta2,&theta3,&theta4);

/*data set 만들기*/
data x1;
do x=1 to 500;
output;
end;
run;
data rand;
set pt_logi;
array y[200] x1-x300;
do i=1 to 200 by 1;
y[i]=RAND('BERNOULLI',p);
end;
drop p i;
run;
data simul_logi;
merge x1 sjsj.rand;
run;
```

```

/*proc model문을 이용한 모수 추정*/
%macro Logistic_Fit();
%do i=1 %to 300;
proc model data=simul_logi;
parms theta1=&theta1 theta2=&theta2 theta3=&theta3 theta4=&theta4;
xbeta=(x-theta3)/theta4;
p=theta1+(theta2-theta1)*(1-cdf('logistic',xbeta,0,1));
  x&i=p;
  if x&i=0 then e=1-p;
  else e=p;
  loge=-2*log(e);
  errormodel x&i ~ general(loge);
  fit x&i/ OUTALL outcov OUTS=fit&i OUTEST=fit_e&i maxiter=30000;
  bounds 0<=theta1, theta1<theta2, theta2<=1, theta4>0;
run; quit;
%end;
%mend Logistic_Fit;
%logistic_fit()

```

## II. R syntax

```

#참값 설정
Parameter <- matrix(c(0.2,0.8,100,10,0.2,0.8,100,30,0.2,0.8,100,50,
                      0.2,0.8,150,10,0.2,0.8,150,30,0.2,0.8,150,50,
                      0.2,0.8,250,10,0.2,0.8,250,30,0.2,0.8,250,50),
                    nrow=9,ncol=4,byrow=T)

True.Pr <- matrix(NA,T,nrow(Parameter))

#참확률
for (j in 1:ncol(True.Pr)) {
  True.Pr[,j] <- Parameter[j,1]+(Parameter[j,2]-Parameter[j,1])
  *(1-plogis((1:T-Parameter[j,3])/Parameter[j,4]))
}

Random1 <- read.table(file="Random1.txt",sep="\t",head=T)[,1:200]
Scenario1 <- read.table(file="estimation01.txt",sep="\t",head=T)
Estimat1 <- as.matrix(Scenario1[seq(0,199,l=200)*5+1,2:5])

Fitt.Pr1 <- matrix(NA,T,nrow(Estimat1))

#추정확률
for (j in 1:nrow(Estimat1)) {

```

```

Fitt.Pr1[,j] <- Estimatl[j,1]+(Estimatl[j,2]-Estimatl[j,1])
                *(1-plogis((1:T-Estimatl[j,3])/Estimatl[j,4]))
}

Covarial <- as.matrix(Scenario1[-(seq(0,199,l=200)*5+1),2:5])[1:800,]
Varial <- matrix(NA,nrow(Fitt.Pr1),ncol(Fitt.Pr1))

#정보 행렬(Information matrix)
for (j in 1:nrow(Estimatl)) {
  Q.vector <- R.vector <- A.vector <- B.vector <- C.vector <- D.vector
  <- E.vector <- matrix(NA,T,1)
  I.matrix <- matrix(NA,T,10)

  for (i in 1:T) {
    Q.vector[i,] <- (Random1[i,j]-m*Fitt.Pr1[i,j])/(Fitt.Pr1[i,j]
                *(1-Fitt.Pr1[i,j]))
    R.vector[i,] <- exp((i-Estimatl[j,3])/Estimatl[j,4])
    A.vector[i,] <- 1-((1+R.vector[i,])**(-1))
    B.vector[i,] <- (1+R.vector[i,])**(-1)
    C.vector[i,] <- ((Estimatl[j,2]-Estimatl[j,1])/Estimatl[j,4])
                *((1+R.vector[i,])**(-2))*R.vector[i,]
    D.vector[i,] <- ((Estimatl[j,2]-Estimatl[j,1])*(i-Estimatl[j,3])
                /Estimatl[j,4]**2)*((1+R.vector[i,])**(-2))*R.vector[i,]
    E.vector[i,] <- ((2*Fitt.Pr1[i,j]-1)*Random1[i,j]-m*(Fitt.Pr1[i,j]**2))
                /((Fitt.Pr1[i,j]*(1-Fitt.Pr1[i,j]))**2)

    I.matrix[i,1] <- E.vector[i,]*(A.vector[i,]**2)           #[1,1]
    I.matrix[i,2] <- E.vector[i,]*A.vector[i,]*B.vector[i,]  #[1,2]
    I.matrix[i,3] <- E.vector[i,]*A.vector[i,]*C.vector[i,]  #[1,3]
    I.matrix[i,4] <- E.vector[i,]*A.vector[i,]*D.vector[i,]  #[1,4]
    I.matrix[i,5] <- E.vector[i,]*(B.vector[i,]**2)           #[2,2]
    I.matrix[i,6] <- E.vector[i,]*B.vector[i,]*C.vector[i,]  #[2,3]
    I.matrix[i,7] <- E.vector[i,]*B.vector[i,]*D.vector[i,]  #[2,4]
    I.matrix[i,8] <- E.vector[i,]*(C.vector[i,]**2)           #[3,3]
    I.matrix[i,9] <- E.vector[i,]*C.vector[i,]*D.vector[i,]  #[3,4]
    I.matrix[i,10] <- E.vector[i,]*(D.vector[i,]**2)          #[4,4]
  }

  I.inform <- matrix(NA,ncol(Parameter),ncol(Parameter))
  I.inform[1,1] <- -sum(I.matrix[,1])
  I.inform[1,2] <- I.inform[2,1] <- -sum(I.matrix[,2])
}

```

```

I.inform[1,3] <- I.inform[3,1] <- -sum(I.matrix[,3])
I.inform[1,4] <- I.inform[4,1] <- -sum(I.matrix[,4])
I.inform[2,2] <- -sum(I.matrix[,5])
I.inform[2,3] <- I.inform[3,2] <- -sum(I.matrix[,6])
I.inform[2,4] <- I.inform[4,2] <- -sum(I.matrix[,7])
I.inform[3,3] <- -sum(I.matrix[,8])
I.inform[3,4] <- I.inform[4,3] <- -sum(I.matrix[,9])
I.inform[4,4] <- -sum(I.matrix[,10])

if(det(I.inform)>0 & min(diag(I.inform))>0) {
  I.inverse <- solve(I.inform)
}

Varial[,j] <- (A.vector**2*I.inverse[1,1]+B.vector**2*I.inverse[2,2]
              +C.vector**2*I.inverse[3,3]+D.vector**2*I.inverse[4,4]
              +2*(A.vector*B.vector*I.inverse[1,2]+A.vector*C.vector*I.inverse[1,3]
              +A.vector*D.vector*I.inverse[1,4]+B.vector*C.vector*I.inverse[2,3]
              +B.vector*D.vector*I.inverse[2,4]+C.vector*D.vector*I.inverse[3,4]))
}

Mean.Fitt.Pr1 <- as.matrix(apply(Fitt.Pr1,1,mean))
Empl.Conf.Fitt.Pr1 <- t(as.matrix(apply(Fitt.Pr1,1,quantile,probs=c(0.025,0.975))))
Asym.Conf.Fitt.Pr1 <- cbind(apply(Fitt.Pr1-1.96*sqrt(Varial),1,mean),
                           apply(Fitt.Pr1+1.96*sqrt(Varial),1,mean))

```

### III. Winbugs syntax

```

Model {
  for (i in 1 : N){
    y[i] ~ dbern(p[i])
    p[i]<- theta1 + (theta2 - theta1)*(1-(1/(1+exp(-(i-theta3)/theta4))))
  }
  theta1 ~ dunif(0,1)
  theta2 ~ dunif(0,1)
  o1 <- 0
  o1 ~ dbern(c1)
  c1<- step(theta1 - theta2)
  theta3 ~ dunif(0,N)
  scale ~ dgamma(0.1,0.1)
  theta4<-1/sqrt(scale)
}

```