沈 聖 娥 教授指導

碩士學位 請求論文

학교수학에서의 수학사 및 예화자료 지도방안 연구

2009

誠信女子大學敎 敎育大學院

敎育學科 數學敎育專功

裵 珍 庚

학교수학에서의 수학사 및 예화자료 연구

沈 聖 娥　教授指導

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

2009년 5월

誠信女子大學敎 敎育大學院

敎育學科 數學敎育專功

裵 珍 庚

認 准 書

金 秀 蓮 의 碩士學位 論文을 認准함

審査委員______________印

審査委員______________印

審査委員______________印

誠信女子大學教 教育大學院

논 문 개 요

이 논문에서는 수학에 대한 학생들의 흥미를 유발하고 관심을 이끌 수 있는 수학학습 지도 방안 중 하나인 수학사의 도입에 관하여 논한다.

연구의 목적을 달성하기 위해 수학사를 통한 교수-학습 방법에 대한 문헌연구를 통하여 수학사적 배경과 역사 속에서의 수학 문제 등을 연구, 발췌하고, 수학사를 실제 학교 수학 수업에서 다양하게 활용할 수 있도록 학습지도안을 제시한다.

학교 수학학습 지도에 수학사를 도입함으로써 학생들의 자발적인 수학적 활동을 이끌어 내어 수학의 실용성과 가치를 깨닫게 할 수 있을 것이다.

또한 학생들이 수학에 대해 좀 더 흥미를 가지고, 친숙하게 다가갈 수 있게 될 것을 기대해 본다.

목 차

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성과 목적

수학이라는 학문은 인류의 역사가 시작되면서 인류와 함께 시작되고 발달되었다고 해도 과언이 아니다. 인간이 살아오면서 일상생활에서 직면하게 되는 문제를 해결하기 위하여 발전되고 이론화된 학문이 수학인 것이다. 따라서 문명의 발달은 수학의 발달과 더불어 이루어 진 것이라고 할 수 있으며, 인류는 실용적인 필요성에 의해서 수학을 시작하게 된 것이다.

수학이라는 학문이 처음 시작된 동기에서 짐작할 수 있듯이 수학은 현실과 동떨어진 학문이 아니다. 수학사를 살펴보면 수학은 자연에서 새롭고 다양한 문제를 발견하고 탐구하여 새로운 수학적 도구와 이론을 만들고 구성하여 어떤 문제든 해결할 수 있는 지식체계로 발전하였음을 알 수 있다. 이러한 과정에서 여러 수학적 지식과 이론들이 어떠한 동기에서 비롯되었으며, 사회적인 필요 욕구에 의해 수학자들이 많은 노력을 기울여 오늘날의 지식과 이론의 모습으로 학문이 체계화 되었는지 찾아 볼 수 있다.[1) 따라서 수학이라는 학문이 인류 문화 속에서 어떻게 발생되고 창조된 것인지를 알 수 있는 것이 수학사이다.

신지현(2003)은 수학사는 수학적 개념이나 알고리즘이 인간의 활동에 의해 발명되고 발견되어 개선되어 왔음을 인식시킴으로써 학생의 자발적인 수학적 활동을 강조하며 수학사를 수학 교육에 활용함으로써 수학은 절대적인 진리나 변할 수 없는 이론이 아니라 우리도 수학을 비판적으로 바라보고 새롭게 변화시킬 수 있다는 개방적인 생각을 가지도록 할 수 있다고 하였다.

1) 수학사랑 세미나팀. 수학사를 도입한 수업. 수학사랑 제2회 MATH FESTIVAL

대다수 학교 수학 수업에서 교사는 교과서적인 수학 내용과 평가 위주의 수업 활동에 치중하여, 계산 능력의 향상이나 단순 암기, 단편적 지식의 인지적인 영역을 강조하고 있다. 그로 인하여 대다수의 학생들은 수학의 실용성과 가치를 느끼지 못하고 있다.

교육부에서 발표한 우리나라 개정 교육과정에서는 수학과의 총괄 목표로 수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다고 제시하고 있다. 또한 그 내용을 좀 더 상세하게 다음과 같은 3개의 하위 목표로 구성하여 제시하고 있다.

가. 사회 현상이나 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 경험을 통하여 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다.

나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 사회 현상이나 자연 현상의 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기른다.

다. 수학에 대한 관심과 흥미를 지속적으로 가지고, 수학의 가치를 이해하며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

학생이 수학에 대한 긍정적인 태도를 가질 수 있도록 하기 위하여 수학 교수-학습에서는 학생들에게 친숙한 생활 주변의 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 소재를 적극적으로 활용하여 학생들의 관심과 흥미를 유발하는 것이 필요하다. 그러한 일환으로 교수-학습 방법에 있어서 수학사의 도입은 학생들에게 수학이라는 학문이 일상생활과 전혀 관련이 없는 딱딱한 과목이 아니라 실제 우리의 생활과 밀접하게 관련되어 있음을 깨닫게 하여, 수학에 대한 거부감을 해소 시켜 줄 수 있을 것이다.

학생들은 수학사를 통하여 수학이라는 학문이 처음부터 완성된 형태로 존재하던 것이 아니라, 수학자들의 시행착오와 노력의 결과로 체계화된

학문이라는 것을 알 수 있게 된다. 또한 수학 개념의 형성 배경이나 내용의 변천 과정을 이해하게 됨으로써 과거의 수학자들도 자신들과 똑같이 수학에 대한 어려움과 시행착오를 겪었음을 알게 되어, 수학이 딱딱한 학문이 아니라 인간적인 면모가 있는 학문이라는 사실도 깨닫게 되어 좀 더 수학에 대한 친밀감을 느낄 수 있게 된다.

이에 이 논문에서는 학교 수학수업에서 활용할 수 있는 수학사와 역사 속에서 찾아 볼 수 있는 수학 문제들을 소개하여, 학생들이 수학에 대한 흥미와 관심을 가지고 좀 더 친숙하게 수학을 학습할 수 있도록 하는데 목적이 있다.

2. 연구의 내용 및 방법

본 연구의 목적을 달성하기 위한 연구 내용 및 방법은 다음과 같다.

첫째, 수학사를 통한 교수-학습 방법에 대한 문헌 연구를 통하여 수학사적 배경과 역사 속에서의 수학 문제 등을 연구, 발췌한다.

둘째, 수학사를 실제 학교 수학수업에서 다양하게 활용할 수 있도록 단원별 교수-학습 지도안을 제시한다.

3. 연구의 제한점

본 연구의 제한점은 다음과 같다.

첫째, 본 논문은 중학교 수학교과에 적용 가능한 수학사를 도입한 수학교육으로 제한한다.

둘째, 본 논문은 중학교 수학과정을 5개의 단원으로 구분하여 단원별로 수학사 관련 자료를 연구하였다.

셋째, 수학사 관련 자료를 실제 학교 현장에서 적용해보지 못하여 실제

적인 효과는 알 수 없다.

넷째, 본 논문은 학생들의 흥미와 학습동기 유발을 위해 기존의 교과과정에 보조적으로 사용하여 학습 효과를 높일 수 있도록 하는데 목적이 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 역사 발생적 원리

수학의 역사 발생적 과정을 보면, 수학자들이 받아들이기 힘들어했던 수학적 개념과 현재 학생들이 어려워하는 수학적 개념이 일맥상통함을 발견할 수 있게 된다.

발생적 원리는 수학을 공리적으로 전개된 완성된 것으로 가르치는 형식주의의 결함을 극복하기 위하여 제기되어 온 교수학적 원리이다. 즉 발달의 개념을 수학교육학의 중심에 놓고 수학 학습지도의 문제를 발달에 대한 어떤 해석에 따라 구상하려는 것이며, 다시 말해, 발생적 원리란 수학을 발생된 것으로 파악하고 그 발생을 학습과정에서 재성취하게 하려는 것이다.(우정호 2002)

역사 발생적 원리는 수학을 '발생된 것'으로 파악하고 학생이 학습 과정에서 수학의 발생을 경험하게 하려는 원리로, 소크라테스(Socrates, BC 469~BC 399)의 산파법(産婆法)에 기원을 두고 있다. 산파술 혹은 대화법(對話法)으로 알려져 있는 소크라테스의 교육 방법은 플라톤의 '대화법' 중의 하나인 메논(Menon)편에 예시되어 있다. 소크라테스는 교육을 받지 않은 사동에게 질문만을 통해 아동 스스로 답을 이끌어 내도록 도와주는 과정을 보여 주고 있다. 여기서 소크라테스는 지식을 가르쳐 주거나 설명한 것이 아니라 단지 질문을 통하여 아동의 내재된 진리를 상기하도록 도와준 산파역을 하였을 뿐이라는 주장을 한다. 이러한 소크라테스식 산파법의 특징은 교사가 지도에 앞서 '사고실험'을 통해 모든 사고를 미리 거치는 세련된 학습-지도방법이며 아동의 사고활동을 무엇보다 중시하지만 주도권은 교사에게 있다는 것이다.

발생적 방법은 16세기 영국의 철학자 베이컨(Bacon)에 의해 제시되었고,

18세기에 아놀드(Arnauld, 1612~1694)와 클레로(Clairaunt, 1713~1765)가 기하학의 발생적인 교재 구성에서의 개척자적인 역할을 하였다. 18세기의 수학교육은 기본 원리인 정의·공준·공리를 수학의 논리적 존재론적 기초로 보고 수학적 지식을 연역하는 유클리드(Euclid)원론을 교과서로 하는 교육이 이루어지고 있었다. 아놀드와 클레로는 유클리드원론을 교육적 입장에서 비판하고, 대안적인 해석과 접근을 통하여 발생적 원리를 주장하였다. 아놀드의 <새 기하학 원론>은 시각적인 사물을 참조하는 접근방법을 통하여 개념과 정리의 재배열을 시도한 발생적 방법에 의해, 클레로의 <기하학의 원론>은 수학의 역사적 발달을 내용과 학습 활동의 조직에 이용한 역사 발생적 방법에 의해 구성이 시도된 첫 번째의 수학 교과서이다.

발생적 원리가 '역사-발생적 방법'이란 일반적인 교수학적 구상으로 명확히 드러난 것은 19세기 린더(Lindner)에 의해서였는데, 그는 발생적 방법을 다음과 같이 정의하고 있다.

우리는 다음과 같은 교수방법을 발생적 방법이라고 부른다. 즉 소재를 그 자연스런 순서에 따라 다루어, 간단한 것으로부터 합성된 것으로, 원인으로부터 결과에, 보다 작은 것으로부터 보다 큰 것으로, 쉬운 것에서 어려운 것으로 나아가되, 하나하나의 동인을 아주 주의해서 서로 결합하는 것이다.

특히, 린더는 발생된 순서에 따라 학생을 지도해야 한다고 생각했는데 이때 수학을 제일 먼저 지도해야 한다고 주장하였다. 발생적 원리에 입각한 학교교육의 구상은 19세기 중엽에 마그너(Magner)에 의해 이루어졌고, 19세기 후반에는 생물학적 발달 이론인 다윈(Darwin, 1809~1882)의 이론에 의해 새로운 변화를 일으키게 되었다. 이러한 변화는 다윈주의자인 헤켈(Haeckel, 1834~1919)이 형식화한 소위 '재현의 법칙' 이 19세기

말 일반적인 발달관념이 되었다는 것으로 잘 표현된다.[2] 20세기에 들어와 역사 발생적 원리는 수학교육 근대화 운동의 선구자 중 한 사람인 클레인(Klein,1849~1925)에 의하여 강조되고, 푸앙카레(Poincare, 1854~1912) 또한 역사 발생적 원리를 옹호하였다.

20세기 듀이(Dewey, 1859~1952)의 교육사상의 영향으로 지식중심에서 실천지향적인 아동의 활동 중심으로 바뀌면서 발생적 원리는 잠정적으로 종말을 맞이하게 된다. 그러다가 1960년대 새 수학에 대한 반성으로 발생적 원리가 재출현 하게 된다.

토이플리츠(Toeplitz, 1881~1940)는 역사 발생적 원리에 따른 미적분 교과서의 집필을 시도하였으며, 수학 교사 교육에서 중요한 것은 역사적 사실의 전달이 아니라 수학과 수학적 방법의 특성에 대한 바른 파악, 곧 태도의 전달이라고 보았다. 그는 수학적인 문제, 사실, 증명의 발생과 결정적인 계기의 교육적인 가치를 중시하였으며, 수학의 역사적 발달의 논리를 교수학적으로 번역하고자 하였다.

오늘날의 역사 발생적 원리는 여러 학자들에 의하여 여러 가지로 형식화 되고 있는데 그 중 하나가 프로이덴탈(Freudenthal)의 ‘안내된 재발명’이 있다. 그는 수학 교수-학습에서 교사의 주도 아래 수학의 역사적 발달과정을 단축된 형태로 재현하되, 선조들의 발명 과정을 현재의 학습자 상황에서 재해석하여 재발명할 것을 주장한다. 다시 말해 프로이덴탈이 주장하는 안내된 재발명은 학생들에게 이전에 존재하지 않았던 새로운 개념을 발명해 내도록 하는 교수방법을 의미하는 것이 아니라, 이미 발명된 개념을 그 개념이 발명되어 온 역사적 과정에 따라 다시 한 번 발명해 내도록 하는 교수 방법을 의미한다. 즉, 역사적으로 수학적 개념이 발달해 온 과정을 단축된 형태로 재구성 하여 그것을 학생들이 재현할 수 있도록 이끌어 주는 ‘역사 발생적 원리’에 따르는 교수방법을 의미하는 것이다.

2) 우정호, 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부, 2000

2. 수학사를 활용한 수학교육의 필요성

현재 수학교육에서 학생들의 문제점 중 하나는, 학업 성취도는 높지만 학생들이 왜 수학을 해야 되는지 깨닫지 못하고 막연하게 수학이라는 학문에 대한 거부감을 느끼며 어려워 한다는 것이다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 수학 교육에서 왜 수학사의 활용이 이루어져야 하는지에 대한 필요성을 여러 학자들의 견해를 통해 알아보기로 한다.

NCTM(1995)에서는 다음과 같이 수학사를 도입해야 하는 이유에 대해 언급하고 있다.[3)]

첫째, 역사는 동기를 부여한다는 것이다.

아동들은 아르키메데스에 대하여 들은 이야기를 생각하며, 기하학에 관해 공헌했음을 느끼게 되고, 수학의 매력을 느낄 수 있을 것이다.

둘째, 수학이란 인간의 노력의 산물이라는 것을 알게 한다.

기술의 발달에 의하여 요즘의 아동들은 수학이란 단지 계산기와 컴퓨터에 의해 해결되어지는 것으로 먼저 인식해버릴지도 모른다. 그들은 스스로 수학을 이해하거나 계산과정을 알아볼 필요가 없다고 생각할지도 모르며, 그 결과만 중시하게 된다. 그러나 문제해결은 아직 본질적으로 인간이 해야 할 과정이며 발견은 그 시대 사람들의 요구에 의해 생성되어 왔다는 것을 수학사를 통해 인식시킬 수 있다.

셋째, 수학이 사람들이 행하는 어떤 것이라면 그것을 행한 수학자들의 이야기들은 같은 것을 행하려는 다른 사람들을 고무시킬 수 있는 힘이 있다.

수학자들의 역경을 보면서, 그들의 삶은 열정적인 연구와 굳은 결심들의

---

3) Luetta Reimer & Wilbert Reimer(1995). Connecting Mathematics with its History : A Powerful, Practical Linkage NCTM. Connecting Mathematics across the Curriculum 1995 Yearbook, pp.104-114

힘에 의해 뚜렷이 나타난다는 것을 알 수 있다.

넷째, 수학적 개념이 어디에서 유래되었는지를 아는 것은 매우 중요하다.

수학적 아이디어의 기원을 이해하는 것은 학생들이 매우 어려워하는 내용이나 추상적인 수학적 절차를 이해하기 위해 더욱 효과적이며, 이러한 기원에 대한 일화들이 또 다른 새로운 영역에 대한 연구의 발판이 되기도 한다.

다섯째, 수학사의 도입은 문제해결을 위해 다양한 방법적 접근을 갖게 해준다.

자신의 경험에 의해서 이런 다양한 방법을 사용하여 얻은 계산 결과를 대부분이 사용하는 보통의 공식으로 얻어진 계산 결과와 비교해 볼 때, 그들은 문제를 해결하는 방법을 단 한가지로 제한하지 않는다는 것을 발견할 수 있다.

여섯째, 수학적 기원을 탐구하는 것은 종종 수학자체의 상호연관성을 위한 창을 열어주는 것이다.

일곱째, 과거의 수학사는 오늘날과 연관성을 갖게 한다. 수학사는 과거로부터 미래를 이어주는 다리가 된다.

허민(1997)은 수학교육에서 수학사 지도의 필요성을 다음과 같이 말하고 있다.[4)]

첫째, 수학교육의 유용성을 강조할 수 있다.

수학을 왜 배우냐고 묻는 학생에게 수학사를 통해 '수학은 필요에 의해 발생했다.'는 점을 확신시킬 수 있는 것이다.

둘째, 수학교육은 발전하는 학문임을 인식시킬 수 있다.

수업 중 수학사의 도입은 수학이 계속해서 변해 왔고 현재도 발전하고 있으며 앞으로도 더욱 발전할 것이라는 생각을 심어줄 수 있다.

---

4) 허민. 수학사와 수학교육, 수학교육 프로시딩 제 6집. 1997

셋째, 수학교육의 ‘인간화’를 도모할 수 있다.

부력의 법칙을 발견하고 시라쿠사거리를 발가벗고 뛴 아르키메데스, 역경 속에서도 연구를 게을리 하지 않은 아벨과 갈루아의 이야기는 성공의 환희와 함께 인간의 불굴의 의지를 보여주는 교훈적인 사례이며 학생들에게 감동을 줄 수 있다.

넷째, 현대 수학교육을 좀 더 친밀하게 이해시킬 수 있다.

현대 수학교육은 공리적 방법으로 체계화 되어 대단히 추상적이고 엄밀하게 전개된다. 중등학교에서 가르치고 있는 수학교육도 이런 추세를 따르고 있으며 조작보다는 개념의 이해를 강조하고 있다. 따라서 학생은 수학교육 학습을 포기할 수도 있다. 이런 경우 수학사는 현대 수학교육의 구조에 대한 이해를 도와 줄 수 있다.

다섯째, 수학교육의 문화적 가치를 인식시킬 수 있다.

수학을 가르치는 이유 중 중요한 하나가 수학교육의 ‘문화적 가치’이다. 수학교사는 수학이라는 인류 문화의 전달자이며 이런 문화를 학생들에게 전달하는 것은 교사의 책임이다.

여섯째, 수학교육 학습의 어려움을 이해시킬 수 있다.

수천 년 동안 발전해 온 인류의 역사와 함께 시행착오와 끊임없는 노력의 결과로 현재의 수학이 존재하고 있음을 알게 한다.

일곱째, 교수-학습 방법을 개선시킬 수 있다.

그 단원의 역사적 배경에 대한 수학사적 설명은 학생들에게 수학의 발전과정을 인식시키고 학습효과를 올릴 수 있다.

여덟째, 수학교육에 대한 흥미를 유도할 수 있다.

수업 중 간단한 역사적 사실과 일화를 소개함으로써 학생들의 흥미를 유발시킬 수 있다.

3. 수학사를 활용한 수학교육의 효과

수학사가 수학 교육에 적용되었을 때 어떤 역할을 할 수 있는지 알아보고, 수학교육에 수학사를 도입했을 때의 효과를 알아보기로 한다.

우정호(2002)는 수학사를 수학교육에 이용하였을 때의 이점을 다음과 같이 제시하고 있다.[5)]

첫째, 알고리즘적인 계산 수학을 반성하여 개념적 사고를 고취하는 데 이용 할 수 있다.

둘째, 교육과정 구성에서 '자연스러운' 내용 배열의 준거가 되며, 학습-지도에서 수학적 아이디어의 발달 과정을 따름으로써 자연스럽게 그 이해를 도울 수 있다.

셋째, 수학의 역사적 발달 과정에 소급해 봄으로써 수학적 사고의 인간적인 모습을 접해 보게 하여, 학습 동기를 유발하고 수학 학습에 생기를 불어넣을 방안을 찾을 수 있다.

넷째, 현대 기술 문명의 발달에서의 수학의 중심적인 역할과 수학의 문화적인 역할, 특히 인간관과 세계관 형성에 미친 수학의 역할을 이해함으로써 수학에 대한 학생들의 인식을 바꿀 수 있다.

유현주(1999)는 수학사를 수학교육에 도입하면 일반적으로 다음과 같은 이점이 있다고 하였다.[6)]

첫째, 알고리즘적인 계산수학을 반성해 볼 수 있는 기회를 제공하며 개념적 사고를 고취시킨다.

수학사를 도입함으로써 자동화되어 사용되는 수학적 절차가 어떤 직관적 근원에서 비롯되었으며 어떤 형식으로 정리되었는지를 살펴보게 되면,

---

5) 우정호. 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부. 2002
6) 유현주. 수학 교육에서의 새로운 평가 동향. 과학교육논문집. 1999

자동화 되어 당연시 여기는 수학적 아이디어를 재음미하여 보다 의미 있는 수학적 사고 활동이 가능하도록 해주는 데 큰 도움을 줄 수 있다.

둘째, 사용자의 편의를 위한 기성지식의 친절한 해석이 주를 이루고 있어서 학생들에게 탐구나 사고를 일으키기 어려운 교과서의 내용을 지도할 때 수학사는 학습에 생기를 불어 놓을 수 있는 흥미 있는 교재연구의 원천이 될 수 있다.

셋째, 수학사를 통해서 인류의 문화와 기술문명 발달에서 수학이 수행한 중심적인 역할을 이해하게 된다는 것이다.

수업시간에 지도하는 내용의 역사적 배경과 함께 인류 문명의 발달에 미친 수학의 결정적인 영향력에 대한 설명, 위대한 수학자의 생애와 그 업적에 대한 이야기를 자주 해줌으로써 수학의 중요성과 가치를 인식하게 된다.

넷째, 수학사를 보면 현재 중·고등학교 교과서에 나오는 문제에 대하여 교과서에 제시되어 있는 해결 방법 외에 여러 가지 다양한 해결방법을 찾을 수 있다.

다양한 각각의 방법들은 나름대로의 특징과 학생들에게 유익한 시사점을 줄 수 있으므로 학생들에게 틀에 박힌 문제 해결 방법에서 벗어난 다양한 방법들을 경험하게 할 수 있다.

다섯째, 교사의 수학사에 대한 지식은 수학 수업에서 학생들이 오류를 범하거나 이해하는데 곤란을 겪는 부분에 대해 민감하고 적절하게 대처할 수 있는 방법을 제공한다. 왜냐하면 수학 수업에서 발견되는 가장 심각하고 보편적인 오해나 실수들이 그 부분에 대한 수학의 역사에도 있었기 때문이다. 그러한 수학사에 대한 지식이 없다면 단지 학생들의 지적인 무능력 때문에 학생들이 오류를 보이거나 이해하지 못한 것으로 판단해 버릴 수도 있다. 그러나 수학사를 통해 그 배경이나 과정에서 나타난 어려움을 아는 교사는 그에 대한 학생들의 어려움을 이해하고 적절하게 대처할 수 있는 것이다.

김순애(2001)는 수학교육에서 수학사의 의의를 다음과 같이 말하고 있다.

첫째, 교사의 수학사 활용 교육은 수학교육의 교수-학습 과정에서 학생들이 오류를 범하거나 이해하는 것을 힘들어하는 분야에 대해 민감하고 적절하게 대처 할 수 있는 방법을 제공한다. 왜냐하면 수학 교육의 교수-학습 중에 발견되는 가장 심각하고 보편적인 오류나 실수들은 그에 대응하는 수학사의 역사에서도 볼 수 있다. 예를 들면 무리수의 발견이나 음수, 허수의 도입에 관한 이야기다.

둘째, 수학사를 활용한 수학 교육의 다양한 문제 해결 방법을 제공하여준다. 예를 들면 이차 방정식 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 의 근의 공식을 수학사에 나와 있는 다양한 방법으로 교수-학습 할 수 있다. 인도, 아랍인의 방법(완전제곱 꼴로 만드는 방법)과 Viete의 방법(이차 방정식을 3,4차 방정식의 해법에서 사용하는 방법), Harriot의 방법(인수분해 방법) 등으로 교수-학습하면 학생들에게 흥미와 동기 유발에 기여 할 수 있을 뿐만 아니라 이 다양한 문제 해결 방법은 학습자들에게 이해되기 쉽고 개념형성에 도움이 되는 교수-학습 방법이 될 수 있다.

셋째, 수학적 지식들이 어떤 의문과 동기를 가지고 형성되고 발전되었는지를 알 수 있으며 수학교육은 절대적인 진리나 변할 수 없는 이론이 아니라는 것을 알게 하는 비판적이고 개방적인 사고를 갖게 하는 데 도움을 준다.

Ⅲ. 본 론

1. 수와 연산

1) 집합의 역사

그리스 이래로 기원전 5세기 제논(Zeno)의 유명한 패러독스 이전까지 어떤 양을 무한히 쪼갤 수 있거나 또는 그것이 매우 많은 개수의 쪼갤 수 없는 극소량들의 합으로 이루어져 있다고 가정할 수 있는가에 대한 무한의 개념은 수많은 학자들의 논쟁거리가 되어왔다. 이에 대해 제논이 역설을 제기하면서 많은 학자들을 당황하게 만들었다. 제논의 패러독스 가운데 유명한 것은 앞에 도망가는 거북이를 아킬레스(Achiles, 아테네의 유명한 달리기 선수)가 잡을 수 없다는 것이다. 그의 이론에 따르면 아킬레스가 거북이가 처음 있는 점까지 가면 거북이는 이미 어느 정도 전진해서 좀 더 앞에 있게 되고, 또 그 점까지 가면 거북이는 이미 어느 정도 앞에 있게 된다. 이렇게 계속 전진해 나가면 아킬레스는 영원히 거북이를 잡을 수 없게 된다. 또 다른 역설로는, 공중을 날고 있는 화살은 그 위치에 순간적으로 정지하고 있으며, 이런 일들이 순간적으로 연속하여 일어나는 것이지 화살은 움직이지 않는다는 것이다. 제논의 패러독스의 영향으로 무한소가 그리스 논증기하학에서 배제되었다. 하지만 그의 패러독스는 무한에 대해서만 시사했을 뿐, 결국 이해되지 않은 채로 19세기에 도달하게 된다.

무한의 성질을 규명하기 위하여 칸토어(Georg Cantor, 1845~1918)는 1872년의 논문에서 '집합이란 확정되어 있고 또 서로 명확히 구별되는 모임' 이고, '두 집합 사이에 일대일의 대응 관계가 성립할 때, 두 집합의 농도는 같다.' 고 정의하였다. 그는 유한집합의 '개수'에 대응하는 무한집

합의 ‘농도(cardinality)’를 도입하고, 두 집합의 원소 사이에 일대일 대응이 존재하면 두 집합은 같은 농도를 가진다고 정의하였다. 즉, 무한을 다루는 방법으로 원소의 개수를 하나하나 비교하는 일대일 대응을 이용하여 무한을 셈하는 집합론을 세우게 된 것이다. 이로서 그는 자연수와 유리수의 개수가 같고, 자연수와 실수는 그 개수가 같지 않음을 밝혀냈다. 그는 이를 바탕으로 무한을 셈하는 무한에 관한 연산과 그 밖에 성질들도 밝혀냈다.

칸토어의 집합에 대한 이론은 현대 수학에 많은 영향을 끼쳤다. 집합론은 실수의 구조, 해석학의 연속이론, 수리 논리학 등의 연구를 위한 수학적 도구로서, 또한 현대 수학의 기초학문으로 중요한 위치를 차지하게 되었고, 오늘날에는 집합론의 기본 개념 없이는 경제 이론, 사회 이론, 과학 이론의 설명이 거의 불가능하게 되었다.[7)]

2)집합의 예화 자료

(1)무한호텔

‘힐베르트의 호텔’ 이라고 불리는 이 유명한 이야기는 힐베르트가 종업원으로 일하고 있는 가상의 호텔에서 시작된다.

이 호텔에는 무한개의 객실이 있다. 어느 날 한 손님이 호텔로 찾아왔는데, 객실이 무한개가 있음에도 불구하고 방마다 투숙객들로 가득 차 있었으므로 빈 방을 내줄 수가 없었다. 그런데 호텔 종업원인 힐베르트는 잠시 생각하던 끝에 새로 온 손님에게 빈방을 마련 할 수 있노라고 호언장담을 한다. 그는 객실로 올라가 모든 투숙객들에게 정중하게 부탁을 한다.

“죄송하지만 손님들께서는 옆방으로 한 칸씩만 이동해 주시기 바랍니

7) 우정호 외. 중학교 수학 교사용 지도서. 두산동아(주)

다.”

이해심 많은 손님들은 힐베르트의 부탁을 잘 들어 주었다. 1호실 손님은 2호실로, 2호실 손님은 3호실로... 잠시 뒤 이동은 끝났다. 기존의 투숙객들은 모두 옆방으로 옮겨갔으며, 자기 방을 못 찾아 헤매는 사람도 없었다. 그리고 새로 온 손님은 비어 있는 1호실로 여유 있게 들어갔다. 이것은 무한대에 1을 더해도 여전히 무한대임을 말해 주는 좋은 예이다.

그런데 다음 날 밤, 호텔에는 더욱 곤란한 문제가 발생했다. 투숙객이 방을 모두 점거하고 있는 상태에서 무한히 긴 기차를 타고 온 무한대의 손님들이 새로 도착 한 것이다. 힐베르트는 당황하기는커녕, 무한대의 숙박료를 더 받을 수 있다고 혼자서 쾌재를 부른다. 그는 곧 객실에 안내방송을 내보냈다. “손님 여러분, 죄송하지만 현재 묵고 계신 객실 번호에 2를 곱하셔서, 그 번호에 해당되는 객실로 모두 옮겨 주시기 바랍니다. 감사합니다.”

이리하여 1호실 손님은 2호실로, 2호실 손님은 4호실로.. 모두 이동을 마쳤다. 자기 방을 빼앗긴 손님이 하나도 없는데도, 어느새 호텔에는 무한개의 빈 객실이 생긴 것이다. 힐베르트의 재치 덕분에 새로 도착한 무한대의 손님들은 홀수 번호가 붙어있는 무한개의 객실로 모두 배정되어 편히 쉴 수 있었다. 이것은 무한대에 2를 곱해도 여전히 무한대임을 말해주고 있다.

(2) 이발사의 모순

러셀(Russel, 1872~1970)이 1903년 발표한 모순에 관련된 내용 중 다음과 같은 것이 있다.

“자기 자신에 속하지 않는 모임인 전체의 모임 S를 생각해 보자. S 는 어디에 속할까? 만약 S가 S에 속한다면, S의 정의에 의하여 S는 S에 속하지 않아야 한다. 만약 S가 S에 속하지 않는다면 마찬가지로 S의 정의

에 의하여 S는 S에 속해야 한다."

이러한 러셀의 모순은 1918년 러셀 자신에 의해 대중적인 형태로 표현되었는데, 이것은 이발사의 모순으로 잘 알려져 있다.

어느 마을에 들린 한 나그네가 그 마을에 있는 이발사에 그의 경쟁상대가 있는지를 물었다. 이발사는 이렇게 대답했다.

"아닙니다. 경쟁 상대는 없습니다. 이 동네 사람들 중에서 스스로 수염을 깎는 사람 외에는 모두 내가 수염을 깎아 줍니다."

이 답변을 들은 나그네는 "이 이발사가 자신의 수염을 스스로 깎을까?" 하는 궁금증이 생겼다.

먼저 이발사가 스스로 면도를 깎는다고 하자. 그러면 이 이발사는 자신의 수염을 스스로 깎는 사람에 대해서는 면도질을 안 하기 때문에 결국 그는 자신의 수염을 자신이 깎지 않는 셈이 된다. 그렇다면 그가 자신의 면도를 하지 않는다고 해 보자. 그러나 이 이발사는 스스로 수염을 깎지 않는 사람에 대해서는 모두 면도해 주기 때문에 결국 그는 자신의 수염을 깎는 셈이 된다. 참 이상한 일이 벌어진 것이다. 이발사는 가엾게도 자신의 수염을 깎을 때는 깎지 않고, 깎지 않을 때에는 깎는다는, 이러지도 저러지도 못하는 상황인 것이다.

3) 음수의 역사

역사적으로 19세기에 이르기까지도 수 개념을 크기, 개수, 길이, 넓이 등의 양적인 관념과 떼어서 생각할 수 없었기 때문에 음수 개념을 하나의 '수' 로서 받아들이는데 많은 어려움을 겪었다.

고대 그리스의 디오판토스(Brahmangupta, 598~665)는 양수와 음수의 부호에 관한 계산 법칙을 서술하였지만 이차방정식의 풀이에서는 음수를 해로 인정하지 않았다. 인도인들은 음수와 무리수를 인정하였으며 이차방

정식이 (실근을 갖는 경우) 두 개의 근을 갖는다는 사실을 이미 깨닫고 있었다. 고대에 음수를 이해하고 있었던 곳은 중국뿐인 것 같다. 중국에서는 기원전 2~3년경의 진·한(秦·漢)시대에 쓰여진 <구장산술(九章算術)>이라는 책에서 양수와 음수를 사용하고 있으며, 중국의 수학자 이야(李冶, 1192~1279)는 음수에 대한 표기를 소개한 사람으로 중숙식의 막대 수체계로 수를 썼을 때 맨 오른쪽 자릿수를 대각선으로 획을 그어서 음수를 표현했다.

아랍으로부터 유럽으로 전해진 음수는 15세기 쉬케(Nicolas Chuqet), 16세기 슈티펠(Stifel, 1487~1567)에 의하여 엉터리 수로 불리어졌다(Kline, ibid).

16세기경 유럽에서 음수가 사용된 증거는 이탈리아의 수학자 카르다노(Girolamo Cardano, 1501~1576)가 1545년에 출판한<Ars magna>에서 찾아 볼 수 있다(Gullberg, 1997). 그러나 그 당시 유럽의 수학자들은 음수를 인정하기를 거부하였는데 데카르트(Descartes, 1596~1650)는 음의 근을 '거짓 근' 이라 불렀고, 파스칼(Pascal, 1623~1662)은 '0보다 작은 수'는 존재하지 않는다고 말하였다.[8] 당시 수학자들은 다음과 같은 의문을 가지고 음수를 받아들일 수 없다고 생각하였다.

① 작은 수에서 큰 수를 빼는 것이 어떻게 가능한가?

② -3은 2보다 작은데 $(-3)^2$은 2^2보다 크다. 작은 수의 제곱이 어떻게 큰 수의 제곱보다 클 수 있는가?

③ $(-4)\times(-5)=20$임을 인정하면 $1:(-4)=(-5):20$이 된다. 더 큰 수와 더 작은 수의 관계가 어떻게 더 작은 수와 더 큰 수의 관계와 같을 수 있는가?

④ $(-4)\times 3=(-4)+(-4)+(-4)$임은 직관적으로 인식할 수 있다. 예를 들면 4 달러를 세 번 빌린 것으로 생각하면 결국 12달러를 빌린 것이다. 그러나 $4\times(-3)$은 직관적으로 아무 의미가 없다.

8) 최병철. 음수지도의 교육학적 고찰. 서울대학교 대학원. 2002

당시 수학자들이 음수를 받아들일 수 없었던 근본적인 이유는 수 개념을 구체적인 대상의 크기와 연결하려는 관념에서 비롯된 것인데, 이는 허수(Imaginary number)를 받아들이는 것과도 관련된 문제였던 것이다.

음수와 허수 개념은 그것이 완전한 수 개념으로 정립되는 것과 관계없이, 그 자체의 실용적인 유용성으로 인하여 많은 수학자들에 의해 계속 사용되어 왔다. 그러한 음수 체계의 확립이 완전한 성공을 거둔 것은 19세기 독일의 수학자 한켈(Hankel, 1839~1873)에 의해서였다. 한켈은 음수가 어떤 구체적이고 실제적인 것을 나타낸다는 관점을 버리고 형식적인 구조만으로 음수를 이해하였으며, 음수를 설명하는 구체적인 모델을 더 이상 찾지 않았던 것이다. 그는 단지 양수 체계를 구성하는 여러 가지의 원리들이 그대로 유지되도록 하면서 음수 체계를 확장하였고, 이렇게 얻은 음수의 구조가 대수적으로 모순이 없다는 것만을 보였다. 이렇게 함으로써 비로소 음수는 구체적인 모델과 독립된 수학적 개념으로서 지위를 인정받을 수 있게 되었다.[9)]

9) 김남희 외5. 수학교육과정과 교재연구. 경문사. 2007

2. 문자와 식

1)방정식의 역사

방정식(方程式)이라는 말의 유래를 보면 BC 1세기경 중국 <구장산술(九章算術)>제 8권에 '방정'이라는 장이 있는데 이것이 방정식의 어원이다. 여기서 '방(方)'이란 네모 또는 사각을 뜻하는 말이고, '정(程)'은 할당한다, 재어본다는 뜻으로서 '4각으로 할당 한다'는 뜻이라고 한다. 이는 문제를 풀 때, 연립일차방정식의 각 항의 계수를 계산판에 산대로 나열한 다음 가감법으로 푸는 것이 소개되는데 이와 같이 계수를 늘어놓은 것을 '방정'이라고 불렀다(우정호,1998).

(1) 고대 바빌로니아

문자를 최초로 발명한 것은, 지금부터 수천년 전(기원전 4000년~3000년)의 메소포타미아 지방의 슈메르(Sumer)인들이었다고 한다. 진흙판에 쐐기 문자로 글을 남겼는데 지금까지 발견된 약 50만개의 진흙판 중의 약 300개가 수학에 관한 것으로 일차방정식의 해법 따위는 장기 중의 장기였다. 따라서 일차방정식 같은 것은 너무 초보적이어서 주목할 만한 값어치도 없다고 생각했기 때문인지 이차방정식 등의 해법에 대한 기록은 많은데도, 일차방정식의 해법을 기록한 것은 그리 많지가 않다.[10)]

(2) 이집트

바빌로니아의 진보된 경제적 발전으로 인하여 고대 이집트의 수학은 바

10) 양경란. 방정식을 중심으로 본 중등수학과 수학사와의 연계성에 관한 고찰. 명지대학교 교육대학원. 2005

빌로니아 수학의 수준에는 미치지 못하였다. 이집트의 대부분의 수학 문제는 체계적이고 이론적인 문제보다는 대부분의 문제가 단순한 생활의 지혜와 관련된 실용적인 성격을 갖고 있기는 하지만 이론적 성격을 갖고 있는 문제도 몇몇 존재한다.

피라미드가 건설된 것은 기원전 2800년경으로 피라미드의 건설에는 고도의 수학이 필요한데, 그 때 방정식을 사용하였을 것으로 예상된다. 실제로 이집트에서 만들어진 가장 오래된 수학서인 <아메스의 파피루스>가 있는데 BC 1650년경 신관 아메스가 그 전부터 알려져 있던 수학에 관한 지식을 파피루스에 기록한 수학책으로 판독하였다. 또한 <린드 파피루스> 와 <모스크바 파피루스>에 있는 110개의 문제는 실용적인 기원을 보여주고 있는데, 이를테면 빵과 맥주의 농도라든가 가축들의 먹이 혼합, 곡식의 저장과 같은 문제에 관한 것이었다. 이 중 가장 많은 것이 간단한 1차방정식에 관한 문제인데 그것은 일반적으로 나중에 유럽에서 임시위치법(臨時位置法, rule of false position)으로 알려진 방법에 의하여 풀렸다.[11]

(3)중국

동양에서 가장 오래된 수학 고전인 <구장산술(九章算術)>은 중국의 진나라, 한나라 때 사용되던 산술서가 후한시대에 모습을 갖추게 된다. <구장산술(九章算術)>에는 해법이 주어지긴 했지만 그리스식의 어떤 증명도 찾아 볼 수가 없다. 또한 누가 집필하였는지에 대해서는 알려져 있지 않고, 지금은 236년에 삼국시대 위나라 사람인 유휘(劉徽)가 주석을 붙여 펴낸 <구장산술(九章算術)>이 전해 내려오고 있다.

이 책은 특히 관리들이 실무적인 일을 처리하는데서 생기는 여러 가지 문제들과 수학지식을 집대성 정리하여 방전, 속미, 쇠분, 소광, 상공, 균

11) H.Eves저 . 수학사. 경문사

륜, 영부족, 방정, 구고장 등의 9장 246개의 문제를 싣고 있다. 그 중 8장의 <방정(方程)>의 장에서 오늘날 행렬법으로 불리는 방식에 의하여 풀리는 다원 연립1차방정식을 푸는 문제를 포함하여 모두 18문제가 있다. 또한 여기서는 음수도 취급하고 있는데 유럽에서 음수를 취급한 것이 17세기인 것을 비교하면 훨씬 이전에 양수와 음수가 섞여 있는 계산을 하였음을 알 수 있다.

(4)인도

고대 인도의 수학은 정확한 기록 부족으로 인하여 별로 알려진 것이 없지만, 수학을 연구했던 인도인들은 근본적으로 스스로를 수학자로 생각하여 주로 천문학에 관한 수학이 발달되었다. 따라서 기하학의 발달 보다는 대수에 중요한 공헌을 하게 된다.

인도인들은 음수와 무리수를 인정했으며 2차방정식이 (실근을 갖는 경우) 두 개의 근을 갖는다는 사실을 이미 깨닫고 있었다. 그들은 제곱을 푸는 눈에 익은 방법으로 2차방정식의 대수적 해를 통일시켰다. 오늘날 이 방법을 '인도해법'이라고 부르기도 한다. 바스카라는 다음의 주목할 만한 두 항등식을 만들었다.

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{(a + \sqrt{a^2 - b})/2} \pm \sqrt{(a - \sqrt{a^2 - b})/2}$

이 항등식은 현재의 대수 교과서에도 이항 무리수의 제곱근을 구하는데 이용되고 있다. 인도인들은 부정해석학 분야에서 탁월할 능력을 보여주었는데, 디오판투스는 부정방정식에서 한 유리해를 구했지만 인도인들은 그와는 달리 모든 가능한 정수해를 찾으려고 노력하였다. 아리아바타와 브라마굽타는 부정 1차방정식 $ax + by = c$(단,a,b,c는정수) 의 정수해들을 구했다. 부정 2차 방정식 $xy = ax + by + c$ 는 나중에 오일러(Euler, 1707~1783)가 재발명한 방법에 의해 풀렸다. 소위 '펠(Pell) 방정식' 이라

불리는 $y^2 = ax^2 + 1$(단,a는비제곱상수)에 관한 브라마굽타와 바스카라의 연구는 몇몇 사람에 의해 높이 평가되고 있는데, 그들은 어떻게 하면 하나의 해 x,y(단,$xy \neq 0$)로부터 무한히 많은 해를 구할 수 있는가를 보여 주었다. 펠 방정식에 대한 환전한 이론은 1766~1769년 사이에 라그랑주(Lagrange)에 의해 완성되었다.[12]

2) 방정식의 예화자료

(1) 벌떼 문제

벌떼의 5분의 1은 카단바꽃에, 3분의 1은 시리도라꽃에, 그들의 차의 3배의 벌들은 현죽도꽃으로 날아가네. 나머지 한 마리의 벌은 케다키의 향기와 쟈스민의 향기에 빠져 허공에 맴돌고 있네. 벌떼는 얼마나 될까?

벌이 x마리라 하면

$x = \frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 3(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}) + 1$ 이라는 식이 성립된다.

이것을 풀면 $x = 15$ 가 얻어진다.

이 문제는 바스카라 2세(1113?~1185?)의 저서 '리라바티'에 나오는 문제이다. 바스카라에겐 딸이 있었는데 어느 날 점성가가 그녀는 결혼하면 안된다고 예언하였다. 그러는 바스카라는 자신의 딸이 행복하게 결혼하기를 바라는 마음에 컵의 바닥에 작은 구멍을 뚫어 물에 띄어놓았다. 컵의 바닥에는 구멍이 있었기 때문에 컵은 가라앉게 되어 있었지만, 호기심에 찬 바스카라의 딸이 그 컵을 들여다보는 사이에 딸이 입고 있던 옷에서 진주가 떨어져 그 컵의 구멍을 막아버렸다. 결국 컵은 시간이 지나도 가라

12) H.Eves저 . 수학사. 경문사

앉지 않게 되어 그녀는 결혼할 수 없는 운명이 되어버린 것이다. 바스카라는 불쌍한 딸을 위해 '리라바티'라는 책을 쓰게 된 것이다.

(2) 여행자 문제

어떤 여행자가 아침 6시에 여관을 나갔다. 여행자의 속도는 하루에 300리의 속도이다. 그 여행자의 분실물을 발견한 여관의 주인은 그 분실물을 갖고 오전 10시에 여행자의 뒤를 쫓아갔다. 여행자에게 분실물을 전단하고 곧 집으로 향하였으나, 집에 도착한 시간은 오후 3시였다. 주인의 속도는 하루에 몇 리일까?

여행자는 하루 n 시간에 300리의 속도, 주인은 x리의 속도이다.

주인이 집을 나설 때, 여행자는 $4\times\dfrac{300}{n}$ 리 앞에 가고 있고, 주인은 여행자를 1시간에 $\dfrac{x-300}{n}$리씩 쫓아가게 된다. 주인이 5시간 뒤에 집으로 돌아왔으므로, 출발한 지 $\dfrac{5}{2}$시간 뒤에 여행자를 따라 잡은 것이 된다.

따라서 $4\times\dfrac{300}{n}=\dfrac{x-300}{n}\times\dfrac{5}{2}$ 이고, $x=780$이다.

이 문제는 중국의 수학서 <구장산술(九章算術)>에 나오는 방정식의 문제이다.

3. 함수

1) 함수의 역사

함수 개념에 관한 기원은 '함수' 라는 단어가 라이프니츠(Leibniz, 1646~1716)와 베르누이일가(Bernoulli) 사이의 서신에서 등장했던 그때부터가 아니라, B.C 2000년 경까지도 거슬러 올라갈 수 있다. 예컨데, B.C 2000년 경의 바빌로니아 사람들은 $n = 1,2,3,\cdots,30$일 때 $n^3 + n^2$ 의 값을 나타내는 표를 사용했는데 E.T.Bell은 이것이 바로 n과$n^3 + n^2$ 사이의 대응이라는 함수의 '실행적인 정의(working definition)' 를 암시한다고 주장했다. 그러나 이와 같은 역사는 사실상 함수 개념의 역사라고 볼 수 없다.[13]이러한 함수의 개념은 바빌로니아 시대부터 존재하였지만 그것은 단지 직관적인 관념일 뿐 함수가 무엇인지에 대한 논의는 없었기 때문이다. 따라서 함수의 역사를 좀 더 엄밀하게 말하면, 명시적으로 함수라는 용어를 사용하고 수학적으로 다루어진 17세기 이후부터의 함수 개념을 함수의 역사라고 볼 수 있을 것이다.

함수에 대한 구체적인 개념화는 운동을 나타내는 곡선을 기하학적으로 기술하는데 시작되었다. 니콜 오렘(Nicole Oresme, 1323~1382)은 등가속하는 물체의 운동을 나타내기 위한 방법으로 속도와 시간을 기준으로 삼은 그래프를 그렸다. 그는 수평선 직선 위에 시간의 각 순간을 표시하고 이들 각 순간의 속도를 수평선에 수직인 선분의 길이로 표현하였다. 이러한 그래프적 표현은 함수 개념이 제대로 인식되기 전이었던 17세기에 어떤 기준이 되는 양에 대한 다른 양의 변화를 기술하기 위한 곡선이었다.[14] 이와 같이 운동을 나타내는 곡선을 중심으로 함수에 대한 연구가 진행되는 과정에서 함수에 대한 정의가 필요하게 되었는데, 라이프니츠

---

13) 박교식. 함수개념의 역사적 발달에 관한 연구. 科學數學教育年報. 1993
14) 수학사랑. 함수 개념의 역사 4,5월호 p47~48. 2001

(Leibniz, 1646~1716)는 '곡선상의 한 점에 접선의 길이, 접선, 법선의 길이, 법선 등을 구하는 일을 함수(functio: Relatio)'라고 하고, 이런 것들의 좌표에 따른 변화를 관찰하였다.(Steiner, 1988) 이 시기의 함수 개념은 여러 가지 운동을 양적으로 수학화 하려는 것에서 발생한 것으로 운동을 나타내는 곡선과 관련해서 개념화되었다는 점에서 기하적 함수라고 볼 수 있다. 이와 같이 기하적 함수는 운동을 그래프로 표현하고 그 결과로 나타나는 곡선들에 대한 탐구로 미적분의 발달과 불가분의 관계 속에서 발생했다고 볼 수 있다.

함수를 대수적으로 연구하는 관점의 변화는 18세기에 본격적으로 이루어 졌는데, 오일러(Euler, 1707~1830)는 1748년 <무한소 해석의 입문(Introduction in analysin infinitorium)>에서 함수론에 대해 체계적으로 서술하고 $f(x)$라는 기호를 처음으로 사용하였다. 코시(Caucy, 1789~1857)는 오일러와 같은 입장에서 함수를 취급할 때가 많았으나, 코시의 함수의 정의는 오일러의 정의와는 다르게 '해석적인 식으로 나타내어진다.'라는 조건이 없고, 변수 사이의 관계, 곧 대응으로 간단히 규정을 짓고 있다.[15)]

디리클레(Dirichlet, 1805-1859)는 '두 변수 x, y에 있어서 x의 값을 정하면 그에 따라서 y의 값이 정해질 때, y는 x의 함수이다.'라고 함수를 정의하여, 라이프니츠의 함수에 대한 개념을 뒤덮고 함수는 식 표시 이전의 것이라는 데에 처음으로 주목하였다. 그는 분명히 y를 식으로 나타낸다는 종래의 입장을 벗어나 대응이라는 개념을 강조하게 되고, 이는 오늘날 학교에서 쓰는 함수의 정의와 거의 유사한 개념을 나타내고 있다.

19세기 중엽까지는 미적분을 포함한 해석학이 발전하면서 해석학의 기초가 되는 실수의 구조를 엄밀하게 하려는 노력이 생기게 되었고, 이러한 노력이 집합적 함수 개념을 형성하는 계기를 마련하게 된다. 그로 인해 칸토르(Cantor, 1845~1918)가 집합론을 정립하게 되고, 그 영향으로 데데킨트(Dedekind, 1831~1916)가 처음으로 집합론적인 함수 개념을 충분히

15) 강옥기. 제 7차 교육과정에 따른 중등수학 교재연구. 경문사. 2006

파악해서 함수개념을 정의하게 된다.

부르바키(Bourbaki)는 1939년에 ‘두 집합 A,B가 있을 때 모든$x \in A$ 에 대하여 x와 주어진 관계가 있는 $y \in B$가 꼭 하나 있으면 그 관계를 함수 관계’라 정의함으로써 함수를 순서쌍의 집합의 부분집합으로 정의하기도 하였다.

2) 함수의 예화자료(데카르트의 좌표)

데카르트(Rene Descartes, 1596~1650)는 어려서부터 몸이 약해 아침에 늦게까지 침대에 누워 있는 일이 많았는데, 그게 그의 평생 습관이 되어 나이가 들어서도 아침 늦게까지 침대에 누워 있는 버릇이 길러졌다. 그는 침대에서의 명상 시간을 가장 생산적인 시간으로 여겼는데, 이때의 명상이 그의 수학적 사고에 많은 영향을 미쳤다고 한다.

그러던 어느 날 침대에 누워 명상을 하다가 천장에 붙어 있는 파리를 보고 파리의 위치를 나타내는 일반적인 방법을 찾으려고 애쓰다가 ‘좌표’라는 발상을 하게 된다. 파리가 움직이면 x의 값이 변하면서 y의 값도 따라서 변하게 된다. 만약 파리가 x축, y축이 만든 직각의 이등분선을 그리며 움직인다면 이 직선은 ‘$y=x$’라는 식으로 간단히 나타낼 수 있는 것이다.

4. 확률과 통계

1) 확률

(1)확률의 역사

확률개념의 자취는 인도, 바빌로니아, 이집트의 고대 문명에서 찾아볼 수 있다. B.C.3500년경에 쓰여 진 가장 최초의 물건은 주사위로 쓰인 양의 뒤꿈치에 있는 복사뼈였다. B.C.3000년경 바빌론에서 사용된 잘 구워진 담황색 도기로 만들어진 정육면체는 거의 완벽한 주사위였다. 종교의식에서, 심판을 예언하기 위하서 주사위를 던지거나 항아리에서 공을 꺼내는 등 확률적 행위가 행하여졌다고 한다.[16)]

확률론이 학문으로 개념화가 될 수 있었던 실질적인 출발은 1654년 드 메레(Chevalier de Mere)가 친구인 파스칼(Blaise Pascal, 1623~1662)에게 다음과 같은 문제를 내는 것에서 시작되었다.

주사위를 여덟 번 던져 1의 눈이 나오면 이기는 놀이가 있다. 그러나 세 번 실패한 뒤에 그 놀이는 중단되었다. 이 때 놀이자는 어떻게 포상 받으면 좋은가?

파스칼은 이 문제에 관해서 페르마에게 편지를 썼고, 두 사람의 편지 교환이 현대 확률론의 출발이 되었던 것이다. 그러나 파스칼도 페르마도 그 결과를 자세하게 쓰지 않았으나 파스칼은 확률의 연구를 삼술삼각형에 연결하여 새로운 성질을 밝히고, 페르마와 그 밖의 다른 사람들과 함께 귀납적 추론의 발전에 기여했다.

호이겐스(Huygens, 1629~1695)는 파스칼의 아이디어를 이용하여 확률에 대한 <주사위 던지기에 대하여(De ludo aleae)>라는 논문을 처음으로 작성하게 된다. 하지만 그의 논문은 아주 간단한 문서에 지나지 않았다는

16) 최재옥. 고등학교 확률과 통계 단원의 역사발생학적 분석. 울산대학교 교육대학원. 2006

사실 때문에 1713년 출판된 베르누이(Bernoulii, 1707~1783)가 저술한 논문인 <추측술(Ars conjectandi)>이 확률론에서의 최초의 실질적인 책이 된다. 그 후 오일러(Euler, 1707~1783), 라플라스(Laplace, 1749~1827), 가우스(Gauss, 1777~1855) 등의 노력으로 확률론은 급속히 발전해 나갔다.

그러나 아직까지도 확률의 정의가 불충분한 관계로 20세기에 들어와 수학자들의 연합된 노력의 결과로 1930년대에 출반된 콜모고로프(Kolmogorov)의 확률론의 기초라는 책에서 엄밀한 공리론적 토대 위의 공리적 확률을 정의하기에 이른다. [17]

(2) 확률의 예화 자료

a. 노름 문제

실력이 똑같은 A와 B 두 사람이 노름을 하였다. 그 노름을 6번 먼저 이긴 사람이 노름돈을 전부 갖기로 약속하였다. 그런데 A가 4회, B가 3회 이겼을 때, 사정이 생겨서 시합을 중지할 수밖에 없었다. 노름돈은 어떻게 분배하는 것이 공평한가?

8회전 이후 시합이 계속되어 A가 이길 수 있는 것은

① 8회전, 9회전을 연승할 때

이때의 확률은 $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ 이다.

② 8회전, 9회전이 1승1패이고, 10회전에서 이겨 승패를 결정할 때

2가지 경우가 있으므로 이때의 확률은 $(\frac{1}{2})^3 \times 2 = \frac{1}{4}$ 이다.

③ 8회전, 9회전, 10회전을 A가 1승2패로 11회전에서 승패를 결정할 때

---

17) 전상표 논문집. 확률 역사를 이용한 확률 교육에 대하여(On the Probability Education using of the Probability History). 2005

3가지 경우가 있으므로 이때의 확률은 $(\frac{1}{2})^4 \times 3 = \frac{3}{16}$ 이다.

결국 A가 이길 확률은 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$이고, B가 이길 확률은 $\frac{5}{16}$이다.

이 문제는 레오나르도 다빈치의 친구인 파치오리의 책에 나와 있는 것으로, 파치오리는 4:3으로 나누는 것이 좋다고 생각하였다. 정확한 해답을 푼 것은 이로부터 150년 정도 후에 파스칼과 페르마가 해결하게 되었다.

b. 파스칼의 도박문제

파스칼이 생전에 사귀었던 친구 중에는 도박사인 드 멜레가 있었다. 이 도박사는 도박을 할 때 수학적으로 생각하여 상당한 이익을 보았다. 어느 날 그는 도박에 관하여 궁금한 점이 생겨 파스칼에게 편지를 보내 물어 보았다.

“솜씨가 서로 비슷한 A, B 두 사람이 32피스톨씩을 걸고 내기를 하고 있었다. 승부에서 1번이 이기면 1점을 얻고, 먼저 3점을 얻은 사람이 내기 돈 64피스톨을 몽땅 갖기로 했다. 지금 A가 2점, B가 1점을 딴 시점에서 어떤 사정으로 부득이 시합을 중지하게 되었다면, 64피스톨을 어떻게 분배하는 것이 가장 합리적일까?”

파스칼인 생각 끝에 이런 답변을 보냈다.

“다음 한 판을 더해서 A가 이긴다면, A는 3번 이긴 것이므로 64피스를 가지게 된다. 만약 B가 이긴다면 A가 2번, B가 2번 이긴 셈이므로 비기게 되어 32피스톨씩을 나누어 가져야 한다. 즉 A는 이기건 지건 32피스톨을 가지게 되어 있다. 나머지 32피스톨은 A나 B중 이기는 사람 몫이 되겠지만 누가 이길지 모르므로 이기고 지는 것은 반반이다. 그러므로 A에게 32피스톨을 먼저 주고 그 나머지의 반인 16피스톨을 더 주면 된다. 결과적으로 A는 48피스톨 B는 16피스톨을 가지면 된다.”

파스칼의 계산법을 현대의 확률로 설명해 보자.

A가 게임에서 이길 확률을 계산해 보면, 바로 다음 승부에서 이길 확률이 $\frac{1}{2}$이고, 다음 승부에서 지고 그 다음 승부에서 이길 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이다. 결국 A 가 이 게임에서 이길 확률은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 이다.

B가 이기려면 연이어 두 번을 이겨야 하므로 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 이다.

그러므로 A : $64\times\frac{3}{4}=48$

B : $64\times\frac{1}{4}=16$ 으로 분배하는 것이 옳다.

2) 통계

(1) 통계의 역사

예로부터 국가가 징세, 징병, 다른 어떤 목적을 위해 호적이나 토지대장을 만들어 이것을 근거로 통계를 작성한 것을 통계학의 기원이라고 할 수 있다. 우리나라에서 통계에 관련된 최초의 문서는 <신라장적(新羅帳籍)>으로 당시의 국세 조사에 관한 기록이 있다. 중국에서는 전한말기(前漢末期) 이래 '호수인구수(戶數人口數)'라는 기록이 남아있다. 또한 로마시대에는 과세의 목적과 군사적인 징병 목적을 위해 인구 조사를 하였는데 이를 '센서스(census)'라고 불렀다. 이는 과세한다는 뜻인 라틴어인 censere로부터 유래된 것으로 오늘날 영어로 인구 조사라는 뜻을 가진 'census'의 어원이다. 통계학을 뜻하는 영어인 'statistics' 는 라틴어로 '국가'를 가리키는 'status'가 그 어원이다.

통계학이 학문으로 확립된 것은 17세기에 들어서면서 영국과 독일에서

각각 이루어졌다. 영국에서는 1662년 그랜트(Graunt, 1620~1674)가 <사망표에 관한 자연적 및 지역적 관찰>에서 교회의 기록에 의거하여 사망표를 작성하고, 남녀의 출생아 수, 결혼의 상황 등에 대하여 기록, 정리, 비교하여 각각의 수량에 대하여 관찰하여 사회 현상의 규칙성을 발견하는 방법을 설명하였다. 페티(Petty, 1623~1687)는 그랜트의 연구를 발전시켜 인구 통계표를 만들고 전 지구상의 인구를 3억6천만이라고 추정하였다. 또한 천문학자인 핼리(Halley, 1656~1742)도 인구 통계표를 작성하였는데, 그의 사망표에 의하여 보험료를 산출하는 새로운 보험 회사가 18세기 중엽에 생겨났다.

독일에서는 콘링(Conring, 1605~1681)과 아켄월(Achenwell, 1719~1772) 등이 대학에서 각국의 현황에 관한 체계적인 강의가 시작되었다. 이들은 정치, 경제, 토지, 인구 등의 국가적인 상황을 계통적으로 기술하고, 국가가 어떤 국토와 어떤 민족으로 구성되어 있으며 얼마만큼의 부를 가지고 있는가를 정확히 파악하려 하였다.

18세기 초까지 통계는 수학적으로 아주 단순한 것에만 행해졌지만 사회가 발전함에 따라 많은 자료들을 체계적으로 분류하고 분석하는 일이 중요하게 여겨지기 시작하였다. 따라서 확률론을 기초로 한 통계학이 싹트기 시작하였고, 국가의 중요한 업무 기능을 기초로 하는 학문이라는 뜻으로 'statistics(통계학)'이라는 용어가 탄생하게 되었다.

현대적인 뜻으로서의 통계학의 개념이 확립된 것은 19세기 이다. 케틀레(Quetelet, 1796~1874)는 확률론에 입각한 통계학을 과학으로서의 학문으로 체계화하여 근대통계학의 기틀을 마련하였다. 케틀레는 어떤 현상을 관찰할 때 자료(표본)가 많으면 확률이론을 적용하여 일정한 경향을 파악할 수 있고, 그만큼 우연성을 배제할 수 있다는 사실에 주목하여 '대수의 법칙'이라든지 '중심 극한 정리' 등의 확률 이론을 써서 현상의 법칙성을 발견하는 일에 힘썼다. 그는 항상 많은 자료를 관찰하고, 측정이 가능한 것에 대해서는 평균을 취할 것을 강조하였다.

20세기에 들어 선진국들의 통계는 더욱 광범위해지고 강화되었고, 통계학과 확률론의 관계 또한 더욱 밀접해졌다. 1906년에 고세트(Gosset, 1876~1936)는 영국의 더블린(Dublin)맥주 회사에서 일하면서 맥주의 호모균이나 밀의 수확량 연구에서 대표본을 얻을 수 없는 경우가 많아, 이를 해결하고자 소표본 이론의 연구에 착수하여 1908년 스튜던드(Student)라는 가명으로 t-분포에 관한 논문을 발표하였다. 이것을 20세기의 추측통계학(inferential statistics)의 발생으로 볼 수 있다.

런던 농업시험장의 통계부장인 피셔(Fischer, 1890~1962)는 농업시험에 통계적 방법을 적용시키는 연구를 하여 F-분포를 비롯하여 표본상관계수, 표본회귀계수 등의 많은 통계량의 분포를 유도하여 추측통계학의 이론적 체계를 확립하게 되었다. 오늘날 추측통계학은 추계학(Stochastics)이라 하여 수리통계학의 주류를 이루면서 이론과 응용에서 급격히 발전하고 있는 학문이 되었다.

이처럼 확률론과 통계학은 더욱 밀접한 관계를 가지게 되었고 지금까지도 순수 수학 뿐 아니라 연구의 발달과 작업의 자동화 등과 관련하여 행정관리, 경영 관리 등에서도 매우 중요한 역할을 하고 있다.

(2) 통계의 예화자료

a. 통계의 파라독스

다음의 예는 불완전한 통계자료를 기초로 하여 원인과 결과를 연관시킬 때 나오는 모순점 들이다.

자동차 사고의 대부분이 운전사의 집 근처에서 일어난다는 이야기를 듣는다.

이것은 우리가 집에서 멀리 떨어진 고속도로를 달릴 때가 더 안전하다는 것을 의미하는가?

이 통계자료에 의하면 운전사가 자신의 집 근처에서 차를 모는 경우가 더 많다는 것을 의미하는 것이다.

보통 속도로 달리는 자동차들이 시속 150km를 달리는 자동차들보다 더 많은 사고를 일으킨다고 한다. 그렇다면 빠른 속도로 달리는 것이 더 안전하다는 것을 의미하는가? 대부분의 운전자들이 보통 속도로 차를 몰기 때문에 대부분의 사고가 그 속도에서 일어나는 것은 당연하다.

결핵 환자 중의 많은 사람이 산에서 죽는다고 한다. 만약 기후가 결핵균의 번식에 유리하다고 볼 수 있는가?

산악 기후는 결핵 환자의 요양에 좋기 때문에 많은 환자들이 요양을 위해 산으로 들어간다. 따라서 산에서 죽는 결핵 환자수의 평균은 당연히 높다.

조사 결과에 따르면 발이 큰 아이일수록 말을 더 잘 한다고 한다. 말을 배우는 능력은 신발의 치수와 비례하는가?

이 조사 결과는 아이의 성장과 관계가 있다. 나이가 많은 아이일수록 발이 크므로 이러한 아이가 말을 더 잘하는 것은 당연하다.

최근의 한 연구는 유명한 수학자들은 대부부분 장남 또는 장녀라고 한다. 그렇다면 장남이 동생들보다 더 재능이 있다고 결론지을 수 있는가?

그렇지 않다. 한 가정의 평균 자녀수가 적어짐에 따라 장남의 수가 동생들보다 훨씬 더 많아진 것이다.

b. 질문에 대한 올바른 이해

통계를 위한 어떤 자료를 얻기 위해서는 상대방에게 질문을 해야 하는데, 이때 질문의 내용에 따라 통계의 내용이 달라질 수도 있다. 만약 대통령 선거에서 누구를 찍을지를 묻는 질문에 대답한 비율이 80%라고 해도 이 질문에 정확히 답변하는 사람은 분명 앞의 80%에 미치지 못할 것이다. 왜냐하면 우리나라 사람들은 대체로 자신의 정치적 성향을 겉으로

드러내기를 꺼리는 경향이 있기 때문이다.

그러므로 질문에 따라 대답이 달라지는 경우를 감안해서 통계를 볼 수 있어야 한다. 우리나라 사람들은 책을 많이 읽지 않는 것으로 알려져 있다. 그런데 만약 여러분 앞에 설문지를 든 조사원이 갑자기 나타나 "한 달에 평균 몇 권의 책을 읽습니까?" 라고 묻는다면 누가 솔직하게 대답할까? 그러므로 이런 질문에 대한 통계수치는 실제보다 더 큰 수일 가능성이 많다.

이런 종류의 질문에 자기의 생각도 생각이지만, 사회가 원하는 통념 또는 질문지가 원하는 대답을 먼저 떠올리고, 그에 맞게 답하는 사람도 많을 것이다. 실제로 양치질의 횟수에 대한 질문이 있었다면 하루에 한번밖에 닦지 않는 사람이라도 두 세 번이라고 말하고 싶을 테고, 신문 기사 중 어느 면을 가장 먼저 보느냐는 질문에 대하여도 늘 방송, 연예 면을 가장 먼저 보는 사람이라도 왠지 그렇게 대답하기 창피한 생각이 들어 사회면이나 정치면을 먼저 본다고 말할 수 있다.

그러므로 질문의 종류에 따라 그러한 가능성에 대해 사전에 충분히 검토해야 하고, 또 설문지를 만드는 사람들은 정확한 답변을 얻을 수 있는 내용으로 질문 하도록 애써야 한다.[18]

18) 김빛나. 단원별 수학사 교수 자료 연구: 수1중심으로. 경희대학교 교육대학원. 2007

5. 기하

1) 피타고라스

(1) 피타고라스의 역사

오늘날 피타고라스의 이름을 따서 붙인 직각삼각형의 빗변의 제곱은 다른 두 변의 제곱의 합과 같다는 정리는 경지정리나 토목공사, 토지 이용에 관한 실생활 문제를 해결하다 얻어진 경험적인 지식을 바탕으로 하고 있다.

a. 바빌로니아

바빌로니아의 수학판 중에서 가장 놀랄 만한 것은 '플림프톤 322(Plimpton 322)′ 로 알려진 것이다. 이 판은 세 줄로 숫자가 적혀 있는데 맨 오른쪽 줄은 단순히 번호 순서를 매긴 것이고, 그 다음 두 줄을 연구해 보면 대응수가 정수 크기의 변을 갖는 직각삼각형의 빗변과 다른 한 변의 크기를 나타내고 있음을 알 수 있다.

플림프톤 판의 연대 이후 천 년 동안에 가장 괄목할 만한 수학적 성취는 바로 모든 원시피타고라스 3쌍 {a,b,c}가 다음 매개변수 식으로 주어짐을 보인 것이다.

$a = 2uv, b = u^2 - v^2, c = u^2 + v^2$

여기서 u,v는 서로 소이며 모두 홀수는 아니고 $u > v$이다. [19)]

19) H.Eves저 . 수학사. 경문사

b. 이집트

모스크바 파피루스와 린드 파피루스에 있는 110개의 문제 중에서 26개가 기하학에 관한 문제로, 대부분이 땅의 면적과 곡물창고의 크기를 계산하는데 필요한 측량공식으로부터 유래되었다. 여기에는 “면적 100인 직사각형을 변의 비가 3:4인 두 개의 정사각형으로 분해해라.″는 등의 문제가 있는데 풀이는 없고 답만 있다. 이러한 기록으로 보아 고대 이집트인들은 피타고라스 이론을 알고 있었음을 예측할 수 있다.

c. 중국

고대 중국의 수학책 중에서 가장 중요한 <구장산술(九章算術)>은 한대에 쓰여진 것으로 마지막 장인 <구고장>에는 피타고라스 정리를 응용하여 푸는 문제들이 나온다.

피타고라스 정리는 직각삼각형의 세 변 a, b, c 사이에 성립되는 의 관계를 나타낸다. 그런데 중국인들은 직각삼각형의 세 변의 관계가 단지 3, 4, 5 사이에만 성립되는 것이 아니라는 것을 일찍부터 알고 있었다. 그 증명을 어떻게 했는가는 분명치 않지만 어쩌면 눈짐작에 의해 직관적으로 파악했을 것이다. 이 장에는 직각삼각형의 두 변을 알고 다른 한 변의 길이를 구하는 문제가 많고, 이들은 제곱근을 구하는 방식으로 푼다. 그러나 지나치게 복잡한 문제는 2차방정식의 해를 구하는 방식으로 풀기도 한다. 이 문제를 현대 수학으로 정리하면 이러한 숫자방정식을 일찍부터 풀었던 것은 중국 수학의 커다란 성과이다. <구고장>에는 멀리 떨어져 있는 나무를 보고, 그 나무까지의 거리를 측정한다든지, 산의 높이를 측정한다든지 하는 문제도 있는데 이들은 측량술의 발달과 불가분의 관계에 있는 계산법이다.

d. 한국

신라시대 천문관 교육의 기본 교재로 사용한 <주비산경> 이라는 책의 '구고현의 정리' 에는 "구를 3, 고를 4 라고 할 때 현은 5가 된다."는 "밑변이 3, 높이가 4인 직각삼각형의 빗변의 길이는 5가 된다."는 피타고라스 정리와 같은 정리가 나온다. 구고현의 정리는 대공사나 건물을 지을 때 직접 재지 못하는 거리를 구하는 경우 유용하게 이용되었는데, 수식이나 기하학적인 도형을 따로 풀어 설명하지 않고 오직 한 장의 그림으로 그 내용과 증명을 동시에 나타내고 있다. 이것으로 보아 한국에서도 삼국시대부터 피타고라스의 정리가 쓰였음을 알 수 있다.

2) 피타고라스의 예화 자료

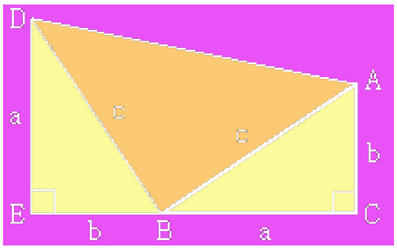
역사적으로 피타고라스 정리가 알려져 있었다는 사실을 알 수 있으나, 피타고라스 정리의 최초의 일반적인 증명은 피타고라스에 의해 이루어졌다고 해도 무방할 것이다. 피타고라스 정리의 증명법은 피타고라스 이후 많은 학자들이 연구하여, 가능한 모든 방법이 전부 찾아진 것으로 생각되며 그 방법의 총 수는 280가지 그 이상이라고 한다.[20]

a. 가필드의 증명법

미국 대통령 중 몇 명은 수학과 미약한 관계를 유지했었다. 워싱턴(George Washington)은 유명한 측량가였고, 제퍼슨(Thomas Jefferson)은 미국에서 고등 수학을 가르칠 것을 장여하려고 많은 노력을 했으며, 링컨(Abraham Lincoln)은 유클리드의 '원론'을 공부함으로써 논리를 배웠다는 이야기가 있다.

20) H.eves저 .수학의 위대한 순간들. 경문사

더욱 독창적이었던 사람은 20대 대통령 가필드 (James Abram Garfield, 1831-1881)였는데, 그는 학창 시절에 초등수학에 대한 강렬한 흥미와 상당한 재능을 갖고 있었다. 그가 독창적으로 피타고라스 정리에 대한 멋진 증명을 발견했던 시기는. 그가 대통령이 되기 5년 전인 하원의원 시절이었던 1876년이었다. 그는 다른 상원의원들과 수학에 대해서 토론을 하던 중에 그 증명이 떠올랐는데, 그 증명은 뒤에 뉴잉글랜드 교육잡지에 게재되었다. 이 증명은 사다리꼴의 넓이에 대한 공식을 배운 즉시 제시될 수 있다.



$$\square DECA = \triangle DEB + \triangle DBA + \triangle ABC$$

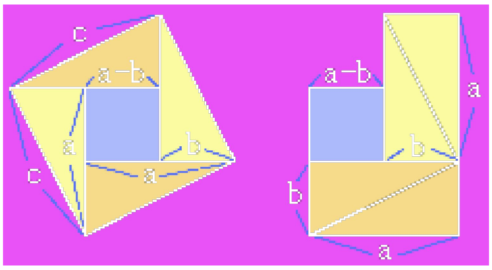
$$\frac{(a+b)}{2} \times (a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2$$

b. 바스카라의 증명법

아래 그림은 인도의 수학자이자 천문학자인 바스카라 (Bhaskara, 1114~1185)의 증명인데, 그는 두 개의 그림을 나란히 그려놓고 '보라!' 라는 말 이외에는 더 이상의 설명을 제시하지 않았다.

다음은 바스카라의 첫 번째 증명이다.

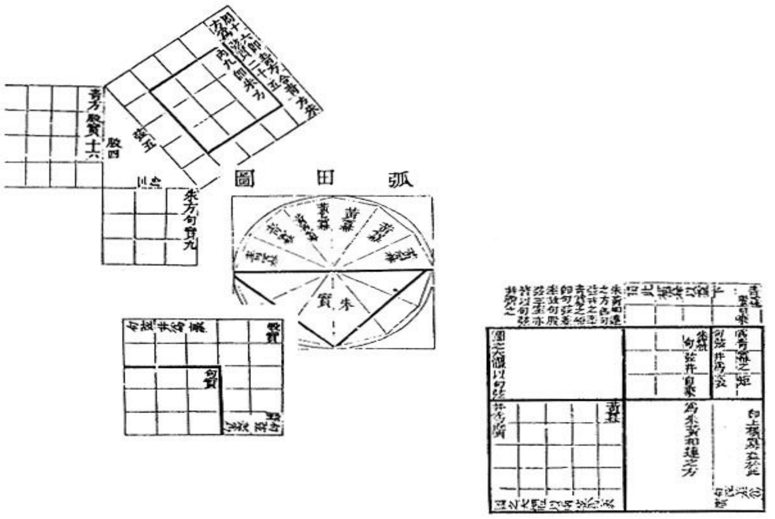


물론, 간단한 대수로 표현하여 이것을 증명할 수 있다.

$$c^2 = \frac{ab}{2} \times 4 + (a-b)^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

c. 구고장의 증명법



<구장산술(九章算術)>의 마지막 장인 <구고장> 의 20번 문제는 다음과 같다.

한 변의 길이를 알 수 없는 정사각형의 마을이 있다. 그 마을의 네 개의 성벽 중앙에는 문이 나 있다. 북문을 나와 20보가 되는 지점에 나무가 한 그루 서 있다. 남문을 나와 14를 걸은 다음 방향을 바꿔 서쪽으로 1775보를 갔더니 그 나무가 보였다. 그렇다면 마을의 한 변의 길이는 얼마인가?

6. 수학사를 도입한 학습지도안

<table>
<tr><td>대단원</td><td colspan="5">Ⅱ. 피타고라스의 정리</td></tr>
<tr><td>소단원</td><td colspan="5">1. 피타고라스의 정리</td></tr>
<tr><td>학습목표</td><td colspan="5">피타고라스의 정리에 대하여 안다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">과정</td><td rowspan="2">학 습 내 용</td><td colspan="2">학습 활동</td><td rowspan="2">자료 및 유의점</td><td rowspan="2">시간</td></tr>
<tr><td>교사</td><td>학생</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>·인사

·선수학습확인

·학습 목표 제시</td><td>· 수업분위기를 조성한다.
·제곱근의 정의에 대해 상기시킨다.
·삼각형의 종류와 정의를 상기시킨다.
· 학습목표를 인식시킨다.</td><td>·교사의 질문에 대답한다.

· 학습목표를 안다.</td><td></td><td>10분</td></tr>
</table>

전개	·피타고라스의 역사 설명 · 바스카라의 증명 · 피타고라스 정리 설명	· 피타고라스 정리의 역사에 대하여 간략하게 설명하여 준다. · 바스카라의 증명 방법을 보여주고 학생들이 이해할 수 있도록 한다. · 직각삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계식 $a^2+b^2=c^2$을 설명한다.	·교사의 설명을 잘 듣는다. ·교사가 제시하는바스카라의 증명방법을 이해해 본다. · 직각삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계를 알고, 피타고라스정리를 이해한다.	·바스카라의 피타고라스 정리그림	25분
정리 평가	·형성평가 ·정리 및 과제	· 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형에서 두변의 길이를 알 때, 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있음을 설명한다. ·과제를 제시한다.	· 피타고라스 정리를 이용하여 형성평가를 풀어본다. ·과제를 확인한다.		10분

Ⅳ. 결 론

오늘날 대다수의 학생들은 수학 학습을 단순히 입시, 성적에 대한 것으로만 결부시키기에 자칫, 딱딱한 과목으로 인식되기가 쉽다. 그러한 잘못된 인식이 바로 학생들을 '수학'이라는 학문에 다가가기 어렵도록 하는 것이라고 생각한다.

학생들이 가지고 있는 선입견과 부정적인 사고방식을 바로잡기 위해 가장 먼저 해야 할 것은 학생들의 흥미를 유발하고 관심을 이끌 수 있도록 교사들이 수학학습 지도 방안을 마련하는 것이다.

그러한 방안에 부합하는 방법 중 하나가 바로 수학사와 관련된 자료를 도입하는 것이라고 할 수 있는데, 수학사를 수학 교육에 활용하게 된다면 학생의 자발적인 수학적 활동을 이끌어 낼 수 있고, 또한 수학의 실용성과 가치를 깨닫게 할 수 있기 때문이다.

이와 같은 필자의 생각을 바탕으로 시작한 본 논문에서는 학교 수학수업에서 활용할 수 있는 수학사와, 역사 속에서 찾아 볼 수 있는 수학 문제들을 소개하여, 학생들이 수학에 대한 흥미와 관심을 가지고 좀 더 친숙하게 수학을 학습할 수 있도록 하는데 초점을 두었다. 또한 수학교육에 있어서 수학사 도입의 필요성은 느끼지만 현실적으로 수학 수업에서 활용하지 못하는 교사들을 위해 활용 가능한 자료를 제시하는데 노력했다.

필자의 본 연구에서 부족한 점이 있을지라도, 수학사 및 예화 자료에 대한 연구가 더욱 활발해져, 학습과정에서 학생들이 수학에 대해 좀 더 흥미를 가지고, 친숙하게 다가갈 수 있길 바라는 마음으로 본 연구를 마친다.

참 고 문 헌

[1] 강옥기. 제 7차 교육과정에 따른 중등수학 교재연구. 경문사. 2006

[2] 김남희 외5. 수학교육과정과 교재연구. 경문사. 2007

[3] 김빛나. 단원별 수학사 교수 자료 연구: 수1중심으로. 경희대학교 교육대학원. 2007

[4] 박교식. 함수개념의 역사적 발달에 관한 연구. 科學數學教育年報.

[5] 수학사랑 세미나팀. 수학사를 도입한 수업. 수학사랑 제2회 MATH FESTIVAL

[6] 수학사랑. 함수 개념의 역사 4,5월호 p47~48. 2001

[7] 양경란. 방정식을 중심으로 본 중등수학과 수학사와의 연계성에 관한 고찰. 명지대학교 교육대학원. 2005

[8] 우정호. 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부. 2000

[9] 우정호. 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부. 2002

[10] 우정호 외. 중학교 수학 교사용 지도서. 두산동아(주)

[11] 유현주. 수학 교육에서의 새로운 평가 동향. 과학교육논문집. 1999

[12] 전상표 논문집. 확률 역사를 이용한 확률 교육에 대하여(On the Probability Education using of the Probability History). 2005

[13] 전희정. 수학수업의 흥미유발을 위한 수학사 연구 : 7-가 단계를 중심으로 . 신라대학교. 2007

[14] 최병철. 음수지도의 교육학적 고찰. 서울대학교 대학원. 2002

[15] 최재옥. 고등학교 확률과 통계 단원의 역사발생학적 분석. 울산대학교 교육대학원. 2006

[16] 허민. 수학사와 수학교육. 수학교육 프로시딩 제 6집. 1997

[17] H.Eves저. 수학사. 경문사

[18] H.eves저 .수학의 위대한 순간들. 경문사

[19] Luetta Reimer & Wilbert Reimer(1995). Connecting Mathematics with its History : A Powerful, Practical Linkage NCTM. Connecting Mathematics across the Curriculum 1995 Yearbook, pp.104-114

Abstract

Bae, Jin Kyung
Major in Mathematics Education
Sungshin Women's University
Supervised by Dr. Shim Seong-A

The main purpose of this study was to discuss an introduction of mathematics history, which could be considered as one of methodological ways of teaching to give rise to students' interest in mathematics.

Through literature review related to an insight into teaching and studying methods using an introduction of mathematics history, mathematical issues were intensively studied and selectively extracted based upon setting against mathematics history and its own history. Guidelines for teaching were also provided that uses the history to be variously applicable to practical academic classes.

As a result, this introduction of the history to teaching guidelines for mathematics might lead students to voluntarily involve in mathematical activity, and subsequently expect to understand practical use of and value about mathematics.

Likewise, students might be anticipated to be further interested in and more acquainted with mathematics.