강병개 教授指導

碩士學位 請求論文

중학교 함수 단원에서의 오개념

2011

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

박희정

중학교 함수 단원에서의 오개념

강병개 教授指導

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

2011 年 5月

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

박희정

認 准 書

박희정의 碩士學位 論文을 認准함

審査委員 ________________ 印

審査委員 ________________ 印

審査委員 ________________ 印

2011 年 5 月

誠信女子大學校 敎育大學院

논 문 개 요

함수는 학교 수학의 전 영역에 걸쳐 많은 비중을 차지한다. 따라서 함수를 이해하고 활용하는 것은 수학교육에 있어서 매우 중요하다. 그런데 함수의 정확한 개념을 파악하는 것은 쉽지 않으며 많은 학생들이 함수를 학습하는 과정에서 오개념을 형성하게 된다.

본 논문에서는 중학교 수학의 함수 단원에서 학생들이 가질 수 있는 오개념을 형성 원인에 따라 분석하고, 오개념을 줄일 수 있는 지도 방안을 제시하고자 했다. 연구 분석에 앞서 함수의 개념을 수학사적으로 고찰하고 우리나라 교육과정에 따른 함수 개념의 변화를 알아보고 수학적 오개념 형성의 원인을 살펴보았다. 오개념이 형성되는 원인은 크게 인식론적 원인과 교수학적 원인으로 나뉘고 인식론적 원인은 다시 지각적 특성에 의한 원인과 논리적 특성에 의한 원인으로 분류된다.

연구결과, 학생들이 함수에 대해 가지고 있는 오개념은 지각적 특성에 의한 원인에 따라 함수의 정확한 정의가 아닌 그래프의 모양이나 식의 형태로 함수를 판단하는 오개념이 있었고, 논리적 특성에 의한 원인에 따라 함수를 구조적인 대상보다는 조작적인 대상으로 생각하는 오개념이 있었다. 또한 교수학적 원인에 의해서는 제한된 학습 경험의 제공에 따라, 수업시간에 경험해보지 못한 식이나 그래프는 (그것이 함수일지라도) 함수가 아니라고 생각하는 오개념을 가지고 있었다. 이에 대하여 오개념 형성을 예방할 수 있는 방안으로 학생들의 인지 수준에 알맞은 학습지도를 하고, 함수의 기술적인 측면보다 내용적인 측면을 강조하여 함수의 본질을 다루는 개념을 지도하고, 함수의 다양한 의미를 고려하여 충분한 예시를 제공하고, 무엇보다 학생들이 함수에 대해 거리감을 갖지 않도록 실생활에서 함수가 이용되는 다양한 예들을 제시하여 흥미를 유발할 것을 제안하였다.

차 례

I 서론

현실세계의 상황을 이해하는 도구가 되는 함수는 역사적으로 수학의 발전이나 통합에 핵심적인 역할을 해왔다. Klein은 "함수 개념은 수학적 사고의 심장이요 혼이다"라고 하면서 함수가 학교 수학의 중심 관념이 되어야 한다고 주장하고 함수적 사고를 강조하였다. 그만큼 수학에서 함수는 매우 중요한 개념이며 실제로 학교 수학에서도 함수가 차지하는 비중은 매우 높다.

우리나라에서는 함수의 개념을 중학교 수학에서 처음으로 다루게 된다. 그런데, 함수의 정의는 추상적이고 형식적인 언어로 이루어져 있어서 학생들이 그 개념을 파악하기가 쉽지 않다. 따라서, 함수의 엄밀한 정의를 중학교 수학에서 다루는 것은 무리가 있어 보이며, 엄밀성이 부족한 정의로 인하여 중학교 학생들이 겪는 어려움은 매우 크다. 정확하지 않은 정의는 필연적으로 학생들의 논리적 오개념을 불러오고, 여기에 함수의 그래프가 가져다주는 지각 우위적 사고에 의한 오개념이 겹쳐서 함수에 관한 다양한 오개념이 발생할 우려가 있다.

함수의 정의와 개념은 교육과정이 변화됨에 따라 조금씩 변화되어 왔다. 중학교에서 함수의 정의는 크게 '변화하는 두 양 사이의 관계' 와 '두 집합의 원소 사이의 대응 관계'로 소개되었는데, 전자는 직관적 접근이 비교적 용이하며 후자는 함수의 엄밀한 정의와 비교적 가깝게 느껴진다. 제1차, 2차, 7차 교육과정은 전자에 따라 함수를 정의하고 제3차, 4차, 5차, 6차 교육과정과 제7차 개정교육과정은 후자에 따라 함수를 정의하였다. 이러한 함수 개념의 변화는 그만큼 중고등학교에서 함수를 다루기가 쉽지 않다는 반증이기도 하다. 그럼에도 불구하고 함수의 개념은 계층구조가 복잡하고

관련된 하위구조가 존재하기 때문에 다루기 어렵고, 함수의 정의 방식을 바꾼다고 해서 해결되는 것도 아니다[16].

학생들은 수학적 사고를 하고 개념을 형성하는 과정에서 이전에 경험을 통해 갖고 있던 개념과 새로운 수학적 개념이 대립하는 경우가 발생하는데 이 때 학생의 인지구조에 자리잡게 되는 잘못된 개념체계를 오개념이라고 한다. 수학적 오류 또는 오개념은 인식론적 장애, 인지적 장애 등으로 언급되기도 한다[14].

오개념이 형성되는 원인은 매우 다양한데, 함수 단원에서는 함수의 정확한 정의를 제대로 이해하지 못해서 생기는 인지적 장애가 있을 수 있고, 또 함수를 그 함수의 그래프와 동일시하여 생기는 지각 우위적 사고에 의한 오개념 등을 들 수 있다. 그런데, 이러한 오개념 형성의 한 가운데에 교육과정상의 함수의 정의가 정확하지 않고 하위 단계와 상위 단계의 개념이 불일치가 자리하고 있다면, 그것은 그 어떤 다른 원인보다도 심각하다고 하지 않을 수 없다. 사실 그동안 우리나라의 교육과정에서 함수의 정의만큼이나 일관된 입장을 유지하지 못한 것도 찾기 힘들다. 중학교에서 함수를 막 접하는 시기에 일어나는 이러한 오개념은 이후의 함수 학습 뿐만 아니라 수학 전반의 이해에 매우 큰 지장을 초래할 수 있으므로, 반드시 개선되어야 한다.

본 연구의 목적은 중학교 함수 단원에서의 오개념의 유형 분석과 오개념을 예방할 수 있는 방안의 모색에 있다. 먼저 우리나라 교육과정의 변화에 따른 함수 개념의 변화를 살펴보고, 현재의 교육과정에서 중학교 학생들이 함수에 대해 어떤 오개념을 갖고 있는지 조사한다. 함수의 오개념에 대한 선행 연구를 토대로 형성원인에 따른 오개념의 유형을 분석해보고 오개념을 줄일 수 있는 방안을 모색하고자 한다.

II 이론적 배경

II.1 함수의 개념에 대한 수학사적 고찰

함수라는 용어는 17세기에 Leibniz에 의해 처음 사용되기 시작했지만 역사적으로 볼 때 함수의 개념은 이미 오래전부터 사용되어왔다. 기원전 5세기 경 고대 바빌로니아 시대의 사람들은 천문학 연구에서 수표를 사용하였는데 이 수표가 함수를 나타내는 것으로 생각할 수 있다. 그들은 천체의 위치의 주기성을 발견하고 천체의 운동을 나타내는 경로를 추정하여 수표로 나타내었다. 그리스인들은 천체운동을 시간의 함수로 해석하여 오늘날 삼각함수로 불리는 것을 사용하였고 일차함수와 이차함수의 개념을 사용하여 현상을 공식화하고 분류하였다. 이 시기는 아직까지 함수가 무엇인지에 대한 의식은 없었으므로 전 함수 단계라고 볼 수 있다.

함수가 수학적으로 의식화되어 사용되고 함수가 정의된 것은 17세기인데 여러 가지 운동을 양적으로 수학화 하려는 과정에서 함수 개념이 발생하였다. 운동을 나타내는 곡선을 중심으로 곡선의 접선, 곡선 아래의 면적, 곡선의 길이, 곡선을 따라 움직이는 점의 속도 등을 구하는 과정에서 함수가 개념화 되어 기하적 함수라고 볼 수 있고, 이 시기는 기하적 함수 단계로 볼 수 있다. 대표적인 학자로는 등가속도 운동을 관찰한 Galilei가 있는데 그는 “자연수와 그 제곱의 개수는 같다”는 주장을 하여 집합의 원소 사이의 일대일대응의 개념을 이해한 사람으로 인정된다.

함수의 정의는 1692년 Leibniz에 의해 처음 나타났는데 그는 함수를 “어떤 변화하는 양 x에 따라 변화하는 양 y가 정해진다면, y는 x의 함수” 라고

정의하였고 곡선과 관련된 기하학적 대상에 대해 함수라는 용어를 최초로 도입하였다. 이와 같이 기하적 함수는 운동을 그래프로 표현하고 그에 따라 나타나는 곡선에 대한 탐구로 미적분의 발달과 불가분의 관계 속에서 발생하였다고 볼 수 있다.

18세기에는 Descartes에 의하여 해석기하학이 탄생하였는데, 공간에 좌표를 설정하여 도형을 대수적 식으로 나타냄으로써 기하학적 대상을 대수적으로 연구하게 되면서 자연스럽게 두 변수 사이의 관계식이 등장하였다. 따라서 이 시기는 대수적 함수 단계라고 볼 수 있다.

함수의 기호 f는 Euler의 《무한소 해석 입문(Introduction in analysis infinitorum)》(1748)에서 처음 사용되었는데, 그는 이 책에서 함수를 변수와 상수의 결합에 대한 표현으로 보았고 여러 함수를 변수와 상수가 결합되어 있는 종류와 방식에 따라 대수함수, 초월함수, 유리함수(다항함수와 분수함수), 무리함수 등으로 구분했다. 또한 그는 하나의 해석적 표현으로 나타낼 수 없는 함수를 받아들여 하나의 해석적 표현이 가능한 함수를 연속함수, 그렇지 않은 함수를 불연속 함수라고 생각하며 함수 개념을 확장하였다. 한편 함수의 정의를 변수개념에 의존하여 설정했던 Euler는 변수 개념 자체도 모호했기 때문에 정의에서 변수를 제거하기를 희망했고 1755년 "만약 어떤 양이 다른 양에 종속된다면 전자를 후자의 함수라 부른다." 라고 새롭게 정의하였다. 이 과정에서 독립변수와 종속변수에 대한 구분이 명확해졌고 각 변수가 독립변수가 될 수 있다는 것도 인식하였으며 함수는 대수적으로 조작 가능함을 발견하였다.

그러나 19세기 이후에 Euler의 함수 개념을 재고해야 할 필요성이 제기되고 Dirichlet함수가 출현하면서 함수의 개념이 논리적 함수로 바뀌게 된다. Dirichlet는 "주어진 구간에서 x의 각 값에 y의 유일한 값이 대응할 때, y는 x의 함수"라고 정의하였고 한 변수가 다른 변수에 종속되는지의 여부

나 식으로 표현될 수 있는지의 여부가 아닌 한 변수의 각 값에 다른 변수의 유일한 값이 대응되느냐의 논리적 조건에만 관심을 갖게 되면서 함수의 정의에 있어서 변수 개념을 없애고 일가성과 임의성을 강조하게 된다.

이러한 논리적 함수 단계를 거쳐 20세기에 접어들면서 좀더 엄밀한 의미의 공리론적 집합론을 기초로 함수를 정의하는 집합적 함수 단계가 나타나게 된다. 집합론적 함수 개념을 처음으로 사용한 Dedekind는 “두 집합 X, Y가 주어졌을 때 X의 각 원소에 대응하여 Y의 각 원소가 오직 하나씩 대응되는 규칙이 있으면 이 대응 규칙을 X에서 Y로의 사상이라 하였고, 특히 X와 Y가 수로 이루어진 집합이면 이 사상을 함수라 한다.”고 정의하였다. 그는 추상적인 사상이론을 발전시켰고 그의 이론과 연구들은 함수 연산을 포함한 추상적인 이론을 발전시킴으로써 수학의 새로운 계기를 마련했다.

이와 같이 역사적으로 함수는 오랜 시간에 걸쳐 그 개념이 발달되어 왔으며 함수 개념은 해석학의 발전에 핵심적인 역할을 하였고 함수의 조작 가능성을 통해 추상수학으로의 새로운 발전 가능성을 제시하였다.

II.2 우리나라 교육과정의 변천에 따르는 함수 개념의 변화

해방 이후 지금까지 교육과정의 변천과, 각 교육과정기에 다루어졌던 함수 부분의 교육내용을 살펴보면 다음과 같다.

1. 교수요목기(1946 ~ 1954)

교수요목의 시기는 광복 후 미군정청 편수국에서 교육과정의 성격을 지니는 ‘교수요목’을 제정한 시기로 일본 제국주의적 색채를 모두 제거하

도록 하였으나 중등학교의 학제가 빈번하게 변경되면서 학교 교육이 그 궤도를 찾지 못한 채 일제시대의 교육을 답습하였다.

이 시기에는 초급중학교 2학년에서 분수함수와 삼각함수를 다루는 등 내용수준이 매우 높았다. 함수를 따로 정의하지 않고 분수함수와 삼각함수를 도입하였고, 초급 중학교 3학년에서는 지수함수와 대수함수를 다루는 등 조금 무리한 교육과정을 운영한 것으로 판단된다.

1948년에 정부가 수립되고 1949년에는 교육법이 제정, 공포되었다. 개정된 교육법에 따라 1950년부터 6-3-3제의 신학제를 실시하였고, 각 급 학교의 "교육과정 시간배분 기준령"도 제정되었다.

그러나 6·25전쟁으로 인하여 교육과정의 운영은 비정상적으로 이루어질 수밖에 없게 되었고 새 교육과정의 마련도 전쟁 후로 미루어지게 되었다. 특히 수학교육의 경우, 미국식의 생활교육이 연구 없이 도입되어 "생활수학"이라는 말이 생겼고 따라서 수학체계가 무너져 수학의 본질의 교육과는 멀어지는 결과를 낳았다.

2. 제1차 교육과정의 시기(1954~1963, 경험중심 교육과정)

제1차 교육과정은 미국 진보주의 교육, 특히 Dewey의 실용주의 사상의 영향을 받아 생활경험을 강조하는 방향으로 교육과정이 구성되었고 수학의 학문성과 실용성을 강조하였다. 중학교 수학과의 목표는 수학을 사용하여 생활상의 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르고, 이를 위해 수학적인 개념이나 원칙을 이해하고 적용하는데 있다.

제1차 교육과정 개정의 중요한 목적 중의 하나는 교수요목기의 문제점을 개선하는 것으로 학생들의 욕구와 심리적인 배열 및 체계적인 면을 고려하였고 교수요목기에 비해 많은 내용을 약화하고 삭제하여 학생들의 수준에 맞게 내용 수준과 분량이 하향 조정 되었다. 중학교 1학년의 "자료의

수집정리와 표” 단원에서 특수한 함수표를 다루고, 2학년에서는 삼각함수가 삭제되고, 비와 비례 관계 및 정비례와 반비례를 다룬다. 그리고 3학년에서 본격적으로 일차함수를 다루면서 함수개념을 종속을 바탕으로 한 비례관계로 도입한다. 이 시기에는 함수의 정의를 x, y와 같이 그 값이 여러 가지로 변하는 수를 변수라 하고 y의 값은 x의 값이 변함에 따라 변하므로 따름수(또는 함수)라고 정의하였다[8].

3. 제2차 교육과정의 시기(1963~1973, 교과중심 교육과정)

제2차 교육과정의 시기는 미국의 수학 교육 현대화 운동의 영향을 받아 수학의 체계를 강조하고 지도 내용의 수준이 향상되었으며 기초적인 계산 능력과 논리적인 사고 능력을 기를 수 있도록 교육과정이 구성되었다.

제1차 교육과정은 학생의 생활 경험을 중심으로 수학 학습 내용을 전개하였기 때문에 학생들이 쉽게 이해할 수 있는 장점이 있었으나, 학문으로서의 계통성에 충실하기 어려웠다. 이를 해소하기 위하여 제2차 교육과정은 수학 본연의 계통성을 중시하는 방향으로 제정되었다. 따라서 이 시기를 ‘계통학습기’라 명한다. 중학교 수학의 목표는 생활경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 사고를 올바르게 하며 문제를 능률적으로 해결하는 능력을 기르는데 있다.

제2차 교육과정기의 함수의 정의는 “2개의 변수 x와 y사이에 x의 값이 정해지면 이에 따라 y의 값도 정해질 때에, y를 변수 x의 함수라 하고, x와 y사이에 함수관계가 있다고 한다.”[8]로, 제1차 교육과정기의 함수의 정의와 같으나 종속 중심의 관점에서 함수 개념을 도입하면서 문자를 써서 관계를 표시하게 하고 변량에 대한 변화를 이해하도록 하였다. 비와 비례관계는 중학교 1학년에서 다루지만 일차함수와 그래프는 2학년 때 본격적으로 다루고 3학년에서 이차함수를 다룬다.

4. 제3차 교육과정의 시기(1973 ~ 1981, 구조중심-나선형 교육과정)

1950년대 초부터 미국을 비롯한 여러 나라에서 수학 교육 현대화 운동이 시작되었고, 이에 따른 '새수학'의 영향이 전 세계에 퍼져나갔는데 1970년을 전후하여 SMSG 교재를 통해 수학 교육 현대화 운동의 내용이 우리나라 수학자들에게도 널리 알려지게 되면서 제3차 교육과정에 '새수학'의 내용이 반영되게 되었다. 이 시기에는 수학적 구조와 논리적 엄밀성이 지나치게 강조되었고 정확한 용어와 기호의 사용을 강조하였다. 이 시기의 교육과정에서 처음으로 함수가 현대적인 의미로 지도되기 시작하는데 "집합 X의 각 원소에 대하여 집합 Y의 원소가 하나씩 대응할 때, 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수이다."라고 정의하고 있다[8]. 비와 비례관계는 중학교 1학년에서 초등학교로 이동하였고 좌표평면에 관한 내용은 중학교 2학년에서 중학교 1학년으로 이동하였다. 1학년에서 순서쌍과 곱집합, 집합사이의 대응관계 및 좌표평면을 다루고, 2학년에서 기존의 '변화하는 두 양 사이의 관계' 라는 개념에서 벗어나 ' 두 집합 사이의 원소의 대응관계' 로 함수를 도입하여 일차함수에 대해 구체적으로 다루고, 3학년에서 이차함수의 그래프를 다룬다.

그런데 중학교 학생들에게 지나치게 엄밀한 수학적 개념을 강요하여 과도한 학습 부담을 지우고, 수학이 너무 어려운 교과목으로 여겨지게 되어 수학에 대한 흥미를 떨어뜨리는 결과를 낳았다.

5. 제4차 교육과정의 시기(1981 ~ 1987, 구조중심-나선형 교육과정)

제4차 교육과정은 내용 분량이 많고 수준이 지나치게 높았던 제3차 교육과정의 문제점을 보완하여 기본적으로 새수학의 정신을 유지하되 학생들의 지적 발달 수준에 적합하게 학습 내용을 재조직하였다. 수학적 구조와 논리적 엄밀성의 무리한 강조를 지양하고 수학적으로 엄밀한 용어나 기

호의 사용을 완화하였다. 제4차 교육과정은 당시에 전개된 '기본으로 돌아가기' 운동의 영향을 받아 수학의 기본 개념과 기본 기능에 중점을 두고 문제 해결력을 신장시키는 수학교육을 지향하였으나 실제적으로는 무엇을 기본 개념으로 볼 것인가에 대한 분명한 기준이 제시되지 않았다.

함수 단원은 제3차 교육과정과 마찬가지로 초등학교 6학년 과정에서 함수가 처음으로 등장하고 중학교 1학년에서 '함수' 단원이 본격적으로 등장한다. 곱집합과 순서쌍에 관한 내용이 삭제되어 지나치게 집합에 의존하려던 방법이 없어지고 두 집합의 원소 사이의 대응에 의한 함수를 다룬다. 일차함수는 중학교 2학년에서, 이차함수는 중학교 3학년에서 다룬다.

6. 제5차 교육과정의 시기(1987 ~ 1992, 구조중심-나선형 교육과정)

제5차 교육과정은 제4차 교육과정의 운영상에 나타난 문제점을 수정, 보완한 것으로 변화의 폭은 크지 않았다. 이전의 교육과정의 지도내용에서 학습량을 더욱 경감시킴으로써 수학적 사고력을 신장시키고 수학에 흥미를 가지도록 하였으며 기초 학력 배양에 중점을 두고 특히 문제해결력의 신장에 역점을 두었다.

제3차와 제4차 교육과정에서는 초등학교 6학년 과정에서 함수와 그 그래프까지 다루었으나 제5차 교육과정에서는 초등학교 6학년 과정에서 정비례와 반비례 관계를 다루는 것에서 그치고 중학교 1학년 과정에서 본격적으로 함수를 다룬다. 이 시기 역시 함수의 정의는 두 집합의 원소 사이의 대응을 통한 개념으로 도입되는데 "어떤 주어진 관계에 의하여 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소를 짝지어 주는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 대응이라고 한다." 라고 대응을 먼저 이해시키고, "집합 X의 각 원소에 대하여 집합 Y의 원소가 1개씩만 대응할 때, 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 한다."라고 함수를 정의하였다[8]. 중학교 2학년에서는 일차

함수, 3학년에서는 이차함수를 다루고 고등학교에서도 두 집합에서의 각 원소의 대응관계로 함수를 학습함으로 중학교와 고등학교에서의 함수 개념이 일치한다.

7. 제6차 교육과정의 시기(1992~2000, 구조중심-나선형 교육과정)

제6차 교육과정은 정보화 사회에 대비하여 기초 교육의 강화, 정보화 교육 강화, 학습 부담 경감, 실용성 강조, 교육과정의 효율성 제고 등을 고려하여 제정되었다. 문제 해결력을 강조하고 계산기나 컴퓨터를 수학적 도구로 활용하는 수학교육을 지향하고 다양한 교수학습 방법과 평가 방법의 활용을 강조하였다. 특히 이 시기에는 1989년 미국 수학교사 협의회(NCTM)에서 발표한 ‘학교 수학을 위한 교육과정과 평가규준’의 영향을 받았다.

제6차 교육과정에서는 제5차 교육과정에서와 마찬가지로 초등학교 6학년 과정에서는 정비례와 반비례 관계만을 다루고 중학교 1학년 과정에서 두 집합의 원소 사이의 대응을 통하여 함수 개념을 도입하여 큰 변화는 없으나, 중학교 3학년 내용이 과다하고 시간이 부족하다는 이유로 이차함수 부분에서 제한된 정의역에서의 최대, 최소 부분이 삭제되고 이차 함수의 활용 부분도 삭제되었다.

8. 제7차 교육과정의 시기(2001~2008, 단계형 수준별 교육과정)

1995년 정보화·세계화 시대에 대비하여 신교육 체계 수립을 위한 교육개혁 방안을 발표하였는데 신교육 체계는 ‘열린 교육 사회, 평생 학습 사회’의 건설을 비전으로 삼고 학생의 적성과 능력에 따라 다양한 학습을 할 수 있게 하기 위해 필수 과목을 축소 및 선택과목의 확대, 정보화·세계화 교육의 강화, 수준별 교육과정의 편성 및 운영을 교육과정 개선 원칙으로

설정하여 학생의 인성 발달을 도모하고 창의적인 능력을 기르고자 하는 학생 중심 교육과정을 도입하였다.

이 시기의 교육과정은 학습자 중심교육과정에 의해 학습량을 경감시키고자 하였기 때문에 초등학교 6학년 과정에서 다루던 정비례와 반비례가 기존의 중학교 1학년 과정에 해당하는 〈7-가〉단계에서 다루어지게 되었다. 함수의 정의는 대응개념으로 도입하였던 이전의 교육과정과 달리 이해하기 힘든 대응관계 대신 비례관계로서의 함수를 도입하였고 다시 변화하는 두 양 사이의 관계로 발전시켰다. 그러나 고등학교 교육과정에서는 다시 대응관계를 통하여 정의하였다. 처음에 함수의 도입을 쉽게 이해할 수 있도록 하겠다는 의도와는 달리 중학교와 고등학교의 함수의 정의가 달라서 학생들에게 함수 개념에 대한 혼란을 가져왔다. 일차함수와 이차함수는 이전의 교육과정과 동일하게 각각 중학교 2학년과 3학년에서 다룬다.

9. 제7차 개정교육과정의 시기(2009~)

제7차 교육과정의 개정은 제7차 교육과정 실시 이후 사회·문화적 변화를 반영한 교육내용 및 내용 체계 개편의 필요성에 의해 진행되었다. 현행 교육과정 적용상의 문제점 및 교과 교육내용의 개선 필요성과 주5일 수업제의 월 2회 실시에 따라 수업시수 일부의 조정의 필요성이 개정의 배경이 되었다. 현실 적합한 수준별 수업 방안 구축을 위해 단계형 수준별 교육과정을 폐지하고 학교에게 수준별 수업 방법에 대한 자율권을 부여하였다. 그리고 심화 과정을 삭제하고 학습 내용의 양과 수준을 적정화 하고 선택중심 교육과정 운영의 실효성 및 진로와의 연계성을 강화하였다.

제7차 개정교육과정에서는 함수를 다시 대응관계의 개념으로 정의한다. 중학교 과정에서는 정확히 ‘대응’이라는 용어를 사용하지는 않지만 함수의 개념을 대응관계를 이용하여 설명하고 있다.

제 7차 개정교육과정에서의 함수 단원의 내용은 다음 절에서 자세히 다루기로 한다.

II.3 제7차 개정교육과정에 따른 함수의 지도

1. 함수 지도의 의의

제7차 개정교육과정에서 함수는 수학 전체를 조직하는 도구로 통합적인 아이디어의 필요성을 강조하며, 자연의 규칙을 관찰하고 표현하는 활동으로써 실생활의 활용을 통한 함수의 개념의 효용성 습득을 강조한다. 《2007년 개정교육과정 중학교 교육과정 해설》에 제시되어 있는 함수 영역의 지도의 의의는 다음과 같다.

> 자연 현상에서 관찰할 수 있는 여러 가지 규칙 중에는 한 값이 변하면 다른 값도 일정한 규칙에 따라 변하는 것들이 많이 있다. 이러한 규칙을 관찰하고 표현하는 활동은 이 영역의 가장 기초적인 학습 활동이라고 할 수 있다. 변하는 두 대상 사이에서 얻은 규칙성은 함수 개념의 이해에 기초가 된다.
>
> 함수 개념의 학습을 위해서는 수학의 여러 주제들을 연결 짓는 통합적 아이디어가 필요하다. 함수는 교육과정 전체의 공통된 주제일 뿐만 아니라, 현대 수학 전체를 조직하는 도구이다. 실생활이나 자연 현상에서 흔하게 찾아볼 수 있는 투입과 산출 관계에 대한 수학적 표현은 함수의 전형적인 모습이다. 동적인 변화 현상을 함수로 이해하고 표현할 수 있는 능력은 현대 사회의 경제 현상 및 기술 공학적인 문제 등을 수학적인 언어로 의사소통할 수 있게 해준다. 이러한 의사소통 능력은 표, 그래프, 식으로 표현되는 함수의 학습에서 큰 의미를 갖는다.
>
> 함수에 대한 학습은 두 변량 사이의 변화표를 만들어 그 그래프를 그려보거나, 주어진 함수의 성질과 그 그래프의 특징을 조사하는 등

과 같은 수학적 지식의 습득에 국한할 것이 아니라, 실생활을 활용하여 함수 개념의 효용성을 알게 하는 것이 필요하다.

2. 함수의 교육 내용

제7차 개정교육과정의 함수 단원의 교육 내용을 살펴보면, 초등학교에서는 규칙성 찾기, 수량 사이의 관계를 식으로 나타내기, 비와 비율, 정비례와 반비례를 학습하고, 중학교 1학년에서는 변화하는 두 양 사이의 대응관계로 함수의 개념을 도입하고, 함수를 그래프로 나타내는 활동을 하며, 2학년에서는 일차함수의 그래프의 성질을 익히고 일차함수를 활용할 수 있는 여러 가지 문제를 다룬다. 3학년에서는 이차함수의 그래프의 성질과 이차함수의 최댓값, 최솟값을 다룬다. 《2007년 개정교육과정 중학교 교육과정 해설》에서 제시하고 있는 각 학년별 자세한 함수 단원의 지도 내용은 다음과 같다.

가. 1학년

함수와 그래프 : 함수의 개념을 이해하게 한다. 함수 개념은 실생활에서 한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계를 이용하여 도입하며, 대응의 의미는 직관적인 수준에서만 다루고 구체적인 실생활의 예를 통하여 함수를 이해하도록 한다. 정의역, 공역, 치역을 알게 한다. 또한 순서쌍과 좌표, 함수의 그래프의 뜻을 이해하게 하고, 간단한 함수의 그래프를 그릴 수 있게 하며, 주어진 그래프를 보고 함수의 식을 구할 수 있게 한다. 중학교 1학년 수준에서 수 전체의 집합은 유리수 전체의 집합을 의미하고 정의역이 유리수 전체의 집합인 함수의 그래프는 연속이 되지 않지만, 이 수준에서는 함수의 그래프가 연속이 됨을 직관적으로 이해하는 정도로 다룬다.

함수의 활용 : 실생활의 간단한 소재 중에서 함수 관계가 있는 것을 찾아보고, 실생활 문제를 함수를 활용하여 해결할 수 있게 한다.

나. 2학년

일차함수와 그래프 : 일차함수의 의미를 이해하게 하고 표를 이용하여 일차함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다. 기울기, x절편, y절편의 뜻을 이해하게 하며, 이를 구할 수 있게 한다. 또한 일차함수의 그래프의 성질을 이해하고 기울기, x절편, y절편 등을 이용하여 주어진 조건에 맞는 일차함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

일차함수의 활용 : 일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식의 관계를 이해하게 하는데, 미지수가 2개인 일차방정식의 해를 좌표평면 위에 나타내어 보게 하고, 이 직선은 방정식을 변형하여 얻은 일차함수의 그래프인 직선과 같음을 알도록 한다. 일차방정식 $x = p$, $y = q$의 그래프를 이해하게 한다. 또한 연립일차방정식의 해는 두 일차함수의 그래프의 교점임을 이해하게 한다. 마지막으로 일차함수로 나타낼 수 있는 문제 상황에서 그 관계식을 구하고 이를 활용할 수 있게 한다.

다. 3학년

이차함수와 그래프 : 이차함수의 의미를 이해하게 하며, $y = ax^2$, $y = ax^2 + q$, $y = a(x-p)^2$, $y = a(x-p)^2 + q$의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하게 하고, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다. 이 때 최댓값과 최솟값은 정의역을 제한하지 않고 실수 전체인 경우만 다룬다.

II.4 수학적 오개념 형성의 원인

개인이 개념을 형성하는 과정에는 개인의 인지구조와 교수-학습 상황을 비롯한 많은 요인이 복잡하게 작용하기 때문에 수학적 오개념이 발생하는 원인을 밝히는 것이 쉽지 않지만, 최지선[17]에 따르면 오개념이 형성되는 원인은 인식론적 원인과 교수학적 원인으로 구분할 수 있다.

1. 인식론적 원인

수학적 오개념 형성의 인식론적 원인은 다시 지각적 특성에 의한 원인과 논리적 특성에 의한 원인으로 나누어 생각할 수 있다.

가. 지각적 특성에 의한 원인

학생의 지각적 특성에 의한 오개념의 형성 원인은 지각 우위적 사고, 구체적 관점의 집착, 경험에 의한 직관적 사고, 일상 언어의 영향 등으로 분석할 수 있다.

먼저, 지각 우위적 사고는 관찰 가능한 것에만 기초하여 생각하는 경향을 가지고 있는 것으로 이는 인식론적으로 지각, 사고 그리고 행위에서 학생들은 어떤 우연한 인상의 강도에 근거하여 매우 다양한 요소들을 명료하지 않은 심상으로 묶어 버리는 경향이 있기 때문에 발생한다. 개념의 모델을 너무 명백하게 지각할 수 있다면, 수학적인 사고보다는 지각 우위적인 사고를 하기 때문에 오개념이 형성되는 것이다. 학생들이 점, 직선, 원 등의 수학적 정의를 내리기 어려워하는 것은 그 개념에 대한 지각적 모델이 존재하기 때문이다.

두 번째로, 구체적 관점의 집착은 모든 물체를 그 물체가 가지는 근본적인 속성에 의해 본질화하려는 사고 경향인데, 한 물체가 가지는 속성들

을 다각적인 측면에서 연구하여 그 속성들의 위계라든가 상호관련성을 설명하려 하지 않고, 단지 그 물체가 가지는 외양적이고 일반적인 하나의 본질로 그 물체에 대한 모든 설명을 하려는 태도에 의해서 인식론적 장애를 가질 수 있다[17].

세 번째로 경험에 의한 직관적 사고에 의해 오개념이 발생하는데 직관적 사고는 그 의미가 자명하여 원시적인 느낌 그대로 사용되거나 상식적인 용어로 표현되어 여러 가지 현상에 대한 기술과 설명에 자주 사용된다. 따라서 매우 자명한 표상이나 관념에 의존하게 되는 추론이나 판단과정 그리고 수학학습 과정에서 직관적 사고를 배제할 수 없다. 학생들은 새로운 수학적 개념을 학습한 이후에도 경험에 의한 직관적 사고가 강하게 작용하여 장애를 일으키기도 한다.

네 번째로는 일상 언어의 영향으로 오개념이 형성될 수 있다. 발생적 측면에서 살펴보면 모든 개념은 구체적인 사물이나 행동에서 시작된다. 비록 그 의미가 매우 추상적이어서 현실과의 관계성을 찾을 수 없을지라도 개념의 원초적인 형태는 실재적인 것에서 시작된 것이다. 따라서 개념은 일상의 언어를 이용해서 정의된 것들이 많은데, 수학적 개념의 경우 그 용어가 일상생활에서 사용되는 말이라 하여도 같은 의미로 사용된다고 볼 수는 없으며, 대부분의 경우에는 다른 의미로 사용된다. 모든 학생은 일상생활의 영향을 받고 있으므로 수학적 의미보다 일상적 의미에 더 많이 노출되기 때문에 수학적 개념을 수학적 의미로 받아들이는데 어려움을 가질 수 있다.

나. 논리적 특성에 의한 원인

논리적 추론 특성에 의한 원인은 논리적 조작 능력의 미숙, 인과적 사고, 과대 일반화 경향, 제한된 주의집중, 잘못된 관찰 또는 비논리적 추론

등으로 분석할 수 있다.

첫 째로 학생의 논리적 조작능력의 미숙으로 인해 적절한 개념을 형성하지 못하여 쉽게 오개념이 형성될 수 있다. Piaget의 인지발달 이론에 따르면 효과적 학습이 이루어지기 위해서는 학습과제에 따라 적정한 수준의 인지발달이 요구되며 일반적으로 수학적 개념은 논리적이고 형식적인 사고가 가능한 형식적 조작단계에 이르러야만 이해가 가능하다. 대수 개념은 조작적 대상에서 구조적 대상으로 관점이 옮겨져야 올바르게 그 개념을 획득할 수 있는데, 학생들은 논리적 조작능력이 미숙하기 때문에 경험적 사고를 하게 된다. 특히 함수 개념에서는 구조적 관점이 획득 되어야 하지만 구조적인 대상보다는 조작적인 대상이라는 오개념과 한 변수를 다른 변수로 나타낼 수 있는 경우에만 함수라고 생각하는 오개념이 나타난다.

두 번째로 학생은 모든 사건에 대해서 원인 결과의 관점에서 추론하려는 경향성을 지니는데 이러한 인과적 사고는 아동들에게 편안함과 만족감을 줄 수 있으나 오개념 형성원인의 원인이 된다.

세 번째는 과대 일반화 경향으로 오개념이 형성되는데, Vygotsky는 아동의 사고과정을 분석한 결과 처음부터 경험을 일반화하는 방향으로 개념을 형성한다고 말한다. 개념형성은 크게 세 가지 국면으로 이루어지지만 각 국면은 모두 일반화하려는 경향을 가지며, 전체적으로는 과도하게 일반화하는 경향이 있음을 지적하였다. 특히 중등학교 수학학습과정에서 나타나는 오개념은 이전에 학습했던 대안적 개념에서 유용하게 사용했던 규칙을 새로운 개념에 그대로 적용하려는 일반화에 의해 형성되는 경우가 많다.

네 번째로 학생들은 개념의 부분적인 특징에만 주목하여 생각하고, 개념의 모든 측면을 적절히 고려하지 못하는 경우가 많은데, 이러한 제한된

주의집중 역시 오개념 형성의 원인이 된다.

마지막으로 오개념의 원인은 잘못된 관찰이나 비논리적 추론에서도 찾을 수 있다. 즉 정확한 관찰을 할 수 없거나 관찰 결과를 논리적으로 생각하지 않음으로써 오개념이 생겨나는 것이다.

2. 교수학적 원인

교사는 가르치기 위한 지식을 잘 이해해야 하고, 교수학적 이해를 돕기 위한 분석을 해야 한다. 그러한 다음 가르칠 대상인 학생들을 고려하여 지식을 재구성하게 되는데, 이 과정에서 교사가 오개념을 갖거나 적절한 교수학적 변환에 실패하거나 지식의 전달 과정에서 그 표현 형식과 의미가 변질되는 경우 학생들에게 오개념을 형성시키게 된다.

오개념이 형성되는 교수학적 원인으로는 첫 번째, 학생들에게 제한된 학습 경험을 제공하는 경우 학생들은 더 넓어진 문맥에서 오개념을 갖게 될 수 있다. 개념이나 절차에 대한 경험을 하는 동안 학생들은 공통적인 것으로 보이는 것은 무엇이든지 경험하게 되고, 이미 알고 있는 정보와 새로운 정보를 연결하여 새로운 일반화에 도달하고자 하는데 제한된 학습 경험만을 한 학생은 제한된 결과에 대한 일반화를 하게 되기 때문이다. 교사는 다양한 의미를 고려하여 다양하고 충분한 예시를 제시하지 않는다면 학생들은 오개념을 형성하게 될 수 있다.

두 번째로 교과과정의 제시 순서에 의해 학생들로 하여금 오개념을 형성시킬 수 있다. 일반적으로 수학적 개념은 다양한 측면의 의미를 가지고 있는 반면, 수학교과서는 그 개념의 제 측면을 동시에 제공하지 못하고 선형적으로 제시하는데, 학생들이 좀 더 쉽게 학습할 수 있도록 개념의 제 측면을 고려해서 우선순위를 정하고, 그에 따라 제시순서가 결정된다. 그 결과 수학적 지식이 문맥과 분리되어 고립된 형태로 제시되기 쉽고, 학생들

은 그렇게 제시된 지식을 순차적으로 학습하고, 교과과정의 제시순서에 따라서 학습한 내용을 일반화하거나 관련된 개념을 독립적으로 학습하게 된다. 내용을 독립적으로 학습하여 서로 충돌하지 않도록 구분하는 사고를 지식의 구획화 현상이라고 하며, 이는 오개념이 형성되는 원인이 될 수 있다.

세 번째로는 극단적인 수학 교수현상을 오개념 형성의 원인으로 들 수 있다. 교사는 수학지식을 학생들에게 전달할 때, 학생들이 좀 더 명확하게 그 개념을 이해하기를 기대한다. 이러한 교사의 기대는 주어진 지식을 필요이상으로 변형시킬 수도 있으며, 부적절한 교수현상을 일으킬 수도 있다. 이러한 경우를 Brousseau는 극단적인 수학 교수현상이라고 보았는데 이는 학생들에게 오개념을 형성하게 만든다[17].

마지막으로 교사의 오개념으로 인해 학생들이 오개념을 가질 수 있다. 교수학습 과정은 교사가 주어진 수학적 개념을 올바르게 이해하는 것으로부터 시작된다. 따라서 교사가 올바른 수학적 개념을 가지고 있지 않다면, 그 교수학습과정이 올바르게 이루어질 것이라고 예상할 수 없다. 그러나 실제로 많은 연구결과가 교사들이 오개념을 가지고 있음을 드러내주고 있어 학생이 교사를 통해 학습된 수학적 개념이 오개념일 수 있음을 경고한다. 교사의 오개념은 다양한 방법으로 학생의 오개념을 야기할 수 있다. 오개념의 직접적인 제시, 학생의 오개념에 대한 강화, 제한된 학습경험 등이 그러한 경우이며, 따라서 교사의 오개념에 대한 경각심이 요구된다.

III 중학교 함수 단원에서 나타나는 오개념

현재 중학교 학생들이 사용하고 있는 교과서는 7차 교육과정의 개정안을 따르고 있는데, 제7차 교육과정 당시 중학교와 고등학교에서의 함수의 정의가 달라져서 생기는 혼란을 어느 정도 보완했다고 말할 수 있다.

그러나 아직도 중학교 학생들에게 함수 단원은 매우 버거운 것이 사실이며, 함수를 이해하는데 어려움을 호소하고 있고 여러 가지 오개념을 가지고 있는 것도 사실이다. 따라서 이 단원에서는 중학교 학생들이 함수에 대하여 가지는 여러 가지 오개념을 분석하고, 이를 해소하기 위한 방안을 마련해 보고자 한다.

III.1 오개념의 유형분석

중학교 학생들이 함수 단원을 학습할 때 갖게 되는 오개념은 어떤 것들이 있는지 선행연구를 분석하여 수학적 오개념의 형성원인에 따라 범주화 하고자 한다. 함수의 오개념에 대한 선행 연구 결과는 김소영[5], 신인숙[10] 등에 나타난다.

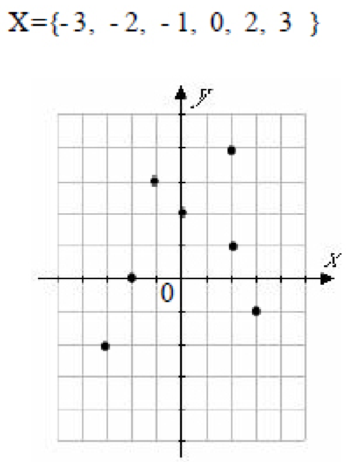
1. 인식론적 원인에 의한 함수의 오개념

앞서 논의한 대로, 인식론적 원인에 의한 오개념은 지각적 특성에 의한 오개념과 논리적 특성에 의한 오개념으로 구분할 수 있다.

지각 특성에 의한 오개념은 첫째로 지각 우위적 사고에 의한 오개념을 들 수 있다. 이는 수학적인 사고 보다는 관찰 가능한 것에만 기초하여 생각하는 지각 우위적인 사고를 하기 때문에 형성되는 오개념으로, 학생들은

그래프를 관찰하여 그래프가 곧 함수라는 오개념을 가지게 되고 그래프의 모양에 따라서 함수 여부를 판단한다. 이런 유형의 오개념으로는 다음과 같은 예를 들 수 있다.

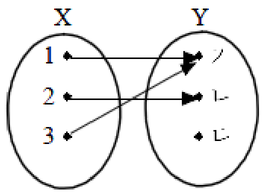
먼저, 중학교 1학년 과정에서 함수는 정비례와 반비례를 써서 도입하며, 간단한 정비례, 반비례의 그래프가 제시된다. 이에 따라 증가하는 그래프의 함수를 정비례로 생각하거나 곡선으로 그려진 함수를 반비례 함수와 동일시 한다. 또는 그래프가 선으로 나타나지 않으면 함수가 아니라고 판단하여 한 점은 함수가 될 수 없거나, 불연속적으로 그려진 그래프는 함수가 아니라고 생각한다. 김명진[3]의 조사에 의하면 그림[1]의 그래프는 x가 2일 때 대응되는 y의 값이 2개 이기 때문에 함수가 아닌데, '점은 함수가 아니다.', '점들을 연결했을 때 직선이나 곡선으로 나타나지 않기 때문에 함수가 아니다.' 라는 오개념을 가지고 함수를 판단하였다.



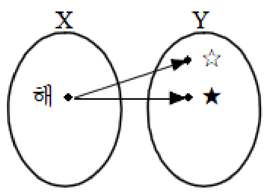
그림[1]

지각 우위적 사고에 의한 오개념은 화살표 다이어그램에서도 나타났는데, 김명진[3]에 의하면 그림[2] 의 화살표 다이어그램을 보고 함수가 아니

라고 판단한 학생들이 23.08%였다. ‘ㄱ’에 겹쳤기 때문에 함수가 아니거나 ‘ㄷ’에 대응하는 x가 없기 때문에 함수가 아니라고 판단했기 때문이다. 또한 그림[3]에 대하여는 공역의 모든 원소가 정의역의 원소와 하나씩 연결되었기 때문에 함수라고 생각하는 학생들이 오답자의 31.25%를 차지하였다. 이 두 가지 경우 역시 함수를 판단할 때 함수의 정의를 이해하여 그것을 토대로 판단하는 것이 아니라 시각적인 것이 사고보다 앞서 눈에 보이는 것으로 판단함을 알 수 있다.



그림[2]



그림[3]

또한 함수의 그래프에서 기울기와 높이를 혼동하거나 그래프의 전체적인 모양과 문제 상황의 시각적 특징들 또는 축이나 변수에 대한 잘못된 판단으로 나타나는 오개념도 있다.

지각 특성에 관한 오개념의 두 번째로 구체적 관점의 집착에 의한 오개념은 모든 물체를 그 물체가 가지는 근본적 속성에 의해 본질화하려는 사고 경향인데, 함수에 있어서 규칙성은 개념의 이해에 기초가 되는 것이지 본질은 아님에도 규칙에 집착하여 모든 함수는 규칙이 있어야 하며 규칙이 없는 것은 함수가 아니라는 오개념을 가진다. 또한 식의 꼴에 집착하여 함수를 판단하기도 한다. 김소영[5]의 조사에 따르면, 중학교 2학년 학생들에게 함수의 정의를 물어보았을 때 16.3%의 학생들이 함수를 공식이나 대

수적인 용어로 생각하고 있었다. 중학교 2학년 과정에서 $y=ax+b$라는 식을 중심으로 일차함수를 배우고 있기 때문에 함수를 일차함수 $y=ax+b$ 꼴이라고 생각하는 것이다. 그래서 함수가 그래프 또는 화살표 다이어그램으로 주어졌을 때, $y=ax+b$의 꼴이 아니기 때문에 함수가 아니라고 인식한다. 마찬가지로 중학교 1학년 학생들도 함수를 $y=ax$의 꼴로 정의하거나 조작이나 연산의 개념에 집착하여 함수를 어떠한 식이 주어지면 그 식에 x에 해당하는 값을 대입하여 y값을 얻는 것으로 생각하기도 한다.

한편 그래프의 특정한 형태에 집착하여 오개념을 가지는 경우도 있다. 정비례와 반비례 함수의 그래프에 익숙한 학생들의 경우 함수의 그래프는 선으로 이루어져야 한다거나 증감이 있어야 한다거나 원점을 중심으로 대칭된 모양이 나와야 한다고 생각한다. 또, 기울기에 대한 대수적인 표현에 집착하기 때문에 기울기 개념을 대수적으로 정의할 수는 있으나 그래프적으로 기울기가 의미하는 바에 대하여는 잘 알지 못하는 오개념을 갖기도 한다.

지각 특성에 의한 오개념 중 세번째로 경험에 의한 직관적 사고에 의한 오개념은 직관적 사고가 추론이나 판단 과정에 나타남으로써 생기는 것이다. 이를테면 수 체계에 대한 사고 영역이 자연수나 정수에 머물러서 유리수, 실수를 다루는데 장애를 가져오는 것을 들 수 있는데, 주어진 함수의 등식에서 x에 자연수(정수)를 대입해 보아서 y의 값이 자연수(정수)가 아니면 x에 대응하는 y가 없다고 생각하여 함수가 아니라고 판단한다. 또한 함수에서 정의역이 $\{x||x| \leq 2\}$로 주어진 경우 이를 연속적인 실수의 집합으로 생각하지 못하고 {-2, -1, 0, 1, 2}로 생각하기도 한다.

또한 함수에 관련해서는 중학교 1학년에서 배운 정비례, 반비례 관계가 함수 개념의 반을 지배하게 되는 경우를 들 수 있고, 일반적인 함수, 정의

역, 공역, 치역 등의 개념을 이해하는데 방해가 된다.

지각 특성에 관한 오개념의 네 번째 유형인 일상 언어의 영향에 의한 오개념은 일상적 언어가 수학적 개념 형성을 방해하여 생기는 것이다. 예를 들면 일상용어로서의 '모임'이 오히려 '집합'의 개념에 영향을 미치는 것이다. 함수에서 일어날 수 있는 이러한 종류의 오개념으로는 '대응', '관계', '절편' 등을 들 수 있다.

다음으로, 논리적 특성에 의한 원인에 따른 함수의 오개념은 첫 째로 논리적 조작 능력의 미숙에 의한 오개념이 있다. 학생들은 논리적 조작능력이 미숙하기 때문에 경험적 사고를 하게 되고, 특히 함수 개념에서는 구조적 관점이 획득되어야 하는데 함수를 구조적인 대상보다는 조작적인 대상이라고 생각하는 오개념을 갖게 된다. 또한, 학생들은 함수의 정의를 제대로 이해하지 못하고 함수를 일반적인 대응 또는 일대일대응으로 이해하거나 규칙이나 관계, 공식이나 함숫값으로 이해한다.

논리적 특성에 의한 오개념의 두 번째로로 인과적 사고에 의한 오개념은 모든 사건을 원인과 결과의 관점에서 추론하려는 경향에 의해 형성되는 것인데 학생들은 함숫값은 독립변수에 따라서 변화되어야 한다는 선입관을 가지고 있으며 이러한 인과적 사고에 의해 x의 값이 변화되어도 y의 값은 변하지 않는 상수함수를 함수로 받아들이는데 어려움을 겪는다.

논리적 특성에 의한 오개념의 세 번째 유형인 과대 일반화 경향에 의한 오개념은 이전에 학습했던 대안적 개념에서 유용하게 사용했던 규칙 등을 새로운 개념에 그대로 적용하려는 일반화에 의해 형성되는 것이다. 이에 대한 오개념은 두 점에 의해 결정되는 직선이 오직 하나라는 선형함수의 특별한 성질을 지나치게 일반화함으로써 두 점에 의해 결정되는 함수의 그

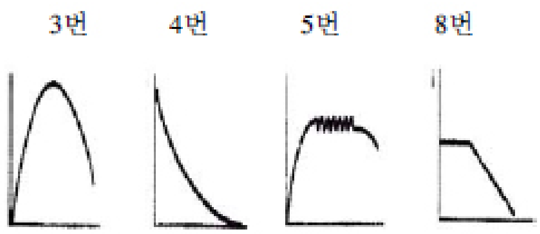
래프는 오직 하나라고 여기는 것이다. 또한 교육과정상 방정식 이후에 함수를 학습하는데 x가 미지수의 개념으로 지나치게 강조되어 기억된 학생들이 변수를 이해하는데 한계를 느끼게 된다. 변수를 미지수라고 생각하고 있는 학생들은 x가 정의역에 들어있는 원소를 대표할 수 있다는 것을 인식하지 못하여 정의역에 해당되는 숫자와 x를 함께 나타내는 오류를 범하기도 한다. 또 함수의 관계식에 대한 문제를 연산 기술 등을 강조한 방정식으로만 풀려고 하는 경우도 있다.

논리적 특성에 의한 오개념 중 네 번째 유형인 제한된 주의 집중에 의한 오개념은 학생들이 개념의 부분적인 특징에만 주목하여 생각하고 개념의 모든 측면을 적절히 고려하지 못하는 것이다. 함수는 현실세계의 상황을 이해하고 여러 가지 수학문제를 해결하는 도구로써의 역할을 하는데 그런 함수를 일상생활과 연결 짓지 못하고, 실제 맥락에서 있을 수 있는 함수와 그래프의 다양한 형태를 이해하지 못한다. 또한 대응의 관계로 함수를 배우는 경우 대응만을 생각하고 변화상태, 종속의 개념에는 주목하지 못하여 함수의 다양한 측면을 보지 못하기도 한다. 함수를 규칙성, 대수식, 그래프의 측면으로만 생각하는 것도 이러한 원인에 따른 오개념이라고도 할 수 있다.

논리적 특성에 의한 오개념의 마지막 유형인 잘못된 관찰 또는 비논리적 추론에 의한 오개념은 정확한 관찰을 할 수 없거나 관찰 결과를 논리적으로 생각하지 않음으로써 오개념이 생겨나는 것인데, 정비례함수와 증가함수를 혼동하고 특히 $y = ax + b(b \neq 0)$ 꼴도 정비례식이라고 생각하는 오개념을 갖는다. 또 감소함수와 반비례 함수를 혼동하여 $y = ax$에서 a가 음수인 경우를 반비례함수라고 생각하기도 한다. 두 점을 지나는 그래프는 모두 직선이라고 생각하거나, x축과 평행한 직선의 식을 구할 때 직선이라

는 이유로 일차함수 식으로 답을 하기도 한다.

한편, 이종희, 김부미[14]에 따르면 학생들에게 "풍선을 최대로 불었다가 놓아 버리면 풍선은 방바닥을 이리저리 돌아다닐 것이다. 이 때, 풍선 속 공기의 양과 시간의 관계를 표현한 가장 적합한 그래프를 고르고 그 선택 이유를 써라(단, 가로축인 x축은 시간을 의미한다)." 라는 문제를 제시하였는데, 이에 대해 학생들이 오개념을 가지고 있음을 확인하였다. 이 현상을 그래프로 해석할 때, 일부 학생들은 처음 풍선 속 공기의 값이 최대이고 점점 공기의 양이 줄어들기 때문에 그림[4]의 4번 그래프를 선택하였고, 다른 학생들은 처음에 풍선 속의 공기가 빨리 빠져나가고 일정 시간이 지나면 천천히 빠져나가기 때문에 속도를 y축으로 하여 3번 그래프를 선택하였다. 그 외에도 공기가 빠지면 풍선이 이리저리 퉁겨 다니기 때문에 지그재그 형태의 그래프인 5번을 선택한 학생들도 있었다. 이는 비논리적인 추론에 따른 오개념이라고 할 수 있다.



그림[4]

이 외에도 비논리적인 추론에 의한 오개념은 다양하게 발생한다.

2. 교수학적 원인에 의한 함수의 오개념

교수학적 원인에 의한 함수의 오개념은 제한된 학습 경험의 제공에 의한 오개념, 극단적인 수학 교수 현상에 의한 오개념, 교사의 오개념에 의한 오개념이 있다.

먼저 제한된 학습 경험의 제공에 의한 함수의 오개념은 함수를 가르칠 때 다양한 수학적 상황과 충분한 예시를 제시하지 않아 오개념이 형성되는 것인데 이에 대한 오개념은 다양하게 나타난다. 학생들은 수업시간에 경험에 보지 못한 그래프 또는 새로운 형태의 식은 함수가 아니라고 생각하고 2학년 학생들의 경우엔 분수식, 이차식은 함수가 아니라고 생각한다. 제한된 학습경험에 의해 함수는 하나의 규칙에 의해서 주어져야 한다는 오개념을 형성하고 한 점을 원소로 하는 함수나 규칙이 없는 함수는 학생들에게 익숙하지 않기 때문에 함수로 쉽게 인식하지 못한다. 교사들이 학생들에게 변수 개념을 지도할 때, 그 다양한 의미에 대한 고려 없이 몇 가지의 예를 통해 직접적으로 도입하여 지도하기 때문에 학생들이 변수 개념에 대해 많은 오개념을 갖기도 한다. 예를 들어 함수식의 변수 x가 s로 바뀌어 제시되는 경우 학생들은 x가 없어서, 또는 s는 본 적이 없어서 함수가 아니라고 판단한다. 이것은 학생들이 여러 가지 변수를 다루는 연습을 하지 못하였기 때문에 함수의 변수는 항상 x와 y여야만 한다고 생각하는 것이다[5]. 또한 다대일 대응에 대한 충분한 교육적 예시의 부족과 일대일 대응을 중심으로 한 함수 개념의 도입은 학생들에게 함수가 일대일 대응 관계를 통해 구성된다는 그릇된 개념 이미지를 심어줄 수 있으며, 그들로 하여금 일대일 대응이 아닌 대응관계에서 비롯될 수 있는 함수 그래프를 부정하게 한다[15].

한편, 교과서에는 함수를 설명하기 위해 가로와 세로의 길이 변화에 따른 사각형의 넓이 또는 둘레의 길이 구하기와 같은 예들이 주로 제시된다. 이와 같은 전형적이고 탈맥락적인 예들은 함수에 대한 편협한 개념을 다루어 학생들이 함수 개념의 본질적인 면을 이해하는데 어려움을 준다. 그리고 함수가 학습자에게 생활주변에서 일어나는 현상을 관찰하여 그 속에 내재된 수학적 법칙이나 형식을 발견하고 이를 구조화 시키는 중요한 개념임에도 불구하고 함수 개념을 이미 생성된 산물로써의 지식으로 가르치기 때문에 학생들은 함수의 본질적인 의미를 이해하지 못하고, 함수를 구성적 개념보다는 조작적인 개념에만 초점을 맞추어 오개념을 형성하게 된다.

두 번째로는 극단적인 교수 현상에 의한 오개념이다. 교사는 학생들에게 수학지식을 전달할 때, 학생들이 좀 더 명확하게 그 개념을 이해하기를 기대하여 부적절한 교수 현상을 일으킬 수도 있는데, 함수의 형식적인 개념을 학습하기 위한 화살표 도해가 이후의 그래프로 표시되는 함수개념에 오개념이 되기도 하고, 기울기와 절편 등의 값을 관계식에서 곧바로 찾는 방법을 가르쳐줌으로 그것들의 본래의 의미와 개념을 파악하지 못하여 오개념이 형성되기도 한다.

마지막으로 교사의 오개념에 의해서 학생들이 오개념을 갖기도 한다. 제7차 교육과정에서는 함수를 종속에 따른 개념으로, 제7차 개정교육과정에서는 ‘대응’이라는 말은 쓰지 않고 대응에 따른 개념으로 가르치는데 이전 교육과정에서 대응관계에 의한 함수를 배운 교사가 자신이 갖고 있는 개념대로 가르치는 경우 학생들은 혼란을 겪게 되고 오개념을 갖게 된다.

III.2 오개념 예방을 위한 방안

학생들이 가지고 있는 오개념은 어느 한 가지 원인에 의해서만 발생하는 것이 아니라 여러 가지 원인이 복합적으로 작용하여 형성되는 것이고, 인식론적인 원인에 의하여 발생하는 경우가 많기 때문에 원인을 근본적으로 해결하는 것은 쉽지 않겠지만 오개념을 최대한 줄이고 예방할 수 있는 방안을 모색하는 것은 의미 있는 일일 것이다. 따라서 오개념 형성을 예방하기 위해 다음과 같은 방안을 제시하고자 한다.

첫째, 학생들이 함수를 매우 어려워하고 함수에 대하여 거부감을 갖고 있음을 인식하고 실생활에서 함수가 이용되는 다양한 예를 제시함으로써 함수의 중요성 및 필요성을 깨닫게 하고 흥미를 유발시킨다.

둘째, 함수의 본질을 다루는 충분한 개념학습을 강조하고 이를 활용할 수 있는 지도에 중점을 둔다[9].

셋째, 함수의 정의를 포함한 여러 가지 개념의 학습에서 개념적 지식을 충분히 강조하여 습득시킨 후에 절차적 지식을 스스로 깨닫도록 한다.

넷째, 함수의 정의를 명확하게 설명해주며 함수를 판단함에 있어서 시각적인 특징이나 형식보다는 정의를 토대로 판단할 것을 강조한다.

다섯째, 함수의 개념을 지도할 때, 정비례, 반비례뿐 아니라 그래프, 문장, 화살표 다이어그램에서 나타나는 다양한 예를 제공한다. 변수지도에 있어서도 다양한 의미를 고려하여 충분한 예들을 제시한다.

여섯째, 그래프는 그래프를 그리는 기술적인 측면을 중심으로 지도하기보다 함수의 규칙을 파악하는 내용적인 측면을 강조함으로써 그래프의 역할과 필요성을 잘 이해하도록 한다.

일곱째, 그래프를 다룰 때에 현재 교과서에서 예시로 나오는 규칙적이고 연속적인 그래프만 가르칠 것이 아니라 불연속적인 그래프, 이산적인

그래프도 제시하고 현실 상황에서 다루는 그래프는 좀 더 복잡하고 다양한 모양을 나타낼 수 있음을 알 수 있도록 다양한 형태의 그래프를 보여준다.

여덟째, 학생들이 갖고 있는 오개념을 충분히 연구하여 그에 대한 지도 방안을 찾고 학생들에게 반례를 제시함으로써 동일한 오개념이 형성되는 것을 줄일 수 있도록 한다.

아홉째, 학생들의 인지수준을 파악하여 그 인지 수준에 알맞은 학습지도안을 짜고 함수 개념 설명에 있어서 적절한 용어를 선택하고 학생들의 수준을 고려하여 설명한다.

마지막으로, 교사는 교육과정이 바뀜에 따라 달라지는 정의나 개념 및 해당 교육과정에서 제시하는 지도내용을 정확하게 습득하고 그에 따른 교수를 하여 학생들에게 혼란이 없도록 한다.

IV 결론 및 제언

본 연구의 주요 목적은 중학교 함수 단원에서의 오개념의 유형 분석과 오개념을 예방할 수 있는 방안의 모색에 있다. 이를 위해 함수의 오개념에 대한 선행 연구를 토대로 중학교 함수 단원에서 학생들이 갖고 있는 함수에 대한 오개념을 알아보고 형성원인에 따라 오개념의 유형을 범주화하였다.

먼저 오개념이 형성되는 원인을 최지선[17]의 분류에 따라 인식론적 원인과 교수학적 원인으로 분류하고 각각에 대한 세부적인 원인에 따라 오개념의 유형을 분석한 결과를 요약하면 다음과 같다.

지각 우위적 사고에 의해 학생들은 그래프가 곧 함수라는 오개념을 갖게 되고 그래프의 모양에 따라서 함수 여부를 판단하여 '점 또는 불연속적으로 그려진 그래프는 함수가 아니다.' 등의 오개념을 가지며 함수를 정의에 의해 판단하지 않고 관찰 가능한 것에만 기초하여 판단한다. 구체적 관점의 집착에 의한 오개념은 '규칙이 없는 것은 함수가 아니다.', '함수는 $y = ax + b$의 꼴이어야 한다.' 등이 있고 함수의 그래프의 특정한 형태에 집착하여 오개념을 갖는다. 경험에 의한 직관적 사고에 의해서는 수체계에 대한 사고영역이 자연수나 정수에 머물러서 함수에서 정의역과 치역에 대한 오개념이 형성된다. 또한 논리적 조작 능력의 미숙에 의해 함수를 구조적인 대상보다는 조작적인 대상이라고 생각하고, 함수의 정의를 제대로 이해하지 못하며 규칙이나 관계, 공식이나 함숫값으로 이해하는 오개념을 갖는다. 인과적 사고에 의한 오개념으로는 함숫값은 독립변수에 따라서 변화 되어야 한다는 것이 있고 이에 따라 상수함수를 함수로 받아들이는데 어려움을 겪는다. 과대 일반화 경향에 의한 오개념은 함수의 관계식에 대

한 문제를 방정식으로만 풀려고 하는 오개념 등이 있다. 제한된 주의 집중에 의한 오개념은 함수의 다양한 측면을 보지 못하고 함수를 규칙성, 대수식, 그래프의 측면으로만 생각하는 것이다. 잘못된 관찰 또는 비논리적 추론에 의한 오개념은 정비례함수와 증가함수, 반비례함수와 감소함수를 혼돈하고 두 점을 지나는 그래프는 모두 직선이라고 생각하는 오개념이 있다. 한편, 교수학적 원인에 의해서 제한된 학습 경험의 제공으로 인한 함수의 오개념은 '수업시간에 경험에 보지 못한 그래프 또는 분수식, 이차식은 함수가 아니다.', '함수의 변수는 항상 x와 y여야만 한다.' 등이 있으며 학생들이 함수 개념의 본질적인 면을 이해하는데 어려움을 갖게 된다. 이 밖에도 극단적인 교수 현상과 교사의 오개념에 의해 오개념이 형성되기도 한다.

이러한 오개념을 예방할 수 있는 방안으로는 학생들이 함수의 중요성과 필요성을 깨닫고 흥미를 가질 수 있도록 실생활에서 함수가 이용되는 다양한 예를 제시하고 함수의 형식보다는 정의와 개념 및 본질을 강조한다. 그래프와 식에 있어서는 교과서에 나와 있는 예시 외에 함수의 정의를 만족하는 충분한 예시를 제시하고 특히 그래프는 실제 현실에서 다루는 다양하고 복잡한 것들도 보여준다. 또한 교사는 학생들의 오개념을 파악하여 학생들에게 미리 반례를 제시함으로써 동일한 오개념이 형성되는 것을 막도록 하며 학생들의 인지수준에 알맞은 학습지도를 하고 해당 교육과정에서 제시하는 함수 단원의 내용을 정확히 알고 지도함으로써 학생들에게 혼란이 없도록 하고 무엇보다 학생들이 개념을 얼마나 이해하고 있는지 파악하고 지도 내용 및 방법을 충분히 연구하여 효율적인 지도를 함으로써 학생들로 하여금 바른 개념을 습득하도록 해야할 것이다.

이를 토대로 학생들이 오개념을 극복하고 올바른 개념을 이해하고 확립하도록 도울 수 있기를 기대한다.

참고 문헌

[1] 강옥기 (2006), 제7차 교육과정에 따른 중등수학 교재연구, 경문사.

[2] 김남희 외 (2009), 수학교육과정과 교재연구, 경문사.

[3] 김명진 (2000), 중학교 2학년 학생들의 함수 개념에 대한 실태 조사, 한국 교원대학교 대학원 석사학위 논문.

[4] 김명진 (2010), 함수 지도와 인식론적 장애, 경북대학교 교육학 석사학위 논문.

[5] 김소영 (2008), 중학교 2학년 학생들이 지닌 함수에 대한 오개념 유형 분석과 교정에 관한 연구, 관동대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[6] 박영애 (2007), 함수 학습에서 발생하는 오류 유형과 지도 방안: 중학교 1학년 함수단원을 중심으로, 아주대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[7] 박예림 (2010), 수학 문제해결 과정에서 발생하는 오류 유형 분석-7차 개정 중학교 1학년 함수 중심으로, 울산대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[8] 송미경 (2008), 수학교 교육과정 비교·분석(제1차 제7차 및 2006년 개정 교육과정의 중학교 함수단원을 중심으로), 서원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[9] 송순희 , 오정현 (1997), 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구, 한국수학교육학회, 수학교육 제 36권, 제1호, 11-22.

[10] 신인숙 (1996), 중학생의 함수에 대한 오개념 및 오류에 관한 연구, 한국 교원대학교 대학원 석사학위 논문.

[11] 신주식 외 (2007), 2007년 개역교육과정 중학교 교육과정 해설: 수학, 교육과학기술부.

[12] 우정호 (2006), 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

[13] 이영하 , 정주연 (2008), 실용성 목표 관점에서의 중학교 함수 단원 분석과 그에 따른 개선 방안, 한국수학교육학회, 수학교육 제 47권, 제3호, 239-259.

[14] 이종희 , 김부미 (2003), 교수학적 처방에 따른 중학생들의 일차함수오 개념의 변화와 그 효과 분석, 대한수학교육학회, 학교수학 제 5권 제 1호, 115-133.

[15] 정혜경 (2007), 중학교 함수개념의 오류에 관한 연구, 전남대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[16] 조완영 , 양재식 (2003), 중학교 1, 2학년 학생들의 함수 개념 이미지와 함수 정의 능력, 한국수학교육학회, 수학교육 논문집 제 15집, 147-152.

[17] 최지선 (2002), 중등학교 수학 학습에서 나타나는 오개념에 대한 고찰 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

ABSTRACT

Misconceptions of Functions in Middle School Mathematics

Park, Hee Jung

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education

Sungshin Women's University

Supervised by Kang, Byung Gai Ph. D.

The theory of function takes a lot of weight over the entire range of the school mathematics. Therefore, it is very important in mathematics education to understand and utilize the functions. However, it is difficult to identify the accurate conception of the function and many of the students form misconceptions in the process of learning the function.

In this paper, we analyze some of misconceptions that students may have in the function part of middle school mathematics and suggest teaching methods for reducing them. Prior to analysis, we investigate the concept of functions in the history of Mathematics, examine the shifting concept of function according to the variation of educational curriculum in Korea, and investigate the cause of forming mathematical misconceptions.

The cause of the formation of misconceptions is primarily divided into epistemological causes and pedagogical causes. The epistemological causes

is categorized cause by perceptual characteristics and cause by logical characteristics.

As results of the study, we have seen that misconceptions about the function which students may have are as follows: students seem to determine a function by the shape of graphs or formulas due to the cause of perceptual characteristics, and consider the function as a operant object not structural object due to the cause of logical characteristics. In addition, by the pedagogical cause, students tend to think that graphs or formulas which they did not learn in class are not function.

This study suggests alternatives to prevent the formation of misconceptions. First, we suggest that students should be learned contents appropriate to their cognitive level. and we suggest more intrinsic aspects of the function than technical aspects. Sufficient examples to consider the various meanings of the function should be provided. Above all, schools and teachers should arouse students' interest by presenting various situations to use the function in daily life.