

심 성 아 教授指導  
碩士學位 請求論文

중학교 수학활동 수업을 위한  
GSP자료개발

- 테셀레이션을 중심으로 -

2012

誠信女子大學校 教育大學院  
教育學科 數學教育專攻

변 윤 화

중학교 수학활동 수업을 위한  
GSP자료개발

- 테셀레이션을 중심으로 -

심 성 아 教授指導

이 論文을 碩士學位論文으로 提出함

2011年 11月

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

변 윤 화

# 認 准 書

변운화의 碩士學位 論文으로 認准함.

審査委員 강 병 개 印

審査委員 김 주 흥 印

審査委員 심 성 아 印

2011年 11月

誠信女子大學校 教育大學院

## 논문 개요

# 중학교 수학활동 수업을 위한 GSP자료개발

## - 테셀레이션을 중심으로 -

본 논문은 GSP를 이용한 활동수업 자료를 테셀레이션을 중심으로 연구하였다. GSP라는 프로그램을 통해 테셀레이션이 가지고 있는 수학 교육적 가치를 직접 조작하고 연구함으로써 효율적인 수업이 되도록 하는데 있다.

본 논문에서 연구하는 내용은 다음과 같다.

첫째, 테셀레이션의 정의 및 개념을 알아보고, 테셀레이션의 종류별 특징에 대해 알아본다. 또 테셀레이션의 종류를 구체적인 예와 함께 살펴본다.

둘째, GSP를 소개하고 사용방법을 더 구체적으로 제시한다.

셋째, 테셀레이션의 변환 즉, 다각형의 내각과 외각, 평행이동, 반사, 회전에 대하여 연구하고 GSP를 활용하여 수학적 개념의 관계를 이해하도록 구체적 과정을 제시한다.

넷째, 테셀레이션을 직접 조작해 볼 수 있는 교수·학습 자료를 제시하고, GSP를 활용한 테셀레이션 프로그램 수업지도안을 작성하여 소개한다.

본 연구에서는 각 변환에 대해 GSP로 조작해 볼 수 있도록 학습자료를 제시하였고, 직접 교실에서 적용하지 못해 시나리오 수업지도안을 첨부하였다. 앞으로 테셀레이션 뿐만 아니라 다양한 GSP를 활용한 연구가 지속된다면 수학을 이해하는데 많은 도움이 될 것이다.

# 목 차

## 논문개요

I. 서론 .....	1
1. 연구의 필요성 및 목적 .....	1
2. 연구의 내용 .....	2
3. 기대되는 효과 .....	2
4. 연구의 제한점 .....	3
II. 본론 .....	4
1. 테셀레이션의 정의 및 개념 .....	4
2. 테셀레이션 종류 .....	6
3. GSP 소프트웨어에 대한 소개 .....	23
4. 테셀레이션과 GSP .....	36
5. GSP를 활용한 테셀레이션 프로그램 학습 지도안 .....	53
III. 결론 .....	63

## 참고문헌

### ABSTRACT

<부록> 시나리오 형식 지도안

## 표 목 차

[표 1] GSP를 이용한 테셀레이션 만들기 프로그램 구성 .....	54
--	----

## 그 립 목 차

[그림 1] 테셀레이션의 예 .....	4
[그림 2] 생활 속의 테셀레이션 .....	5
[그림 3] 정다각형 테셀레이션 .....	6
[그림 4] 정다각형 테셀레이션의 예 .....	6
[그림 5] 준정다각형 테셀레이션 .....	8
[그림 6] 반정다각형 테셀레이션 .....	11
[그림 7] 정다각형의 무게중심 .....	11
[그림 8] 켈레 테셀레이션 .....	12
[그림 9] 준정다각형 켈레 테셀레이션 .....	13
[그림 10] 7각형 이상의 테셀레이션 .....	14
[그림 11] 삼각형 테셀레이션 .....	15
[그림 12] 삼각형 테셀레이션 활용 .....	15
[그림 13] 사각형 테셀레이션 .....	16
[그림 14] 사각형 테셀레이션 활용 .....	16
[그림 15] 오각형 테셀레이션 .....	21
[그림 16] 육각형 테셀레이션 .....	23
[그림 17] GSP 기본 화면 .....	24
[그림 18] 두 점 사이의 거리 측정 .....	25
[그림 19] GSP 작도 화면 .....	28

[그림 20] 점에 이름 붙이기 .....	29
[그림 21] 이름표 숨기기 .....	29
[그림 22] 파일 메뉴 .....	30
[그림 23] 편집 메뉴 .....	31
[그림 24] 평행이동 .....	40
[그림 25] 회전이동 .....	43
[그림 26] 반사이동 .....	47
[그림 27] 미끄러짐 이동 .....	50
[그림 28] 테셀레이션 활용한 중학교 1학년 교과서 .....	53

# I. 서론

## 1. 연구의 필요성 및 목적

프로이덴탈(1981)은 수학교육에서 공학적 도구의 활용을 강조하였는데 ‘수학적 이해를 유발하고 증진시키기 위해 계산기와 컴퓨터를 어떻게 이용할 것인가?’라는 문제를 수학교육의 주요 문제 중의 하나로 설정했다.

현재 교육과정에서 교수학습방법에 대하여 실생활 예를 적극 활용하고, 계산 능력 배양이 목표인 영역을 제외한 수학적 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 가능하면 계산기나 컴퓨터를 적극 활용하도록 권유하고 있다(2009 교육부).

따라서 도형부분에서 저학년 과정에서는 학생들의 흥미를 유발 할 수 있는 구체적 조작물을 이용하여 학습하다가 고학년 과정으로 갈수록 대부분 수와 연산, 측정에 치중되어 있는 지필 환경 속에 머무르는 것인 현실인 교실 현장의 수학 활동을 공학적 도구를 통해 학생들에게 수학에 대한 관심과 흥미를 주며, 수학의 가치를 이해하고, 수학에 대한 긍정적 태도를 길러줘야 한다.

GSP라는 프로그램을 통해서 다양한 모델과 시뮬레이션을 직접 경험해 봄으로써 학생들이 실제 경험과 형식적인 수학을 연결할 수 있게 되고 기하학 수업에 적극 활용한 도형 그림을 직접적으로 다루는 새로운 접근적 수업이 될 수 있을 것이다. GSP에서 화면의 대상을 역동적으로 변화시키는 것은 바로 디너스(Dienes)가 주장한 ‘수학적 다양성의 원리’와 부합한다고 할 수 있다.

또한 테셀레이션을 이용하여 기하학 수업에 적극 활용함으로써 함수적 사고를 강조할 수 있다. 함수적 사고는 그동안 소홀히 다루어졌으며 더욱 강조할 필요가 있는 영역으로 주장되고 있다(우정호 1998).

현재 일본의 수학 교과서에는 테셀레이션을 통해 평행이동, 회전이동, 반사 등의 대칭 변환을 지도하고 있으며, 자연 속에서의 테셀레이션 예를 소개하여 수학의 아름다움과 흥미를 느낄 수 있도록 하였다. 미국의 경우 테셀레이션을 교육과정에 포함하여 지도하고 있으며 테셀레이션의 활용이 활성화됨에 따라 많은 학습 자료와 컴퓨터 프로그램이 개발 되어 있으며. 우리나라의 교육과정에서 수학적 창의성을 강조하면서 테셀레이션 정의와 관련된 내용이 도입되고 있다.

## 2. 연구의 내용

본 논문에서는 학습자가 능동적으로 참여하고, 참여과정을 통해 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기르고자 중학교 기하학 부분을 중심으로 연구하고자 한다.

본 논문에서 연구하는 내용은 다음과 같다.

첫째, 테셀레이션의 정의 및 개념을 알아보고, 테셀레이션의 종류별 특징에 대해 알아본다. 또 테셀레이션의 종류를 구체적인 예와 함께 살펴본다.

둘째, GSP를 소개하고 사용방법을 더 구체적으로 제시한다.

셋째, 테셀레이션의 변환 즉, 다각형의 내각과 외각, 평행이동, 반사, 회전에 대하여 연구하고 GSP를 활용하여 수학적 개념의 관계를 이해하도록 구체적 과정을 제시한다.

넷째, 테셀레이션을 직접 조작해 볼 수 있는 교수 · 학습 자료를 제시하고, GSP를 활용한 테셀레이션 프로그램 수업지도안을 작성하여 소개한다.

### 3. 기대되는 효과

역동적 기하학습 도구인 GSP를 수업현장에서 활용한다면 학생들이 수학에 흥미를 느끼고 수학의 유용성을 스스로 찾을 수 있게 될 것이다. 이는 학생들의 개인적 경험과 수학적 경험을 연결하는 새로운 수준의 친밀함을 형성하는데 도움을 주며 개별 학습자에게 스스로 문제를 찾고 해결해 나아가는 방법을 제시함으로써 각자에게 적절한 피드백을 제시해 줄 수 있을 것이다. 또한 테셀레이션을 통해서 수학에 대한 여러 가지 개념 즉 평행이동, 회전, 반사, 변환, 대칭 등을 지도하는데 도움을 주고 학생들은 기하학습 내용에 대해 보다 잘 이해하고, 수학 내·외적인 연결 체계를 형성하는데 도움을 줄 것이다.

### 4. 연구의 제한점

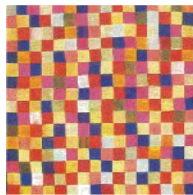
본 논문은 적용대상을 중학교 수학으로 국한했으며 수업활용방안의 작성에 있어 내용범위를 기하영역에 중점을 두었다. 또 각 학교의 기자재 확보 등을 인하여 실제 수업시간에 적용을 하지 못하여 신뢰도 및 타당도 검증에 대한 통계적인 자료를 얻지 못한 것이 한계이다.

## II. 본론

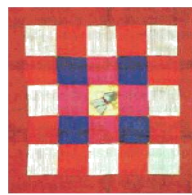
### 1. 테셀레이션의 정의 및 개념

테셀레이션(Tessellation)은 동일한 모양을 이용해 평면이나 공간을 빈틈이 나 겹쳐지는 부분 없이 채우는 것을 말한다. 테셀레이션이란 단어는 라틴어 tessera에서 유래했다. tessera란 ‘정사각형 판(a square table)’ 또는 ‘도박에 사용된 주사위(a die for gambling)’을 의미한다. 또 tessera는 ‘four’를 의미하는 그리스어 tessares(정사각형 타일)에서 비롯되었다고 한다. tessera의 작은 도형이 tessella이며, 모자이크에 사용되는 작은 정사각형 돌 조각 또는 정육면체 벽돌(tile)을 의미한다.

마루나 옥실의 타일, 보도블록 등이 테셀레이션의 예인데, 벽지나 전통 문양에서도 테셀레이션을 찾아볼 수 있다. 또한 스페인의 무어 건축, 중동의 이슬람 건축에는 테셀레이션의 예가 많다. 이러한 테셀레이션은 우리에게 단지 예술적인 아름다움만을 주는 것이 아니다. 그 속에는 풍부한 수학적 개념과 의미가 들어 있고 흥미롭게 도형의 각의 크기, 대칭과 변환, 합동 등을 학습할 수 있게 해준다.



[한국의 보자기]



[한국의 밥상 보]



[퀼트]

[그림 1] 테셀레이션의 예

테셀레이션이 가능한 일반적인 조건은 다음 4가지로 정리된다.

첫째, 단위 모양으로 평면이나 공간을 겹치거나 빈틈없이 채워야 한다. 둘째, 한 꼭짓점을 중심으로 모인 단위 모양들의 각들의 합이  $360^\circ$ 가 되어야 한다. 셋째, 길이가 같은 변끼리 접하도록 배열해야 한다. 넷째, 평면에서 모든 방향으로 무한히 확장될 수 있어야 한다.

D. Seymour & J. Britton(1989)에 의하면 테셀레이션은 평면 도형 뿐만 아니라 입체 도형으로도 가능하다. 즉 다각형을 이용한 평면 테셀레이션과 다면체를 이용한 공간 테셀레이션이 있다. 그러나 본 논문에서는 중학교 과정에서 테셀레이션을 이용한 수학 학습을 지도하므로 2차원의 평면 테셀레이션에 대해서 논의한다.



알카사르 왕궁



아랍의 양탄자



일본의 문

[그림 2] 생활 속의 테셀레이션

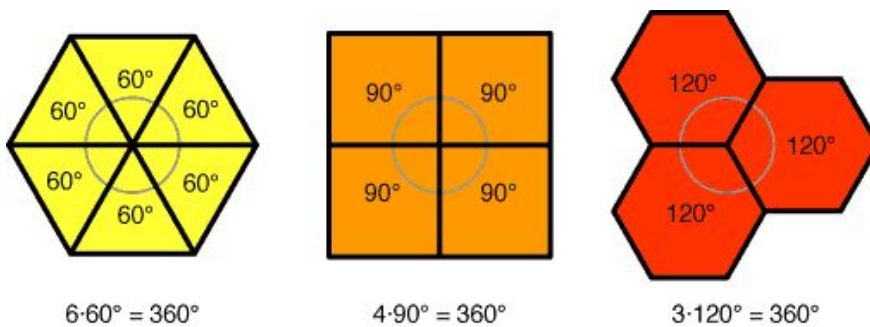
## 2. 테셀레이션 종류

### (1) 정다각형의 테셀레이션

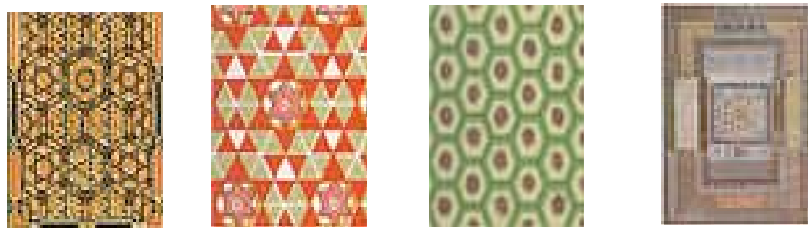
#### 1) 정다각형 테셀레이션 (regular tessellation)

한 종류의 정다각형을 가지고 만든 테셀레이션은 ‘정다각형 테셀레이션’이라고 하며, 가능한 정다각형은 정삼각형, 정사각형, 정육각형 뿐이다.

한 점을 중심으로 6개의 정삼각형을 가지고 빈틈이나 겹침이 없이 평면을 덮을 수 있다. 정삼각형을 60°씩 회전하면 360°가 되어 평면을 채워 나갈 수 있다. 정사각형은 90°씩, 정육각형은 120°씩 회전하면 평면을 채워나갈 수 있다.



[그림 3] 정다각형 테셀레이션



[그림 4] 정다각형 테셀레이션의 예

2) 준 정다각형 테셀레이션 (semi-regular tessellation)

두 개 이상의 정다각형을 가지면 더 다양한 테셀레이션을 만들 수 있다. 여러 종류의 정다각형을 이용해도 각 꼭짓점에서의 정다각형의 배열 순서는 꼭짓점마다 같도록 한다.

준 정다각형의 테셀레이션을 구성할 때 기본 조건을 다음과 같다(2009, 신원국).

첫째, 각 정다각형의 변의 길이는 모두 같아야 한다.

둘째, 한 꼭짓점에 모인 정다각형의 내각의 합은  $360^\circ$ 가 되어야 한다.

셋째, 내각의 크기가  $180^\circ$ 인 정다각형은 없으므로 한 꼭짓점에 모이는 정다각형의 개수는 최소한 3개가 되어야 한다.

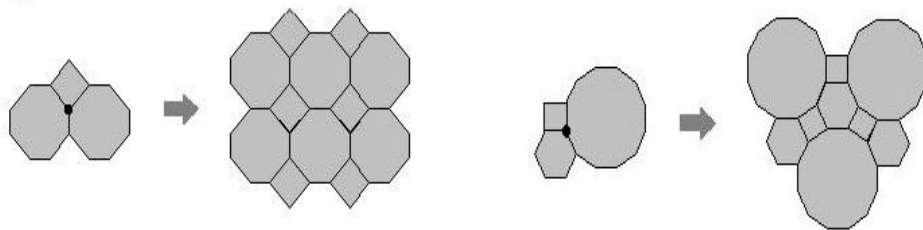
넷째, 정다각형들 중 정삼각형의 내각의 크기가  $60^\circ$ 로 가장 작고  $60^\circ \times 6 = 360^\circ$ 이므로 한 꼭짓점에 모이는 정다각형의 개수는 최대 5개 이다.

다섯째, 크기가 작은 순서대로 서로 다른 종류의 정다각형의 내각을 더해 보면,

$$60^\circ (\text{정삼각형}) + 90^\circ (\text{정사각형}) + 108^\circ (\text{정오각형}) = 258^\circ < 360^\circ$$

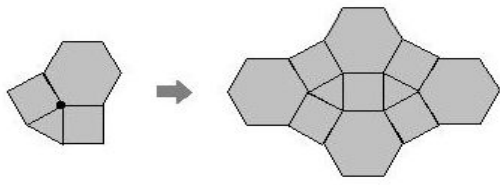
$$60^\circ (\text{정삼각형}) + 90^\circ (\text{정사각형}) + 108^\circ (\text{정오각형}) + 120^\circ (\text{정육각형}) = 378^\circ > 360^\circ$$

이므로 한 꼭짓점에 모인 정다각형의 종류는 최대 3종류이다.

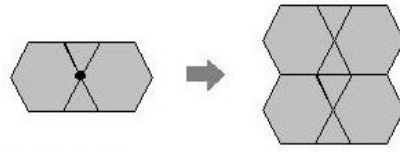


4.8.8

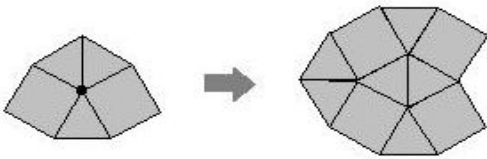
4.6.12



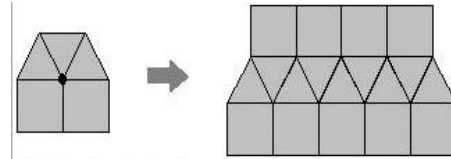
3.4.6.4



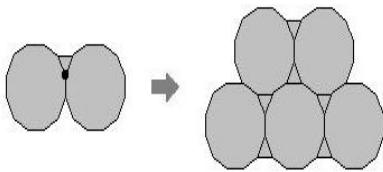
3.6.3.6



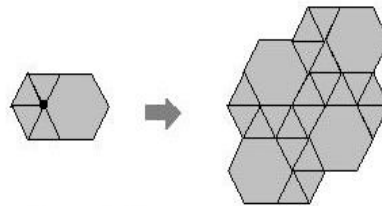
3.3.4.3.4



3.3.3.3.4.4



3.12.12



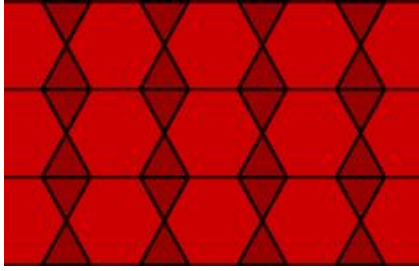
3.3.3.3.6

[그림 5] 준정다각형 테셀레이션

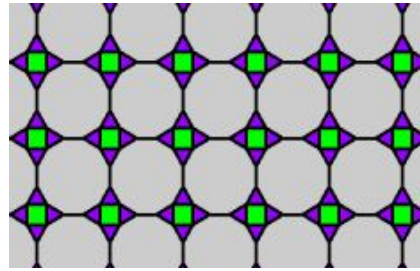
### 3) 반 정다각형 테셀레이션 (demi-regular tessellation)

각 꼭짓점에서의 정다각형의 배열순서가 다른 테셀레이션도 가능하다. 단위 모양을 2개 또는 3개를 배열하여 14개의 반 정다각형 테셀레이션을 만들 수 있다.

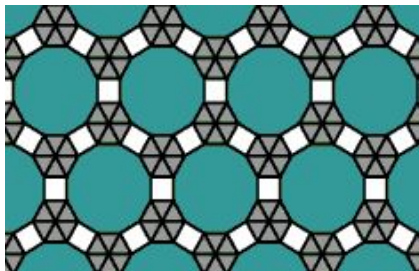
① 두 종류의 서로 다른 배열의 테셀레이션



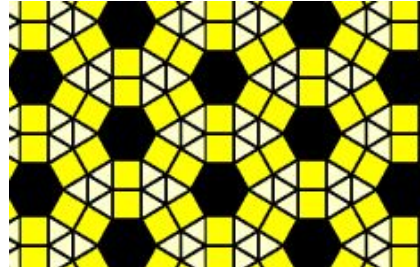
3.3.6.6 / 3.6.3.6



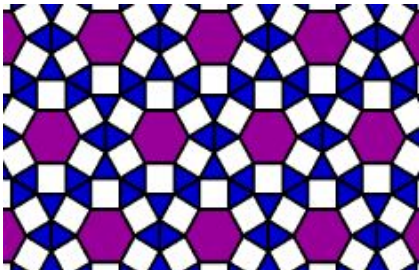
3.12.12 / 3.4.3.12



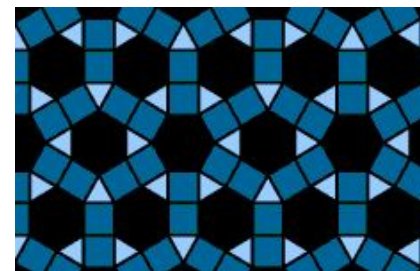
3.3.3.3.3.3 / 3.3.4.12



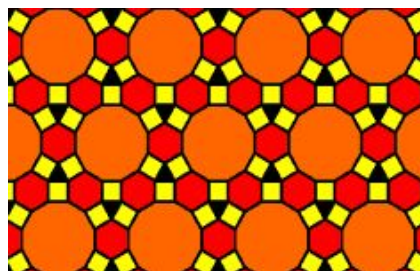
3.3.3.4.4 / 3.4.6.4



3.3.4.3.4 / 3.4.6.4

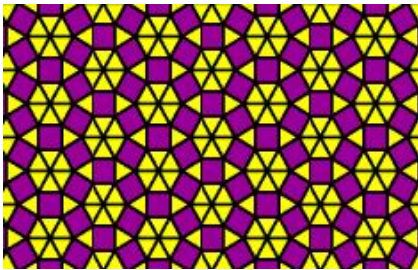


3.4.6.4 / 3.4.4.6

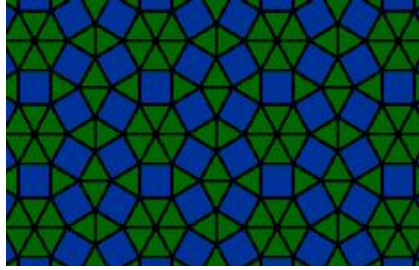


3.4.6.4 / 4.6.12

② 두 가지 방법으로 표현이 가능한 두 종류의 테셀레이션

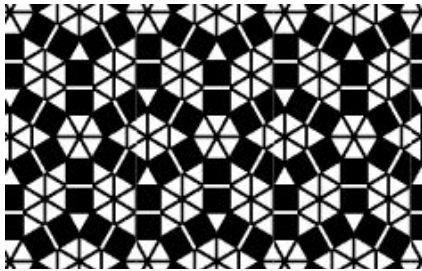


3.3.3.3.3.3 / 3.3.4.3.4 #1

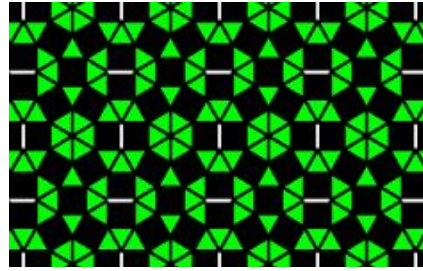


3.3.3.3.3.3 / 3.3.4.3.4 #2

③ 두 가지 방법으로 표현이 가능한 세 종류의 테셀레이션

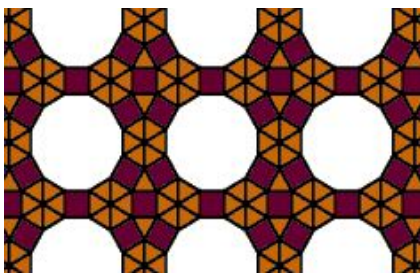


3.3.3.3.3.3 / 3.3.3.4.4 / 3.3.4.3.4  
#1

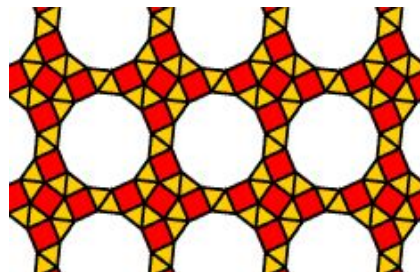


3.3.3.3.3.3 / 3.3.3.4.4 / 3.3.4.3.4  
#2

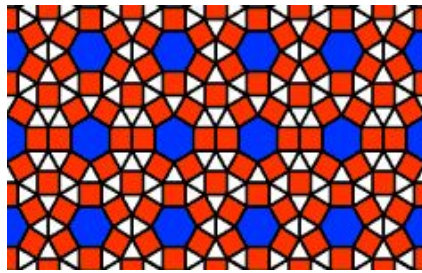
④ 세 종류 서로 다른 배열의 테셀레이션



3.3.3.3.3.3 / 3.3.4.12 /  
3.3.4.3.4



3.3.4.3.4 / 3.3.4.12 / 3.4.3.12

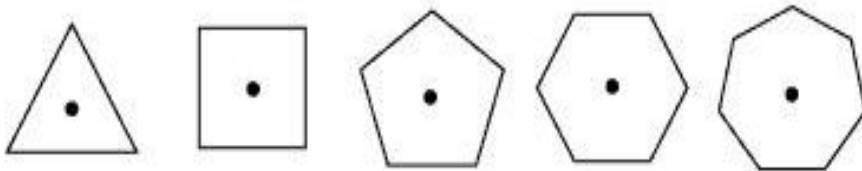


3.3.3.4.4 / 3.3.4.3.4 / 3.4.6.4

[그림6] 반 정다각형 테셀레이션 1)

#### 4) 켈레 테셀레이션 (dual tessellation)

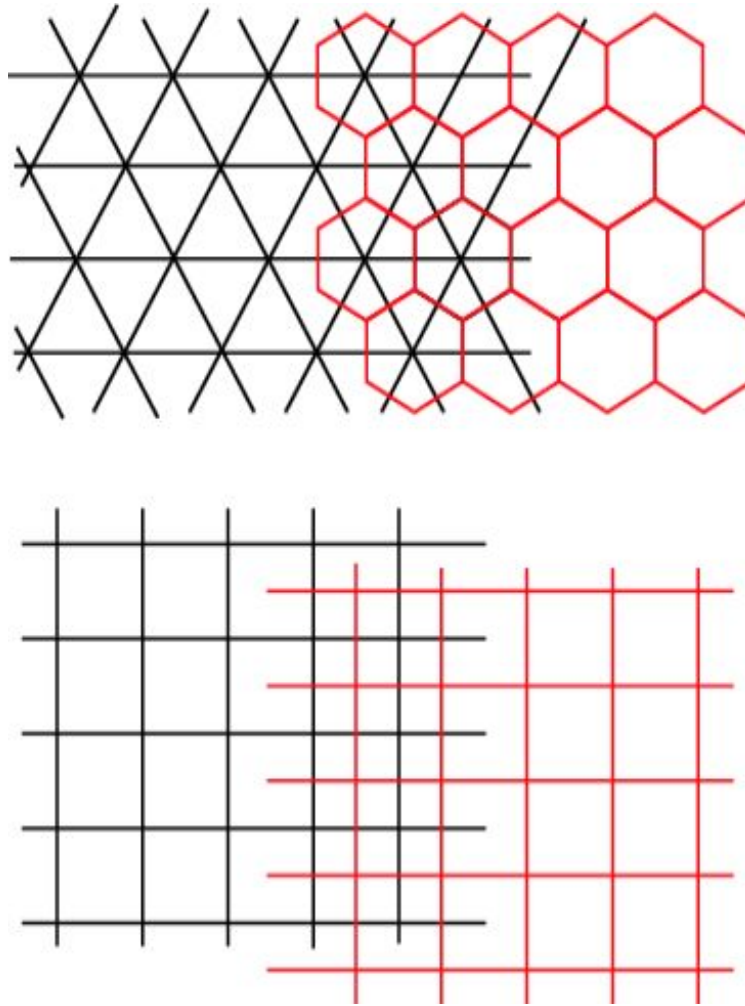
정다각형의 무게중심을 찾아서 그것들을 찾아서 연결하면 새로운 정다각형 형태를 만들 수 있고, 각 꼭짓점에 이르는 거리는 모두 같으며 각 변에 이르는 거리도 모두 같다. 이때, 반드시 변이 접하는 도형의 무게중심끼리만 연결해야 한다.



[그림 7] 정다각형의 무게중심

정삼각형과 정육각형으로 이루어진 테셀레이션끼리 켈레 테셀레이션을 이루고 정사각형은 자기 자신과의 켈레 테셀레이션을 만든다.

<sup>1)</sup> <http://library.thinkquest.org/16661/>

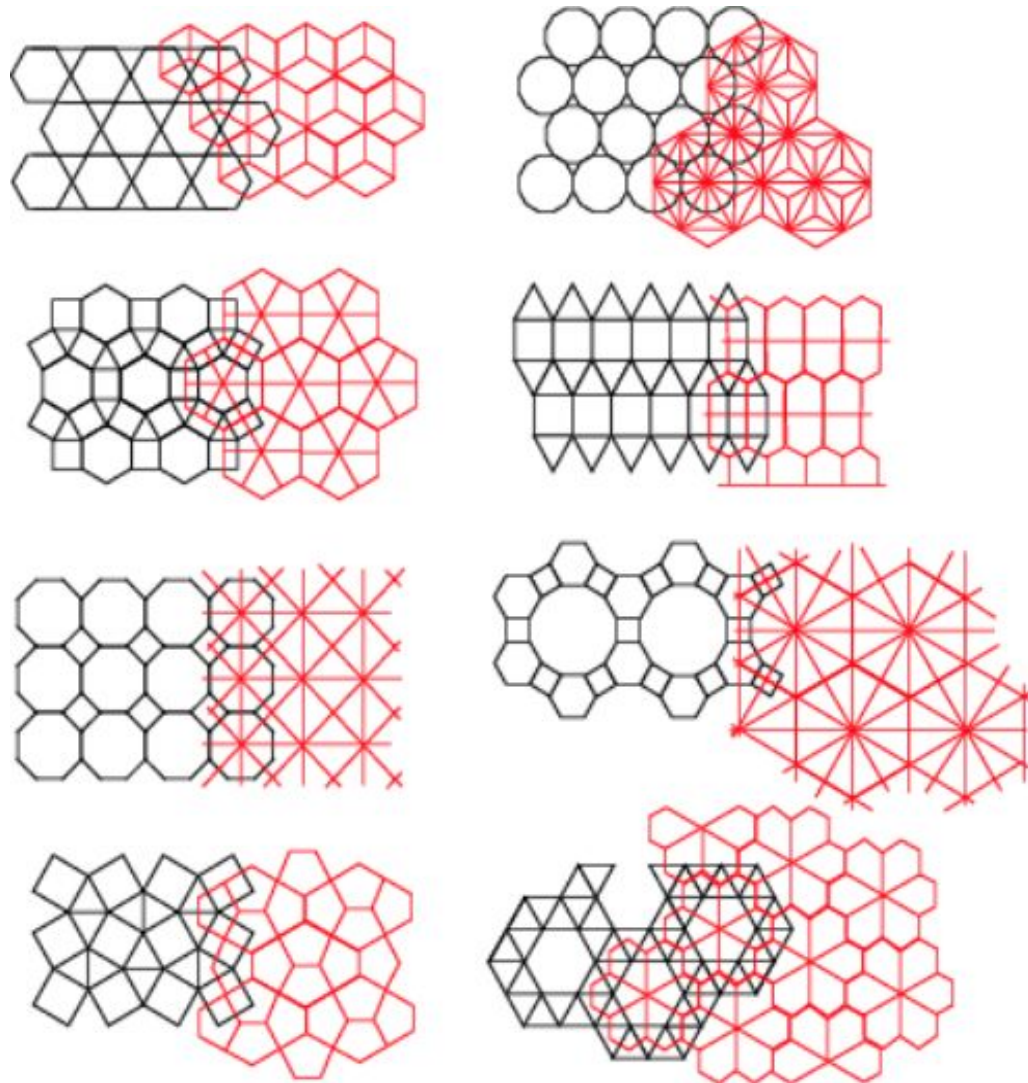


[그림 8] 켈레 테셀레이션<sup>2)</sup>

Williams(1979)의 논문에서 준정다각형 테셀레이션의 켈레 테셀레이션을 보여주고 있다.

---

<sup>2)</sup> <http://mathworld.wolfram.com/DualTessellation.html>



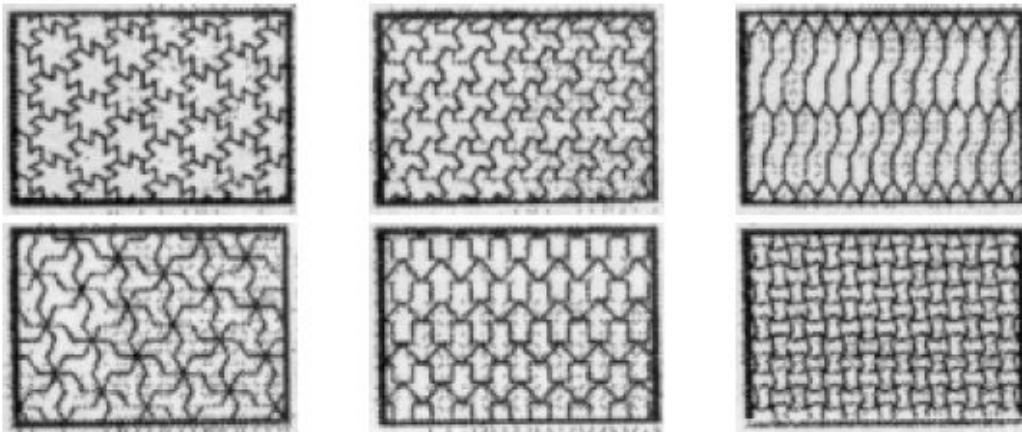
[그림 9] 준정다각형 결레 테셀레이션 3)

---

3) <http://mathworld.wolfram.com/DualTessellation.html>

## (2) 다각형의 테셀레이션

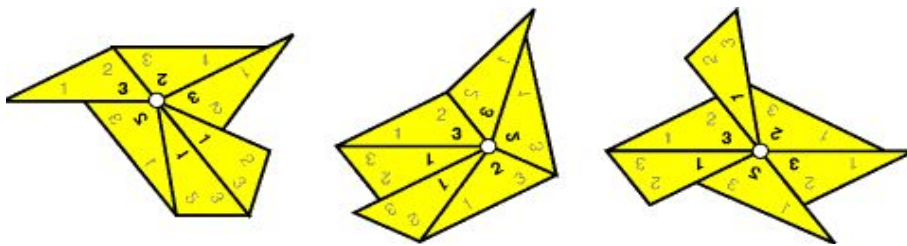
테셀레이션이 가능한 조건은 한 꼭짓점을 중심으로 모인 다각형의 각들의 합이  $360^\circ$ 가 되는 것이다. 단, 길이가 같은 변끼리 접하도록 배열해야 한다. 이런 조건에 따라 모든 삼각형과 사각형은 테셀레이션이 가능하다. 일반적인 오각형은 내각의 합이  $540^\circ$ 이므로 내각을 두 각이  $90^\circ$ 와 세 각이  $120^\circ$ 로 쪼개보면 가능하다. 그 이유는 정사각형과 정육각형은 테셀레이션이 가능하다. 이러한 테셀레이션이 가능한 다각형을 이용해서 오각형을 만들어 볼 수 있고 현재 알려진 14가지가 있다. 육각형은 내각의 크기가  $120^\circ$ 이고 변의 길이만 달리 해도 테셀레이션이 가능하고 현재 3종류가 알려져 있다. 대신 마주보는 변의 길이는 같고 서로 평행해야 하는 조건을 가지고 있다. 칠각형이상의 볼록 다각형에서는 평면을 완전히 채울 수 없다(허민, 오혜영 옮김, 1996). 그러나 볼록 다각형이 아닌 7각형 이상의 다각형은 앞으로 연구해 볼 가치가 있다.



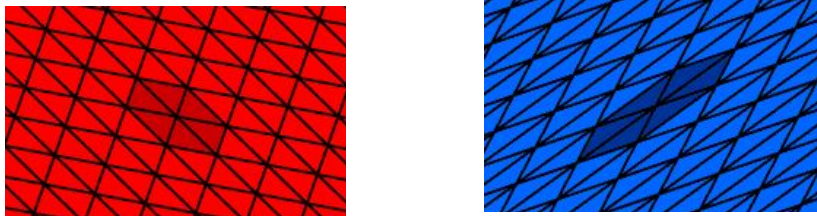
[그림 10] 7각형 이상의 테셀레이션

## 1) 삼각형 테셀레이션

모든 삼각형은 평면에서 테셀레이션이 가능하다. 테셀레이션이 가능하기 위한 두 번째 조건을 보면 ‘한 꼭짓점을 중심으로 모인 단위 모양들의 각들의 합이  $360^\circ$ 가 되어야 한다.’인데 6개의 삼각형을 서로 다른 길이가 같은 변들을 접하게 하면 한 점을 중심으로  $360^\circ$ 가 되어 배열할 수 있기 때문이다.



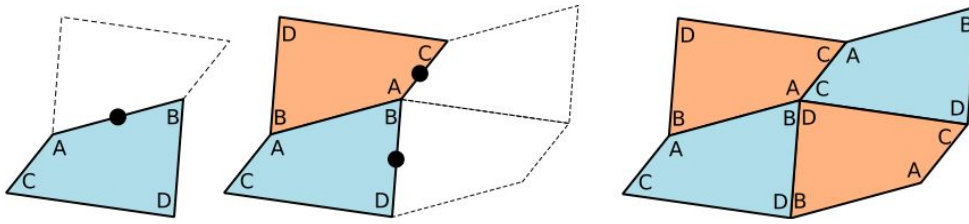
[그림 11] 삼각형 테셀레이션



[그림 12] 삼각형 테셀레이션 활용

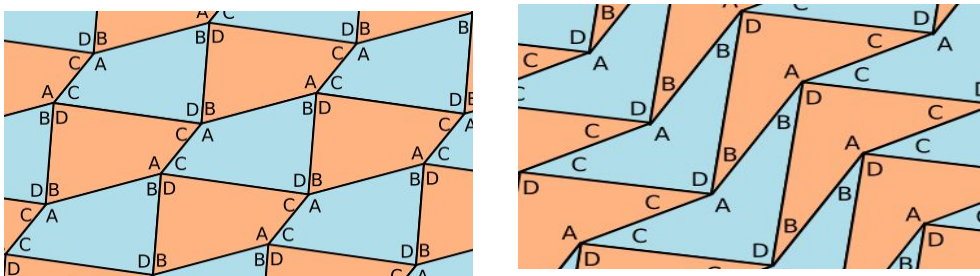
## 2) 사각형 테셀레이션

네 변의 길이와 네 각의 크기가 모두 다른 사각형을 생각해보자. 사각형은 내각의 크기의 합이  $360^\circ$ 이므로, 그 정점 주위를 꼭 맞게 채울 수 있고, 평면을 빈틈없이 채워 테셀레이션 구성이 가능하다.



[그림 13] 사각형 테셀레이션

이 패턴을 확장 시키면 다음 그림과 같이 된다. 오목 사각형도 다음과 같이 확장될 수 있다.



[그림 14] 사각형 테셀레이션 활용

[www.shodor.org/interactivate/activities/FloorTiles](http://www.shodor.org/interactivate/activities/FloorTiles)에 가보면 사각형을 움직여서 테셀레이션을 보여주는 프로그램이 있다.

### 3) 오각형 테셀레이션 (14종류가 알려짐)

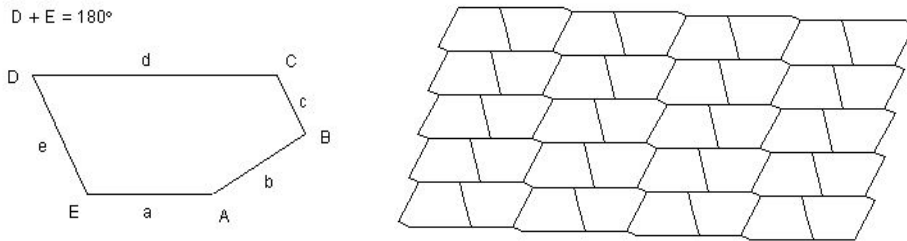
정오각형은 한 각이  $108^\circ$ 이므로, 한 점에  $360^\circ$ 가 되도록 배열할 수 없었다. 그러나 모든 오각형들이 테셀레이션이 불가능한 것은 아니다. 현재까지 알려진 바로는 14종류가 가능하다고 밝혀졌으며 아직도 모든 종류의 오각형 테

셀레이션이 알려진 것은 아니다.

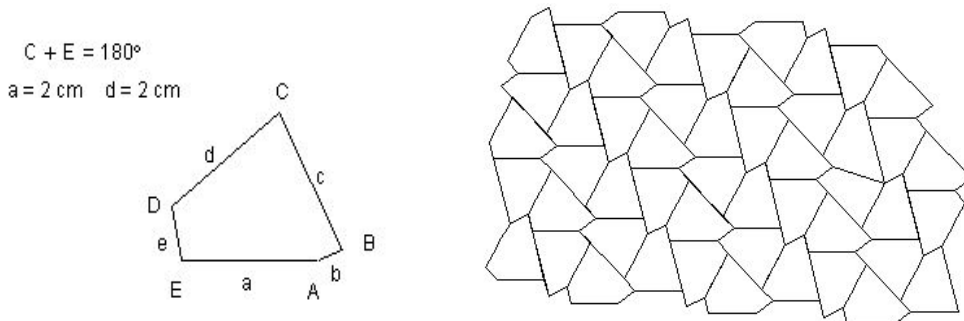
Types 1-5는 1918년 K. Reinhardt에 의해 알려졌으며 Types 6-8은 1968년 R. B. Kershner에 의해 3종류가 추가로 발견되었다.

이후 1975년에 Martin Gardner는 R. B. Kershner의 논문을 바탕으로 한 칼럼을 'Scientific America'에 실었는데, 이 칼럼을 본 R. James는 팔각형과 사각형으로 이루어진 테셀레이션에서 팔각형의 내부를 오각형으로 분할하고 사각형 자리에 분할에 의해 나타난 오각형을 채우는 독창적인 방법으로 새로운 오각형 테셀레이션 Type 10을 발견했다. 이 새로운 발견에 자극을 받은 M. Rice는 1977년 까지 Types 9, 11-13을 더 발견하게 되었고 1985년에 독일의 대학원생인 R Stein에 의해 Type 14가 발견되었다 (Doris Schattschneider, 1996).

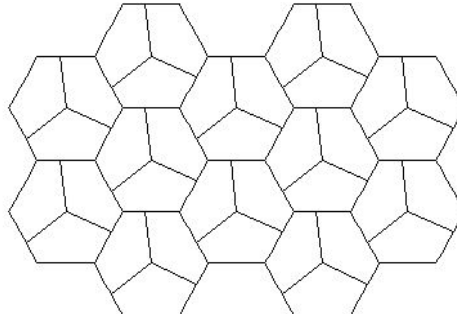
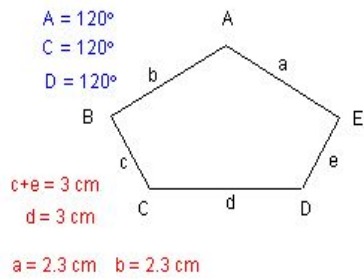
① Type 1 :  $D+E = 180^\circ$



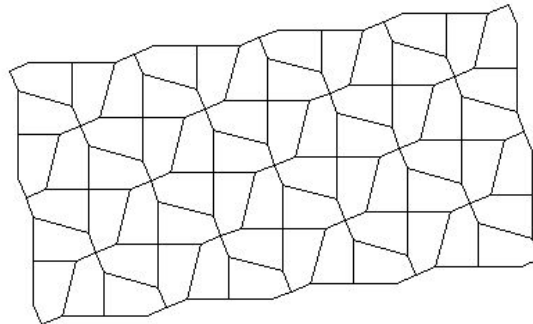
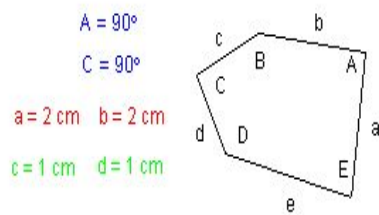
② Type 2 :  $C + E = 180^\circ, a = d$



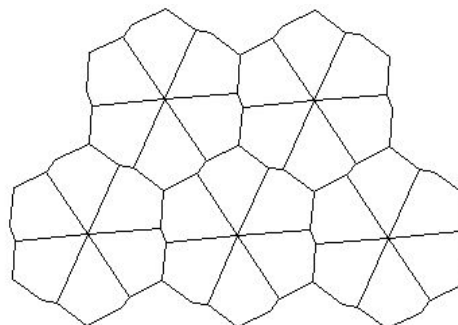
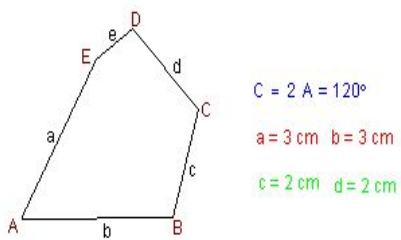
③ Type 3:  $A = C = D = 120$ ,  $a = b$ ,  $d = c + e$



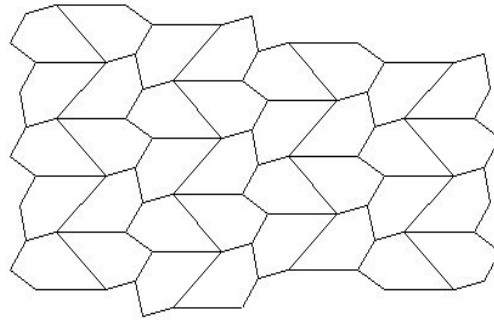
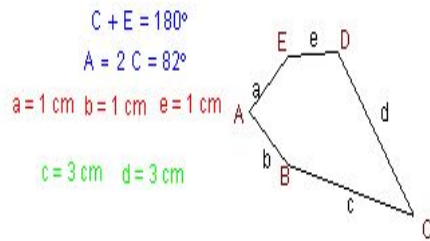
④ Type 4 :  $A = C = 90$ ,  $a = b$ ,  $c = d$



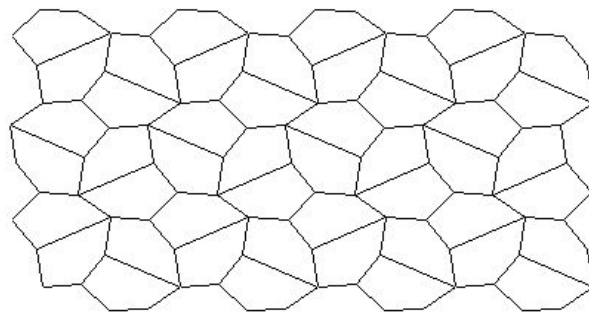
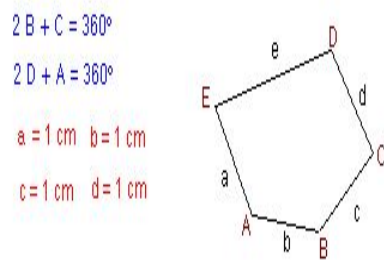
⑤ Type 5 :  $C = 2A = 120$ ,  $a = b$ ,  $c = d$



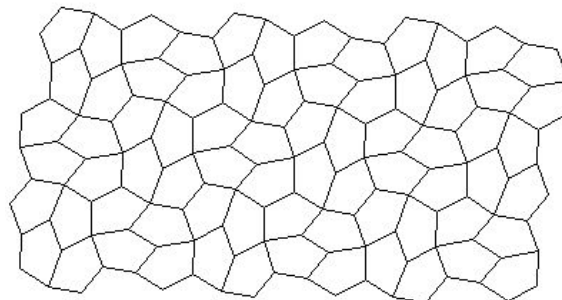
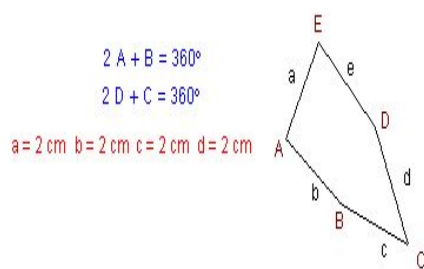
⑥ Type 6 :  $C + E = 180$ ,  $A = 2C$ ,  $a = b = e$ ,  $c = d$



⑦ Type 7 :  $2B + C = 360$ ,  $2D + A = 360$ ,  $a = b = c = d$



⑧ Type 8 :  $2A + B = 360$ ,  $2D + C = 360$ ,  $a = b = c = d$



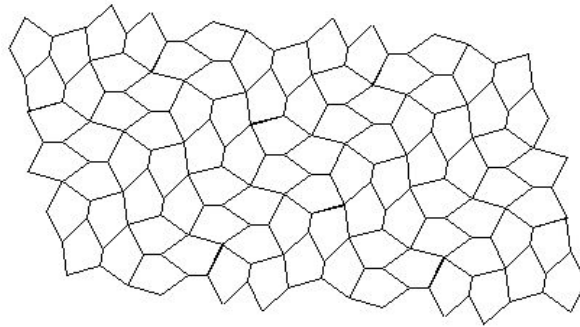
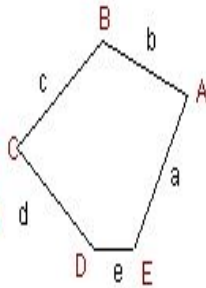
⑨ Type 9 :  $2E + B = 360$ ,  $2D + C = 360$ ,  $a = b = c = d$

$$2E + B = 360^\circ$$

$$2D + C = 360^\circ$$

$$a = 2 \text{ cm } \quad b = 2 \text{ cm}$$

$$c = 2 \text{ cm } \quad d = 2 \text{ cm}$$



⑩ Type 10 :  $E = 90$ ,  $A + D = 180$ ,  $2B - D = 180$ ,  $2C + D = 360$ ,  
 $a = e = b + d$

$$E = 90^\circ$$

$$A + D = 180^\circ$$

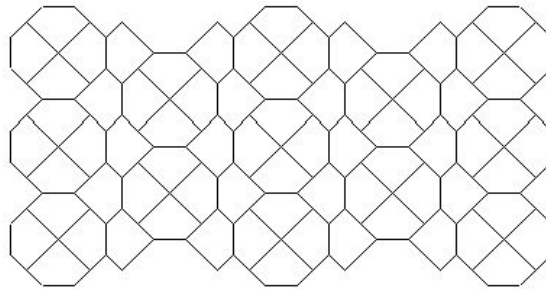
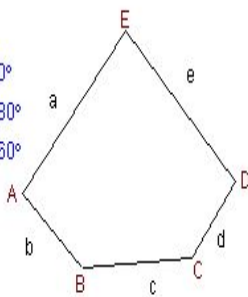
$$2B - D = 180^\circ$$

$$2C + D = 360^\circ$$

$$a = 3 \text{ cm}$$

$$e = 3 \text{ cm}$$

$$b + d = 3 \text{ cm}$$



⑪ Type 11 :  $A = 90$ ,  $C + E = 180$ ,  $2B + C = 360$ ,  $d = e = 2a + c$

$$A = 90^\circ$$

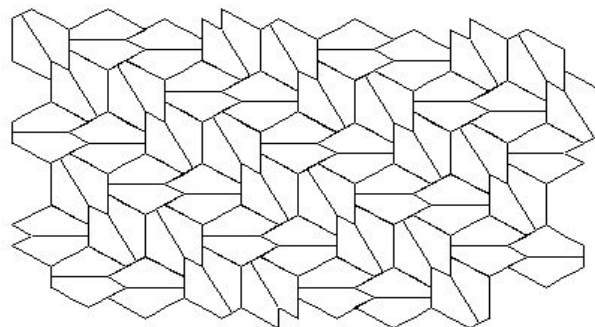
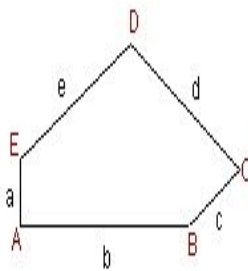
$$C + E = 180^\circ$$

$$2B + C = 360^\circ$$

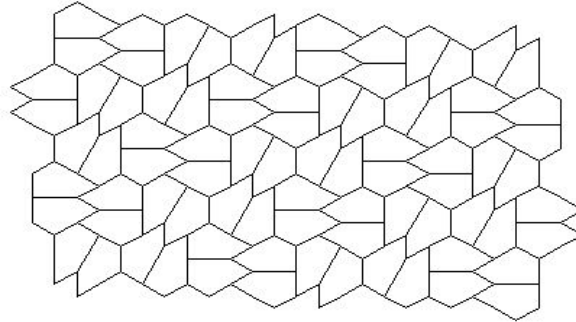
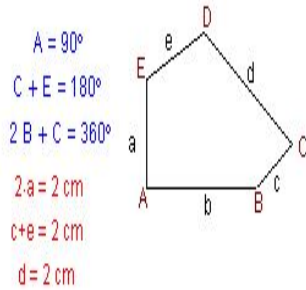
$$d = 3 \text{ cm}$$

$$e = 3 \text{ cm}$$

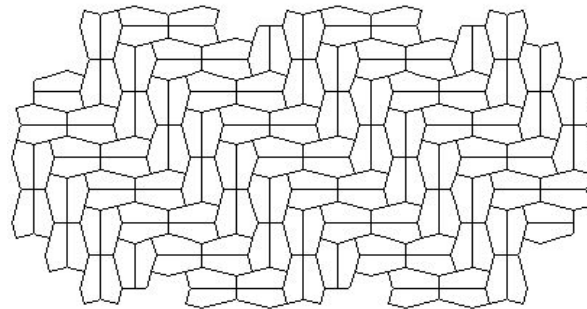
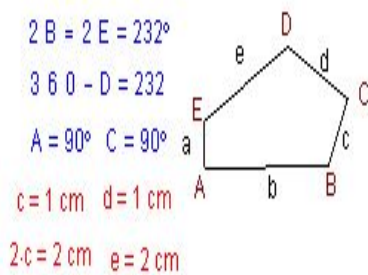
$$2a + c = 3 \text{ cm}$$



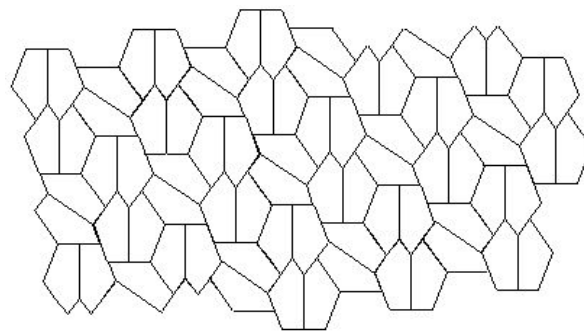
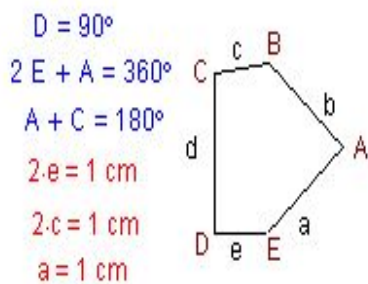
- ⑫ Type 12 :  $A = 90$ ,  $C + E = 180$ ,  $2B + C = 360$ ,  $2a = c + e = d$



- ⑬ Type 13 :  $A = C = 90$ ,  $2B = 2E = 360 - D$ ,  $c = d$ ,  $2c = e$



- ⑭ Type 14 :  $D = 90$ ,  $2E + A = 360$ ,  $C + A = 180$ ,  $B + D + E = 360$ ,  
 $2e = 2c = a$

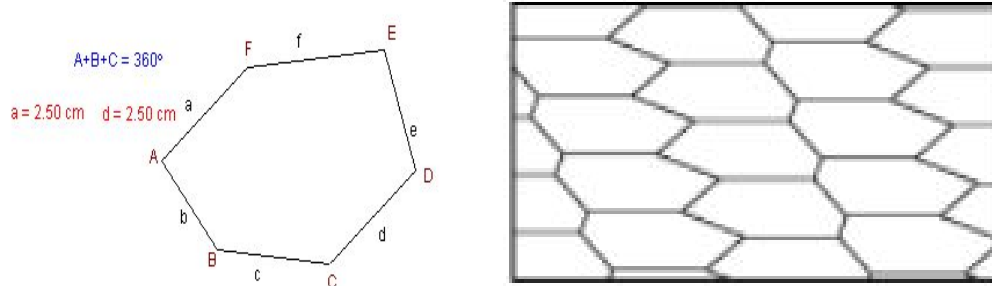


[그림 15] 오각형 테셀레이션

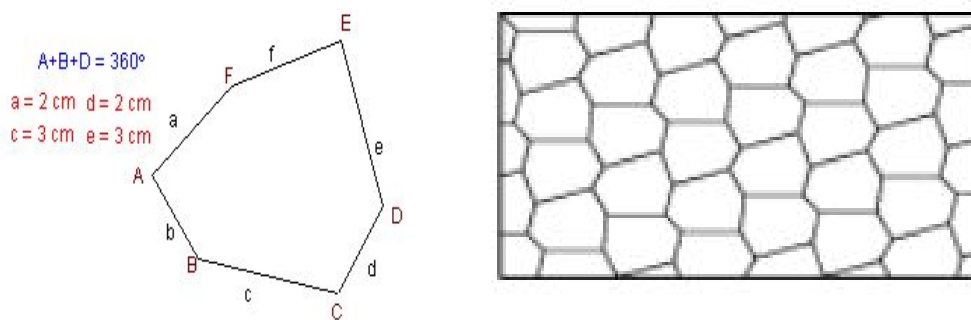
4) 육각형 테셀레이션(3종류가 알려짐)

육각형 테셀레이션은 적어도 3개가 있다는 것이 1918년에 증명되었으며 어떤 육각형이 테셀레이션이 되기 위해서는 마주보는 변들이 서로 평행하고 그 길이가 같다는 조건을 만족해야 된다. 3가지 타입은 다음과 같다.

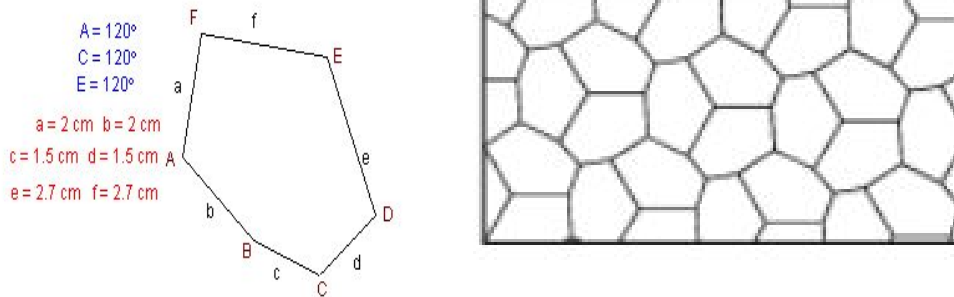
① Type 1 :  $A + B + C = 360$  ,  $a = d$



② Type 2 :  $A + B + D = 360$  ,  $a = d$  ,  $c = e$



③ Type3 :  $A = C = E = 120$  ,  $a = b$  ,  $c = d$  ,  $e = f$



[그림 16] 육각형 테셀레이션

### 3. GSP 소프트웨어에 대한 소개

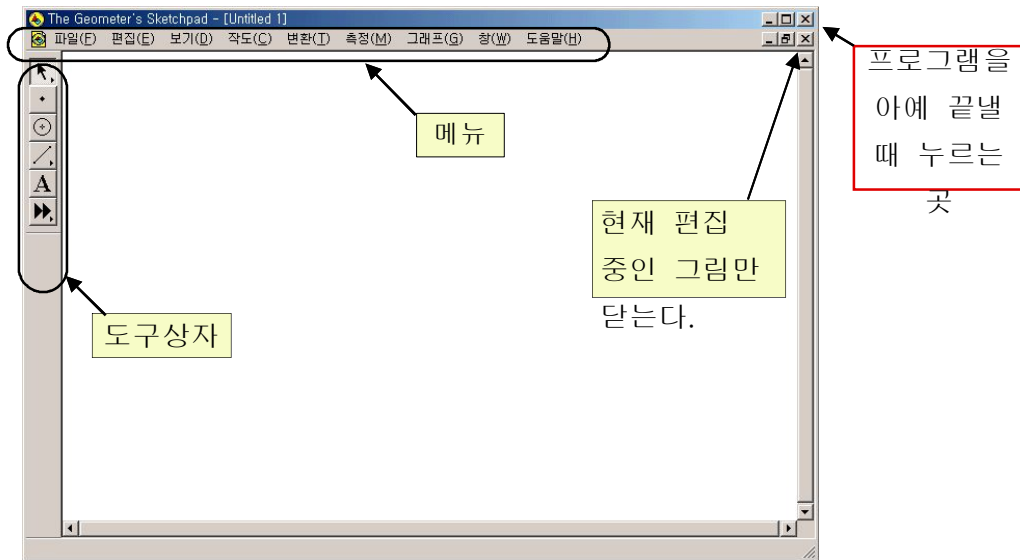
GSP(the Geometer's Sketchpad)는 미국 Key Curriculum Press사에서 개발한 수학 소프트웨어이다. 원래 유클리드 기하의 평면 도형들을 만들고 시뮬레이션하기 위한 것이었지만, 그 기능이 확장되어 좌표, 함수 등 많은 수학적 대상을 만들고 그것에 대한 실험을 할 수 있게 되었다.

GSP의 가장 핵심적인 기능은 추상적인 수학적 대상을 컴퓨터 화면에서 만들고 조작할 수 있게 한 것이라고 할 수 있다. 예를 들어 삼각형을 만들고 그것의 외심을 작도하고 나서 삼각형의 한 꼭짓점을 마우스로 끌어 옮기면, 삼각형이 변형되면서 그에 맞게 외심의 위치가 바뀐다. 또한 이차함수의 그래프를 그린 다음 키보드 조작으로 계수들의 값을 조금씩 변화시키면 그에 따라 그래프의 모양이 바뀐다.

이러한 기능은 수학적 대상들의 관계를 이해할 때 유용할 수 있기 때문에 GSP는 학교 수업이나 수학적 내용의 프레젠테이션에서도 자주 이용된다.

## (1) GSP 사용법

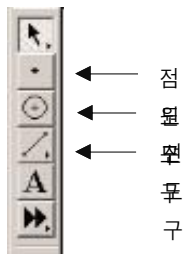
### 1.1) 화면구성



[그림 17] GSP 기본 화면

Tip : GSP에서 한 모든 작업은 취소가 가능하다. 파일을 저장하지 않았다면 스케치 작업의 제일 처음으로 되돌릴 수 있고, 파일을 저장하였다면 저장한 그 순간까지 되돌릴 수 있다. **[Shift]** 키를 누른 상태에서 편집 메뉴를 열면 취소명령은 모두 취소로 바뀌게 된다.

### 1.2) 도구 상자



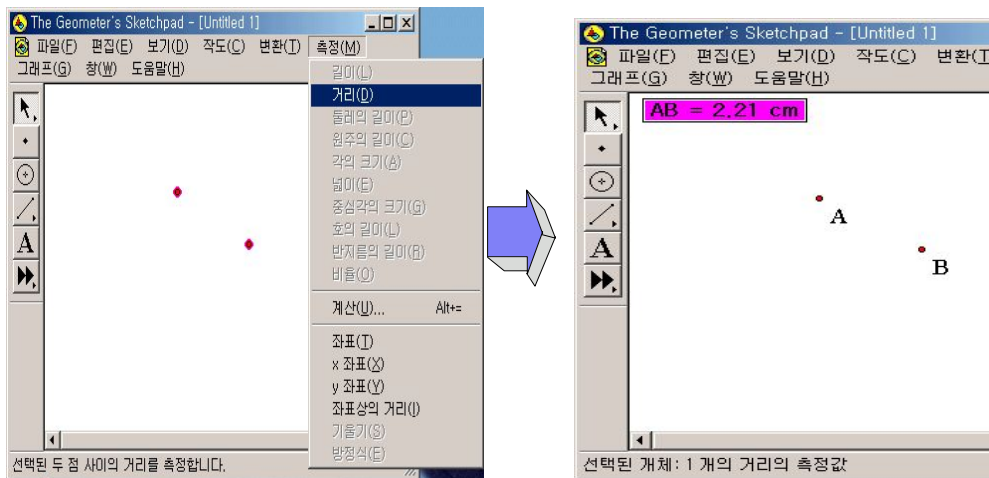
스케치 창의 왼쪽에 있는 도구상자의 세 도구로 점이나, 원, 직선을 그릴 수 있다. 그리기 도구를 선택하려면 사용하려는 도구를 스케치 창으로 끌고 가는 것이 아니라 클릭해야 한다.

### 1.2.1) 점

• 점 도구는 마우스로 누른 후에 화면의 원하는 위치에 마우스를 눌러주면 그 자리에 점이 찍어진다. • 점 도구를 선택한 후 화면 아무 곳이나 두 개의 점을 찍어서 ↔ 도구로 바꾼 후, 방금 찍은 점들을 각각 드래그하면 점의 위치를 바꿀 수 있다.

↔ 를 클릭하면 선택된 점은 약간 커진다. 이 상태에서 다른 점을 또 클릭하면 두 점이 함께 선택된다. 선택 당한 점을 다시 클릭하면 그 점의 선택이 취소된다. 화면의 빈 곳에 클릭하면 모든 점의 선택이 취소된다.

두 개의 점을 선택한 후에, [측정-거리] 메뉴를 실행해 보자. 다음 그림과 같이 선택한 두 점 사이의 거리가 화면에 출력된다. 이 때, 점들의 이름이 자동으로 나타난다.



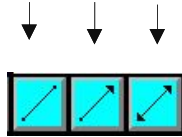
[그림 18] 두 점 사이의 거리 측정


### 1.2.2) 선


↗ 선 도구는 직선, 반직선, 선분을 그릴 때 사용한다. ↗ 선 도구에서는


세 개의 그리기 도구를 선택할 수 있다. 선 도구 위에서 마우스를 누르고 있으면 세 개의 부속도구가 나타난다. 마우스 버튼을 누른 상태로 원하는 도구로 이동하여 버튼을 놓으면 된다.


선분 반직선 직선



선분을 그리기 위해선  도구를 선택한 후 화면의 임의의 곳을 클릭하고, 마우스를 옮겨보면 방금 클릭한 위치(점)로부터 현재 마우스 위치까지 선분이 보인다. 원하는 방향과 길이가 되었을 때 마우스를 한 번 더 클릭한다. 이와 같이 임의의 새로운 점에서 새로운 점으로 선분을 그리면, 선분과 함께 그 양 끝점이 자동으로 찍혀 만들어진다.

이미 존재하는 두 점을 연결하는 선분을 작도할 수도 있다. 가 선택된 상태에서 점 A 근처에 마우스가 다가가면 그 점의 색깔이 하늘색으로 바뀐다. 다시 멀어지면 원래의 색(빨간색)으로 회복된다. 즉, 점 A 근처로 가서 하늘색으로 바뀔 때 점 A를 눌러주고, 다시 점 B가 하늘색으로 되었을 때 점 B를 눌러주면, 두 점을 잇는 선분  $\overline{AB}$ 가 만들어진다.


선분도 역시  도구로 드래그 하여 선분 자체를 평행이동하거나, 양 끝점의 위치를 변경하여 선분의 모양을 바꾸어 볼 수 있다.




직선을 그릴 때에는  도구를 클릭한 상태로 잠시 기다리면






상태로 확장되는데, 여기에서 직선 모양 도구를 클릭하면 된다. 직선을 선택하면 직선을 반직선을 선택하면 반직선을 그릴 수 있다.


### 1.2.3) 원

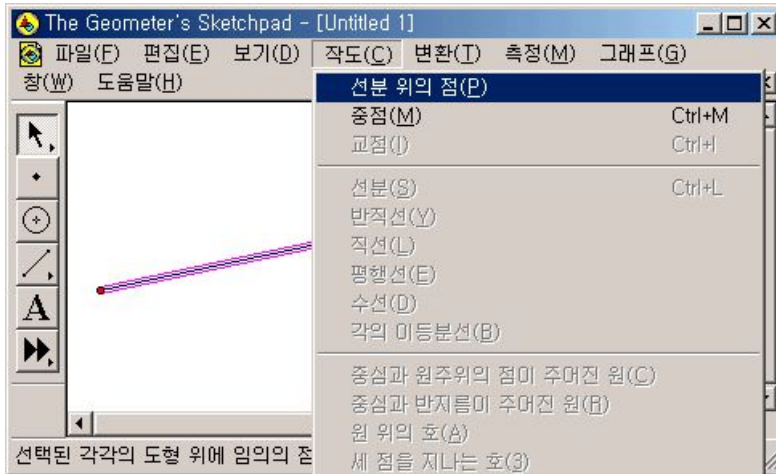
이제  도구를 이용하여 중심과 반지름을 지정하면 원을 그릴 수 있다.

 도구를 선택한 후, 원하는 중심 위치에서 마우스를 한 번 클릭하고 마우스를 움직이면 원 모양이 나타난다. 원하는 반지름의 크기가 되었을 때 마우스를 한 번 더 클릭하면 된다. 이와 같이  도구로 원을 그리면, 중심과 원주 위의 한 점이 새로 생성된다. 그 두 점을  도구로 끌해보면 원의 위치와 크기가 바뀌게 된다.

이러한 도구들을 이용하여 도형 위의 점을 선택 해 보려고 한다. 우선  를 선택한 후, 화면의 빈 곳이 아닌, 이미 그려진 도형 (선분) 가까이로 마우스를 가져가 보면 선분의 색이 하늘색으로 바뀌는 걸 알 수 있다. 이때 마우스를 누르면 선분 위에 새로운 점 이 하나 찍어진다.  도구로 바뀌서 이 점을 이리 저리 끌해보면 ‘선분 위’에 찍어진 점은 그 선분 위에서만 움직일 수 있는 점이 된다. 반면에 화면의 빈 곳에 찍었던 점은 화면 위의 아무 곳이나 갈 수 있다.

어떤 주어진 도형 위에 점을 찍는 또 하나의 방법은 메뉴를 이용하는 것이다.  도구로 선분을 하나 선택한 후(선분이 굵어진다), [작도-선분 위의 점] 메뉴를 실행해도 선분 위에서만 움직이는 점을 작도할 수 있다.

한편, 선분을 선택한 상태에서 [작도-중점] 메뉴를 실행하면, 선택한 선분의 정확한 중점 위치에 새 점이 찍어진다. 이 점은 ‘중점’이라는 조건을 가지고 있으므로,  로 이동하려고 하면 선분 전체가 따라 움직이게 된다. 그러나 선분의 끝점을 움직여 선분의 모양을 변화시키면 그에 따라 중점도 정확한 새 위치로 움직인다.



[그림 19] GSP 작도 화면

#### 1.2.4) 이름 붙이기

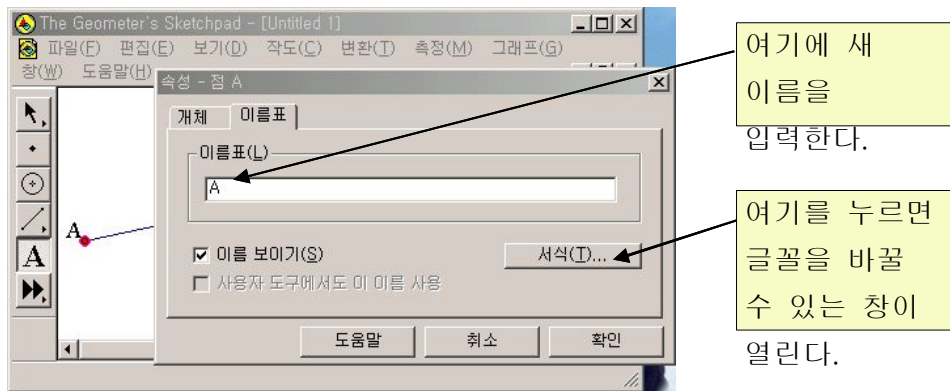
**A** 도구를 선택한 후 마우스를 화면의 빈 곳에 가져가면 하얀 손가락 모양이 나타난다. 도형이 있는 옆으로 가져가면 손가락의 색깔이 까맣게 변할 때가 있는데, 이 때 마우스를 누르면 손가락 있던 위치에 알파벳 문자가 나타난다. 대개 점의 경우는 A, B, C, ... 선분이나 직선의 경우는 i, j, k, l, ... 등과 같이 나타난다. 즉, 도형의 이름표인 것이다. 이름표가 나타난 도형에서 다시 까만 손가락을 클릭하면 이름표가 숨겨지기도 한다.

이름표 위로 마우스를 약간 옮기면 하얀 손가락의 손목 부분에 조그만 A자가 써진 모양이 된다. 이 상태에서 마우스를 드래그하면, 이름표의 위치를 조금씩 변경할 수 있다.

이름표 위(손목에 A자가 써진 손가락)에서 마우스를 더블클릭하면 다음과 같은 창이 열리는데, 이름을 바꾸거나 글꼴을 바꿀 수 있다.

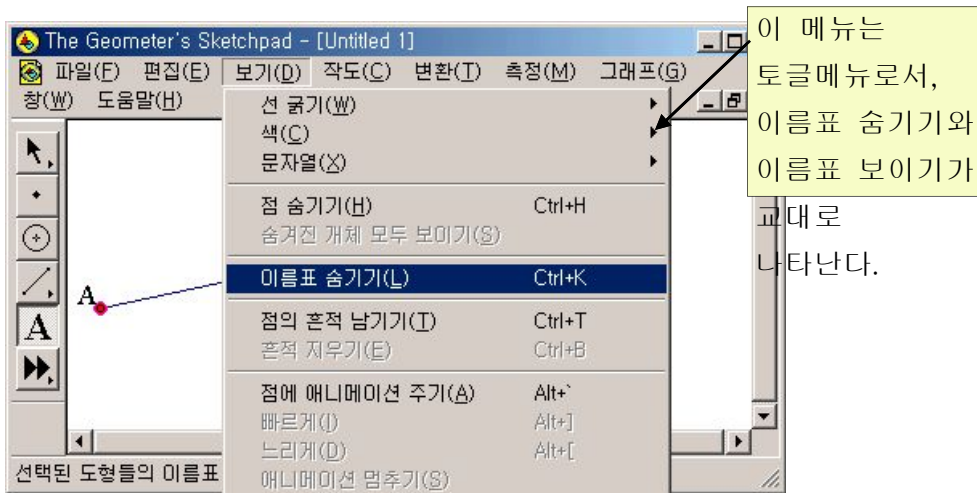
이름표의 글꼴을 바꾸려면 위와 같이 [서식] 단추를 눌러 바꿀 수 있으며, 글자 크기만 빨리 바꾸려면 이름이 붙은 도형이 선택된 상태에서 키보드의 Alt 키와 함께 < 또는 > 키를 누르면 글자가 점점 커지거나 작아진다. 특히 이

름을 a[1]과 같이 입력하면 화면에는  $a_1$ 과 같이 첨자 모양으로 나타난다.



[그림 20] 점에 이름 붙이기

이름을 나타나게 하거나 숨기는 일은 다음 그림처럼 [보기] 메뉴를 이용할 수도 있다.



[그림 21] 이름표 숨기기

한편 화면 빈 곳에 하얀 손가락을 더블클릭하면, 문장(설명문 등)을 입력할 수도 있다.

### 1.3) 메뉴

#### 1.3.1) 파일 메뉴

위 그림과 같이 GSP 4.0의 [파일] 메뉴는 어느 윈도우용 프로그램과 마찬가지로 현재 문서창을 그대로 두고 새 문서를 열거나, 기존에 디스크에 저장된 파일을 열 수도 있고, 저장하고 닫는 등의 메뉴가 있다. 이 메뉴를 이용하여 작성된 문서(그림)을 관리할 수 있다.

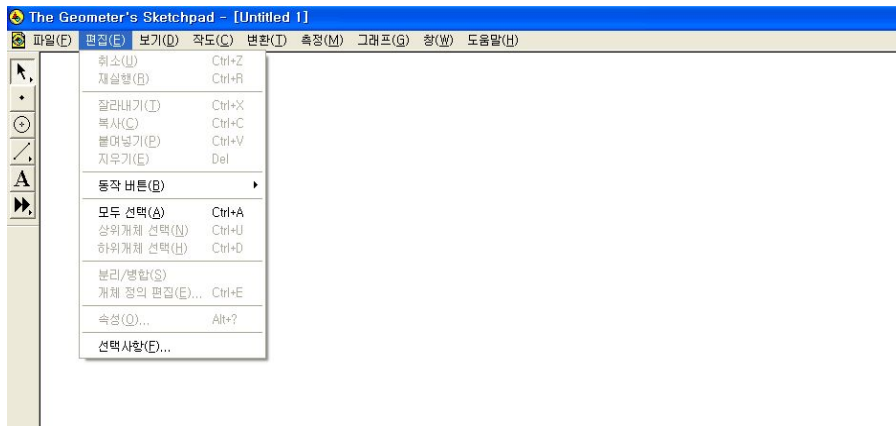


[그림 22] 파일 메뉴

다른 이름으로 저장: 현재 문서를 다른 위치 또는 다른 이름으로 저장한다.

JavaSketchpad 문서(HTML 파일)로 저장할 때나 WMF 형식 그림 (Windows에서만 가능)으로 저장할 때도 이 명령을 사용한다.

#### 1.3.2) 편집 메뉴



[그림 23] 편집 메뉴

편집 메뉴에서는 최근의 작업순서대로 작업을 취소할 수 있으며 저장하기 전 단계까지 취소가 가능하다. 또한 재실행, 잘라내기, 복사, 붙여넣기, 지우기는 윈도우용 프로그램에서와 공통적으로 쓰이고 탐색기에서도 똑같이 적용된다.

GSP의 편집 메뉴에는 동작 버튼이 있는데 GSP의 한 개체로서 누르는 순간 정해진 애니메이션을 시작하거나 어떤 개체를 숨기거나 보여주는 등의 동작을 한다.

분리/병합: 이 명령의 작용은 무엇이 선택되어 있느냐에 따라 달라진다.

- 두 점(그중 하나는 독립된 점이어야 함): 두 점을 하나로 병합한다. (점 병합)
- 하나의 독립된 점과 하나의 경로 개체: 점을 경로 위의 점으로 만든다. (점을 경로에 병합)
- 두 개 이상의 글상자, 측정값 또는 이름표 있는 개체(적어도 하나는 글상자여야 함): 선택된 문자열들을 이어서 새로운 글상자를 만든다. (문자열

병합)

- 두 개 이상의 하위도형을 갖는 독립된 점: 점을 각 하위도형에 대하여 하나씩, 여러 개의 점으로 분리한다. (점 분리)
- 경로 위의 점 또는 교점: 점을 독립된 점으로 만든다. (경로에서 점 분리)
- 병합된 문자열: 병합된 문자열을 각각의 원래 문자열로 분리한다.(병합된 문자열 분리)

### 1.3.3) 보기 메뉴

보기 메뉴에는 개체의 시각적인 모양을 바꾸거나 도구모음의 표시하거나 숨기는 등의 설정을 하는 명령이 들어 있다. 이 명령을 이용하여 스케치의 시각적인 효과를 향상시키고, 거기에 담긴 수학적 개념에 대한 의사소통에 도움을 줄 수 있다. 선 굵기나 색, 숨기기 등을 적절히 사용하면 보는 사람으로 하여금 중요한 부분을 알기 쉽게 할 수 있으며, 이름표를 잘 이용하면 스케치의 목적과 그 배경의 수학적 개념을 효과적으로 설명할 수 있다. 또한 혼적 남기기나 애니메이션 기능은 그려진 개체들 사이의 수학적 관계를 시각적으로 나타내어 준다.

### 1.3.4) 작도 메뉴

이 메뉴에는 기하학적 작도를 할 수 있는 명령들이 있다. 작도는 GSP의 그리기 도구를 이용할 수 있지만, 어떤 특정한 작도는 작도 메뉴에서 제공하는 기능을 사용하면 더 쉽고 빠르게 작도 할 수 있다.

작도(C)	
도형 위의 점(Q)	
교점(I)	Ctrl+I
중점(M)	Ctrl+M
선분(S)	Ctrl+L
수선(D)	
평행선(P)	
각의 이등분선(B)	
중심과 한 점이 주어진 원(I)	
중심과 반지름이 주어진 원(R)	
원주 위의 호(E)	
세 점을 지나는 호(A)	
내부(N)	Ctrl+P
자취(U)	
작도 도움말(H)...	

선택해야 할 도형

← 하나 또는 그 이상의 도형

← 두 선

← 하나 또는 그 이상의 선분

← 둘 또는 그 이상의 점

↖ 직선과 하나 이상의 점, 또는 한 점과

↙ 하나 이상의 직선

← 세 점, 각의 꼭지점이 두 번째가 되도록

← 두 점

← 한 점과 한 선분

← 중심과 원주 위의 두 점

← 세 점

← 점들, 한 원, 또는 한 호

← 도형과 경로 위의 한 점

내부: 주어진 도형들로 결정되는 내부를 만든다. 선택된 개체의 종류에 따라 다음과 같이 다른 종류의 내부를 만들게 된다.

- 다각형 내부 (선택: 세 개 이상의 점)
- 원 내부 (선택: 한 개 이상의 원)
- 부채꼴 내부 (선택: 한 개 이상의 호)
- 활꼴 내부 (선택: 한 개 이상의 호)

자취: 경로 위의 점이 움직일 때, 그 점에 의해 결정되는 개체가 움직이면서 만드는 자취를 작도한다.

### 1.3.5) 변환 메뉴

이 메뉴에 있는 명령들은 스케치에 있는 도형들에 어떤 기하학적 변환을 가해 새로운 도형을 만들어 내기 위해 사용된다. 그러므로써 사용자는 평행이

동, 회전이동, 닳음변환, 선대칭이동, 테셀레이션, 축소 또는 확대 모형, 만화경, 프랙탈 등 많은 것들을 구현할 수 있다. GSP에는 기본적으로 평행이동, 회전이동, 닳음변환, 선대칭이동의 네 가지 변환이 있다.

테셀레이션에 필요한 다음 명령들은 설명한다.

**벡터 지정:** 선택된 두 점으로 결정되는 벡터를, 앞으로 있을 평행이동의 벡터로 지정한다. 두 점 중 먼저 선택된 것이 벡터의 시작점, 나중에 선택된 것이 벡터의 끝점으로 간주된다.

**평행이동:** 선택된 도형을, 어떤 벡터만큼 평행 이동시켜 새로운 도형을 만든다. 이미 ‘벡터 지정’ 명령을 했다면 그 벡터를 사용할 수 있고, 벡터 지정 여부에 관계없이 거리와 방향을 입력하거나 가로방향의 거리와 세로 방향의 거리를 입력하는 등 다양한 방법으로 벡터를 정해줄 수 있다.

**회전이동:** 선택된 도형을, 한 점을 중심으로 어떤 회전각만큼 회전 이동시켜 새로운 도형을 만든다. 중심이 지정되어 있지 않으면 자동적으로 한 점이 중심으로 지정된다.

### 1.3.6) 측정 메뉴

이 메뉴에 있는 명령들은 선택된 개체에 대해서 어떤 측정을 하여 값을 가진 개체(측정값)를 만든다. 메뉴의 위 부분에는 기하학적인 양(길이, 각, 비율, 넓이 등)을 측정하는 명령들이 있고, 메뉴의 아래 부분에는 해석적인 양(좌표, 방정식, 기울기, 좌표상의 거리 등)을 측정하는 명령들이 있다. 또한

기존의 측정값이나 함수, 매개변수 등을 가지고 새로운 값을 만들어낼 수 있는 계산기도 이 메뉴에서 열 수 있다.

측정의 대상이었던 개체가 움직이면, 측정값이 그에 따라 바뀐다. 측정 메뉴의 명령들은 작도 메뉴의 명령들과 마찬가지로 각각 알맞은 개체들이 스케치에서 선택되어 있어야 사용 가능하게 된다.

선택해야 할 도형	
측정(M)	
길이(L)	← 한 개 이상의 선분
거리(D)	← 두 점, 또는 한 점과 하나의 선 개체(선분, 반직선, 직선)
둘레의 길이(P)	← 한 개 이상의 다각형 내부 또는 부채꼴 내부, 활꼴 내부
원주의 길이(C)	← 원이나 호, 현 또는 부채꼴
각의 크기(A)	← 세 점(두 번째 선택된 점이 각의 꼭짓점)
넓이(E)	← 한 개 이상의 원 또는 내부
중심각의 크기(G)	← 한 개 이상의 호, 또는 한 개의 원과 그 위의 두 점, 또는 한 개의 원과 그 위의 세 점
호의 길이(L)	← 한 개 이상의 호, 또는 한 개의 원과 그 위의 두 점, 또는 한 개의 원과 그 위의 세 점
반지름의 길이(R)	← 한 개 이상의 원, 원의 내부, 호, 호의 내부
비율(Q)	← 두 개의 선분, 또는 한 직선 위의 세 점
	← (항상 사용 가능)
좌표(T)	← 한 개 이상의 점
x 좌표(X)	← 한 개 이상의 점
y 좌표(Y)	← 한 개 이상의 점
좌표상의 거리(D)	← 두 점
기울기(S)	← 한 개 이상의 선 개체(선분, 반직선, 직선)
방정식(E)	← 한 개 이상의 직선 또는 원

### 1.3.7) 그래프 메뉴

이 메뉴를 통해 좌표계를 설정하고, 매개변수나 함수를 만들고, 함수를 미분하고, 좌표가 주어진 점을 찍고, 함수의 그래프를 그리고, 값의 변화를 표로 만드는 등의 작업을 할 수 있다. 주로 해석기하적이거나 대수적인 성질을 탐구하는 데 사용되는 명령들이다.

새 좌표계 설정: 평면에 새로운 좌표계를 설정하고 앞으로 그것을 사용하도록 지정한다. 이 명령은 선택되어 있는 개체의 종류에 따라 다음과 같이 여러 가지 방법으로 새 좌표계를 설정하게 된다.

## 4. 테셀레이션과 GSP

### (1) 다각형의 내각과 외각

#### 1) 다각형의 내각과 외각

테셀레이션을 보면 여러 형태의 다각형들을 변형한 것이다. 테셀레이션을 공부하는 것은 학생들로 하여금 각과 다각형의 기본 속성을 탐구하게 할 수 있게 하며 기하학적 다각형을 가지고 테셀레이션을 제작할 때 그것의 가능 여부를 탐구 하면서 도형의 모양 각에 대한 수학적 이해가 심화될 수 있다. 또한 보다 복잡한 테셀레이션을 만들기 위해선 다각형의 성질을 알아야 한다. 다각형으로 테셀레이션을 할 수 있는 방법은 한 꼭짓점에 모이는 다각형의 내각의 합이  $360^\circ$ 가 되어야 한다. 따라서 다각형의 내각에 관하여 학습하는 것이 중요하다. 그리고 정다각형의 한 내각의 크기는 꼭짓점에서의 한 외각의 크기를 구하여  $180^\circ$ 에서 빼면 간단하게 구할 수 있다. 그러므로 다각형의 외각에 관해서도 학습하면 테셀레이션을 보다 쉽게 만들 수 있다.

일반적으로  $n$ 각형의 한 꼭짓점에서 대각선을 모두 그으면  $n$ 각형은  $(n-2)$ 개의 삼각형으로 나누어 진다. 그런데 삼각형의 내각의 크기의 합은  $180^\circ$  이므로  $n$ 각형의 내각의 크기의 합은  $180^\circ \times (n-2)$  이다.

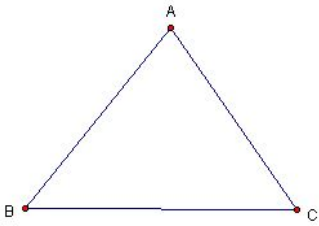
다각형의 외각의 합은  $n$ 각형의 한 꼭짓점에서의 내각과 외각의 크기의 합은 항상  $180^\circ$ 이므로

$$(\text{내각의 크기의 합}) + (\text{외각의 크기의 합}) = 180^\circ \times n$$

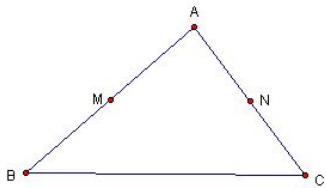
이다. 따라서  $n$ 각형의 외각의 크기의 합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\text{외각의 크기의 합}) &= 180^\circ \times n - (\text{내각의 크기의 합}) \\ &= 180^\circ \times n - 180^\circ \times (n-2) \\ &= 360^\circ \end{aligned}$$

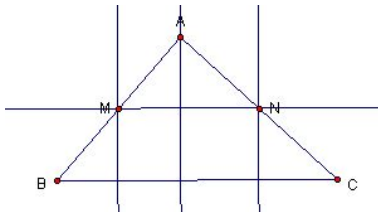
## 2) GSP를 이용한 삼각형의 내각의 합



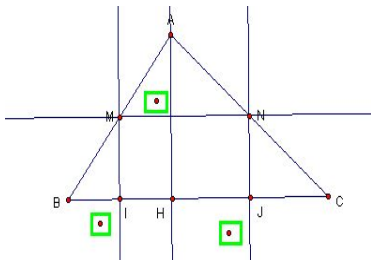
- ① 직선(☞)도구를 사용하여 임의의 삼각형을 그린다. 이름도구(A)를 사용하여 점A, 점B, 점C의 이름을 붙인다.



- ② 선분AB와 선분AC를 선택 후 작도-중점(또는 ctrl + M)를 선택한다. 각 중점을 이름도구(A)를 사용하여 점M, 점N의 이름을 붙인다.

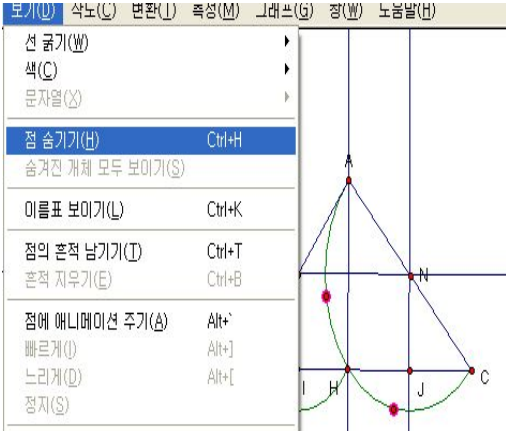


- ③ 점M과 선분BC를 선택 후 작도 - 수선, 점N과 선분BC를 선택 후 작도 - 수선, 점A와 선분BC를 선택 후 작도 - 수선을 긋는다. 점M과 점N을 선택 후 작도-직선을 이어 준다.



- ④ 이름도구(A)를 사용하여 교점에 왼쪽과 같이 이름을 붙여준다.

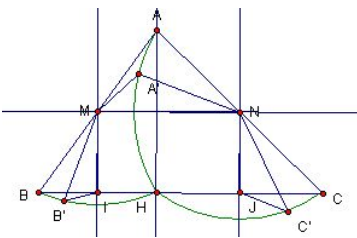
점 (•) 도구를 사용하여 왼쪽과 같이 임의의 점을 찍어준다.



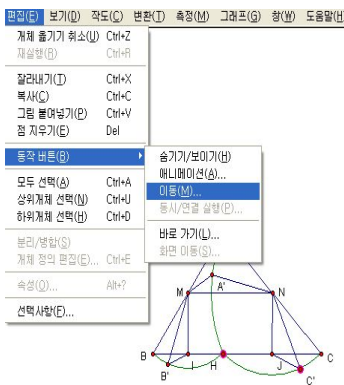
⑤ 세 점을 선택 후 작도-세 점을 잇는 호를 사용하여  $\widehat{AH}$ ,  $\widehat{BH}$ ,  $\widehat{CH}$  를 만든다. 각 호 위에 세 점을 선택 후 보기- 숨기기를 사용하여 숨겨 주고 점 (•) 도구를 사용하여 각 호 위에 점을 찍어준다. 그리고 각 호위의 점에 이름도구(A)를

사용하여 각 점 A', 점 B', 점 C' 이름을 붙인다.

(호 위에 점을 찍어 주므로 호의 모양은 변하지 않고 점이 호 위에서만 움직이게 된다.)



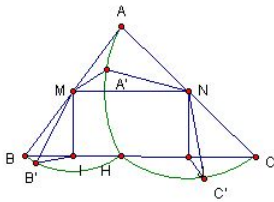
⑥ 점 A'와 점 M 선택 후 작도- 선분(또는 ctrl + L)을 그리고 같은 방법으로 선분 A'N, 선분 MN을 긋는다. 마찬가지로  $\overline{BM}$ ,  $\overline{BI}$ ,  $\overline{MI}$ ,  $\overline{CN}$ ,  $\overline{CJ}$ ,  $\overline{NJ}$ 을 잇는다.



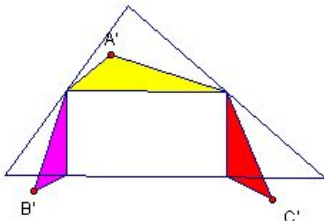
⑦ 세 개의 수선과 직선 MN을 선택 후 보기- 숨기기(또는 ctrl+H)를 선택한다. 그리고 점 A'와 교점 H를 선택 편집-동작버튼-이동을 사용하면 점 A'이 호를 따라 교점 H로 이동하는 동작버튼이 생긴다. 이와 같은 방법으로 B'→H, C'→H로 이동하는 버튼을 만들어 준다. 세 개의 동작버튼을 선택

후 편집-동작버튼-동시/연결실행을 선택하면 동시에 움직이게 할 수 있다.  
만들어진 버튼을 선택 후 오른쪽 마우스를 누르면 속성을 볼 수 있고 이름을 바꿀 수 있다.

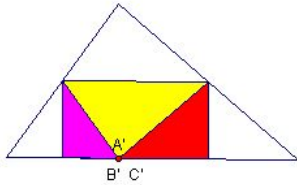
이동: A' -> H	이동: A' -> A
이동: B' -> H	이동: B' -> B
이동: C' -> H	이동: C' -> C
접기	펼치기



⑧ 이제 반대로 원래의 위치로 돌아갈 수 있는 동작 버튼을 만들려면 점 A'와 점 A를 선택 하여 편집-동작버튼-이동을 사용하면 된다. 마찬가지로 각 점으로 이동하는 버튼을 만들고 세 개의 버튼이 동시에 실행 될 수 있도록 만들어 준다. (Tip : 이동하려는 순서대로 점을 선택해 주어야 한다.)



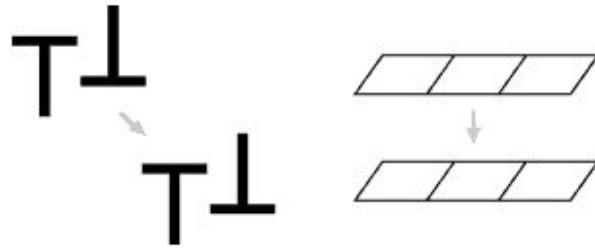
⑨ 삼각형이 움직이는 것을 보기 위해 점 A', 점 M, 점 N을 선택 후 작도-삼각형의 내부(또는 ctrl+P)를 사용해 삼각형의 내부를 칠해 준다.  $\triangle B'MI$ ,  $\triangle CNJ$ 의 내부도 칠한다. 또 점 A', 점 B', 점 C'를 제외 한 모든 점은 보기-숨기기를 해준다. 또한 세 개의 호도 보기-숨기기를 한다.



## (2) 평행이동 (Translation)

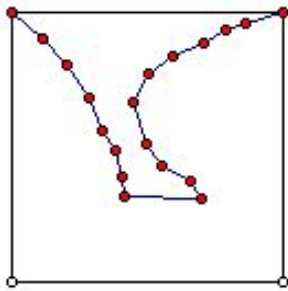
### 1) 평행이동

평행이동은 한 평면 위에 특수한 방향으로 특별한 거리만큼 원래의 도형의 모든 점들이 움직이는 것이다. 평행이동 한 후의 도형은 원래의 도형과 상호 좌우의 방향이 변하지 않는다.

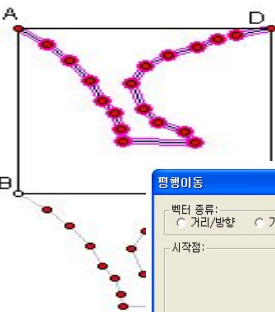


[그림 24] 평행이동

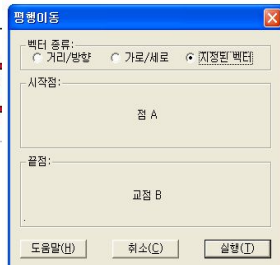
## 2) GSP를 활용한 테셀레이션 (평행이동)

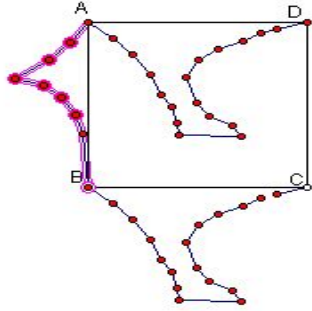




- ① 도구상자의 사용자 도구 [▶▶] → 정다각형 → 4/정다각형(변)]을 선택하고 한 변위에 새의 머리를 직선(↘)과 점 (•)도구를 사용하여 그린다.

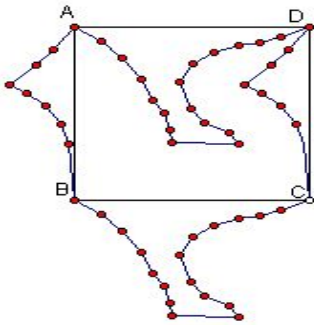


- ② 이름도구(A)를 사용하여 점A, 점B, 점C, 점D의 이름을 붙인다. 점A와 점B를 선택하고 변환-벡터지정을 한 후, 아랫변으로 변환-평행이동을 선택하여 평행이동시킨다.

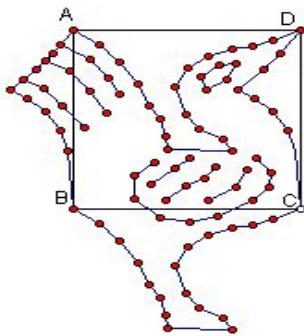






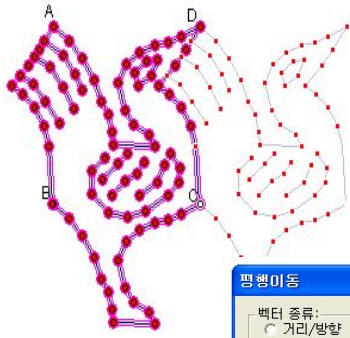
③ 선분AB위에 나머지 모습을 직선(  )과 점(  )을 사용해서 그리고 점A와 점D를 선택 한 후, 변환-벡터지정을 한 후, 변환-평행이동을 시킨다.



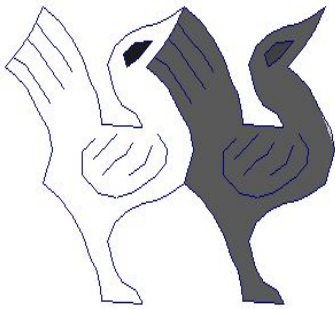
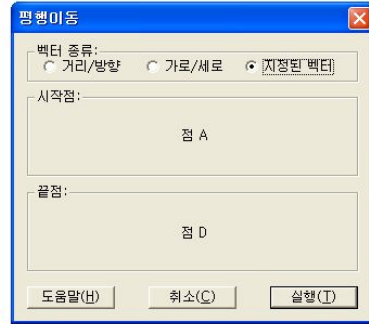
④ 변환-평행이동 시킨 후 새의 형태가 완성 된 모습이다.



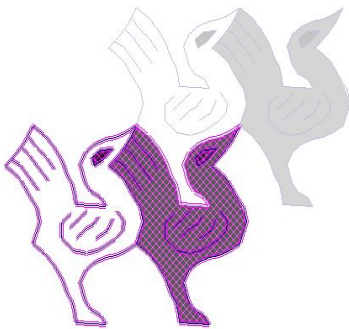
⑤ 직선(  )과 점(  )을 사용해서 새의 형태를 자세히 꾸민다.



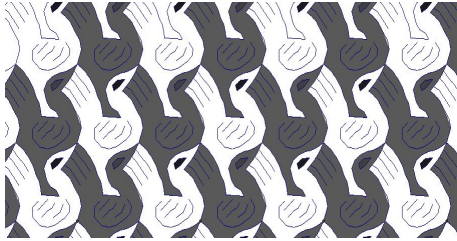
⑥ 정사각형 한 변을 벡터로 지정하고, 지정된 벡터로 평행이동을 시킨다.



⑦ 평행이동 시킨 새의 점들을 모두 선택한 후, 작도-다각형의 내부를 실행하여 원하는 배경색으로 바꾼다. 점(•)도구를 클릭한 후 편집-점 모두선택(ctrl+A) 한 후, 보기-점 숨기기(ctrl+H)를 실행한다.



⑧ 전체를 선택하고 정사각형의 대각선 길이만큼 변환-평행이동 45°도 회전시킨다.

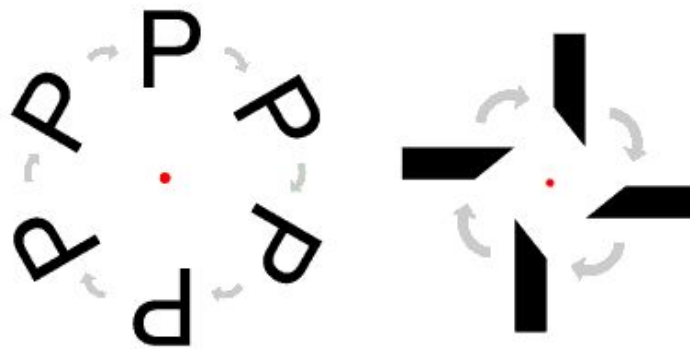


⑨ 테셀레이션이 완성된 모습이다.

### (3) 회전 (Rotation)

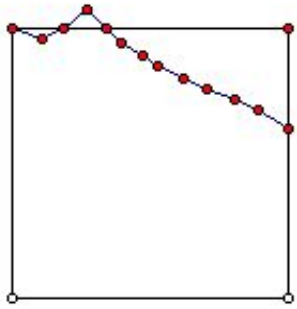
#### 1) 회전이동




회전 이동은 한 평면 위에서 고정된 한 점에 대해 일정한 각도만큼 이동되는 것을 말하며, 그 점을 ‘회전의 중심’ 이라고 하며 회전의 중심은 이동되지 않는다. 모든 정다각형은 회전 대칭을 가지며 회전의 중심은 그 다각형의 중심이다.  $n$ 개의 변을 가지는 정다각형은  $n(n\text{-fold})$ 중첩침 회전 대칭을 가진다 (Seymour & Britton, 1989).

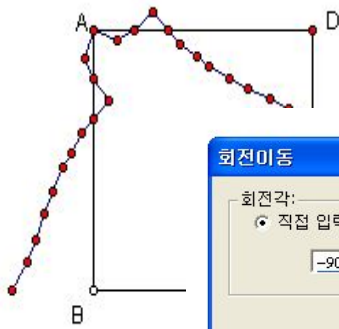


[그림 25] 회전이동

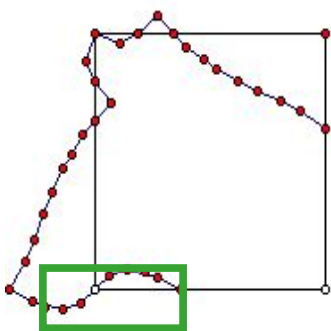
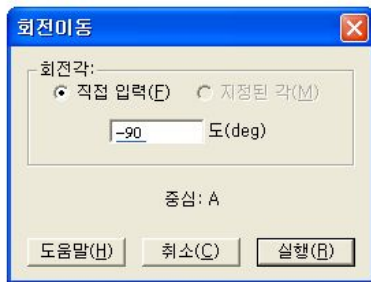
2) GSP를 활용한 테셀레이션 (회전이동)





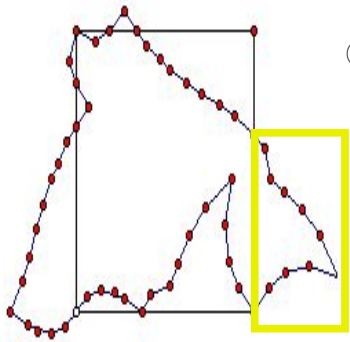
① 도구상자의 사용자 도구 [  → 정다각형 → 4/정다각형(변)]을 선택하고 임의의 한 변에 물고기의 꼬리와 등을 직선()와 점()도구를 사용해서 그린다.



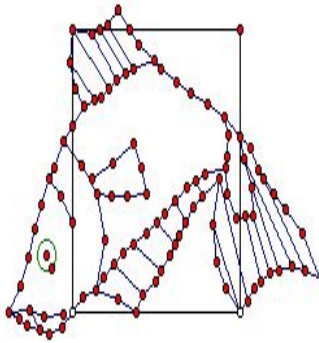
② 그린 점과 선을 선택한 후 점A를 중심축으로 변환 - 회전이동 (-90°) 시킨다.



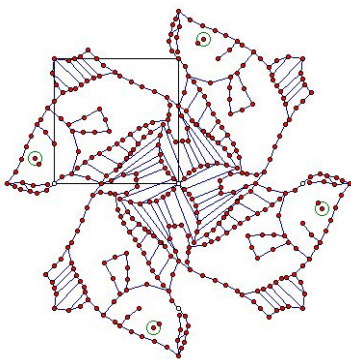
③ 그림에 초록 상자 안 처럼 물고기의 입을 직선()과 점()도구를 사용해서 그린다. 그리고 점 B를 중심축으로 변환 - 회전이동 시킨다.



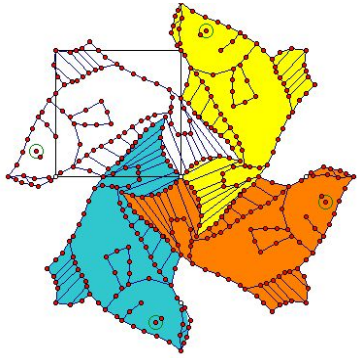
- ④ 노란 네모 안처럼 물고기의 꼬리를 직선 ( / )과 점 ( • )를 사용해서 그린다. 점C를 중심 축으로 변환-회전이동 시킨다.



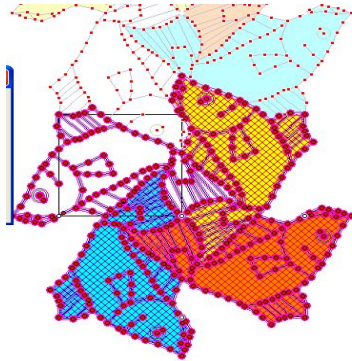
- ⑤ 직선 ( / )과 점 ( • )도구를 사용하여 물고기의 형태를 자세히 꾸민다.



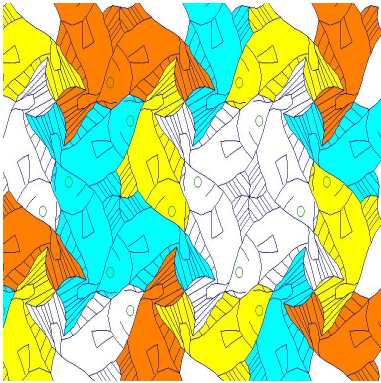
- ⑥ 점C를 선택한 후, 변환-중심 지정한다(또는 A를 더블클릭한다). 모든 점을 선택 후 변환 - 회전이동(90°)를 세 번 실행하면 4개의 꼬리가 점C를 중심으로 모여 있게 된다.



⑦ 각 꼭짓점을 차례대로 선택한 후 작도-다각형내부를 선택한다. 물고기 색을 다르게 칠해준다.



⑧ 점A를 중심으로 변환-회전이동(90°)한다.



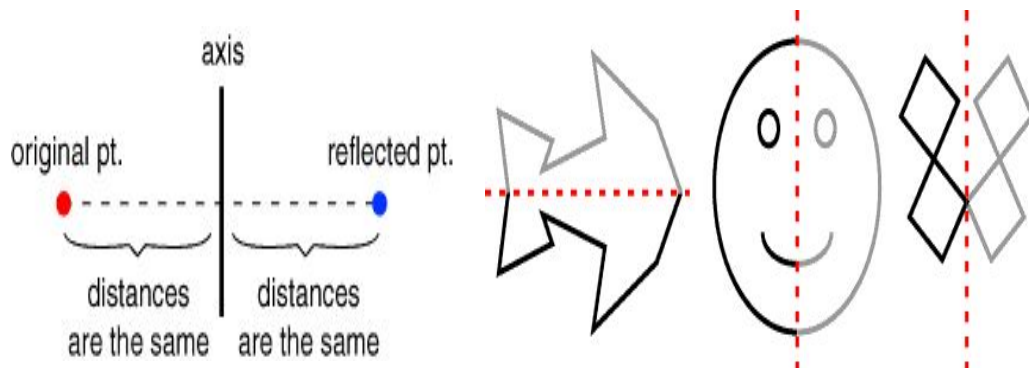
⑨ 중심을 A, B, C, D등으로 옮겨가면서 회전이동하면 테셀레이션이 완성된다.

#### (4) 반사 (Reflection)

##### 1) 반사 이동

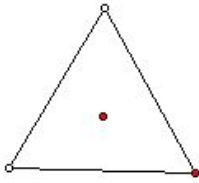
반사이동은 평면 위의 한 직선을 축으로 하여 뒤집기에 의해 새로운 위치로 이동하는 것을 말하는데, 반사의 축을 따라 그 평면에 수직으로 거울을 놓았을 때, 본래 도형의 거울의 상이 반사 후의 상과 일치한다. 반사 축 즉 대칭 축 위에 있는 점은 이동되지 않는다.


다각형에서 반사의 축의 개수는 그 다각형의 중요한 속성이 된다. 다각형은 반사의 축이 없을 수도 있고, 몇 개를 가질 수도 있다. 직사각형이나 마름모가 아닌 평행사변형은 반사의 축이 없고, 정사각형이 아닌 직사각형과 마름모는 두 개의 반사의 축을 잡는다. 정  $n$ 각형은 정확하게  $n$ 개의 반사의 축을 잡는다(Seymour & Britton,1989).

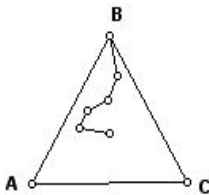



[그림 26] 반사이동

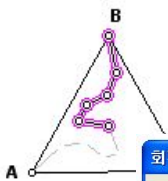
2) GSP를 활용한 테셀레이션 (반사이동)



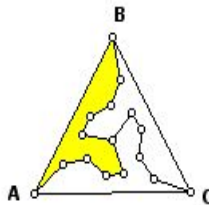
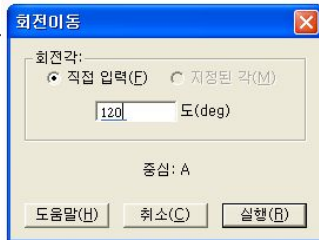
- ① 사용자도구( )에서 3/정삼각형(무게중심)을 불러온다.



- ② 직선( )을 이용하여 무게중심까지 선을 그린다.



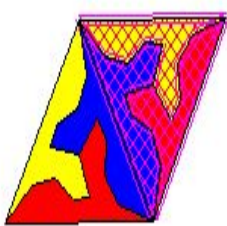
- ③ 무게중심을 변환-중심(또는 더블클릭)선택, 작도한 직선과 점을 모두 선택한 후, 변환-회전이동( $120^\circ$ )를 2번 실행한다.



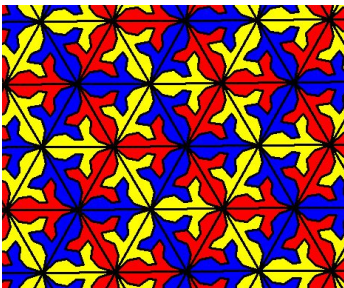
- ④ 선의 바깥 점들을 모두 선택한 후, 작도-다각형 내부를 선택한 다음 보기-색에서 도형의 내부의 색을 정한다.



- ⑤ 보기-색에서 각각 다른 색상으로 바꾸어 준다.  
 모든 점을 선택(점 도구)를 선택한 후 ctrl+A  
 를 누르면 모든 점이 선택)한 후, 보기-점 숨기  
 기를 실행한다.



- ⑥ 삼각형 오른쪽 선분 선택 후 변환-대칭축 지정  
 (또는 더블클릭)하고, 변환-선대칭이동을 실행  
 한다.



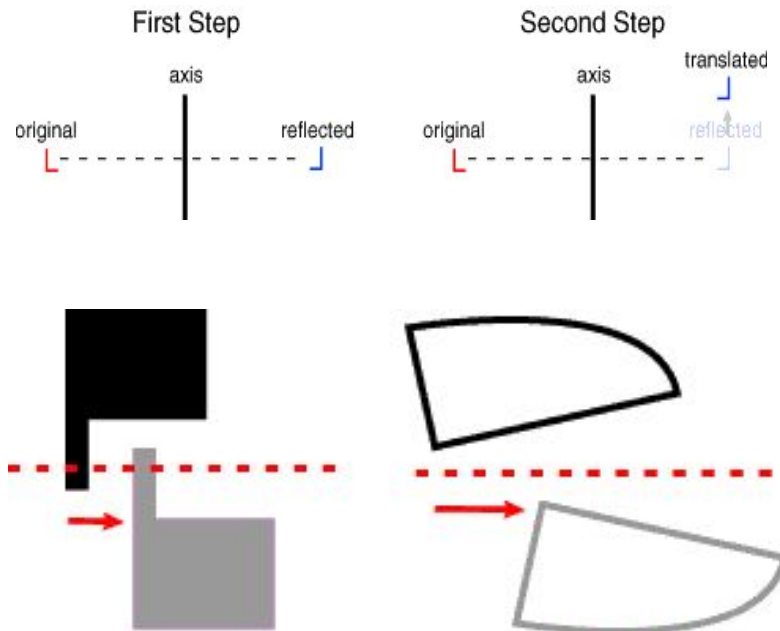
- ⑦ 중심을 계속 바꾸어 가면서 선대칭 이동을 하  
 면, 테셀레이션이 완성된다.

(5) 미끄러짐 반사 (Glide Reflection)

1) 미끄러짐이동

미끄러짐 이동은 평행이동과 반사이동을 조합한 것으로 먼저 반사의 축에


대해 뒤집고, 다시 반사의 축에 평행한 직선을 따라 이동 시킨다. 이때 평행 이동 한 후에 반사시켜도 그 결과는 동일하다. 평행이동과 반사이동을 가지는 임의의 도형은 미끄러짐 이동을 가진다. 그러나 반사이동을 가지지 않으면서 미끄러짐을 가질 수 있어 그 역이 항상 성립하지는 않는다(Seymour & Britton,1989).



[그림 27] 미끄러짐 이동

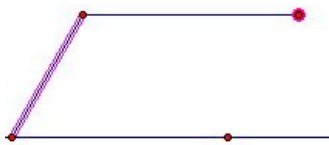
## 2) GSP를 활용한 테셀레이션 (미끄러짐 이동)




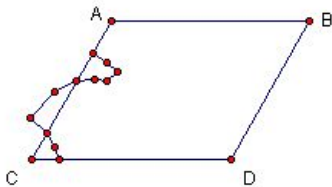
① 직선(  )도구를 이용해서 직선을 그리고 임의의 점을 찍는다.






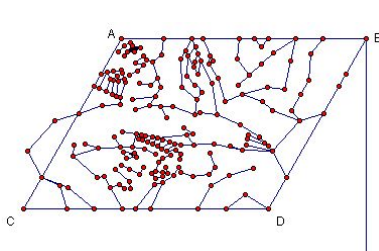
점과 직선을 선택하고 작도-평행선을 선택한다.





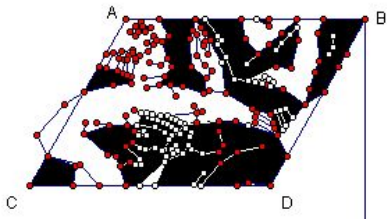
② 직선(  )도구를 이용해서 ①번과 동일한 방법으로 평행사변형을 만들어 준다.



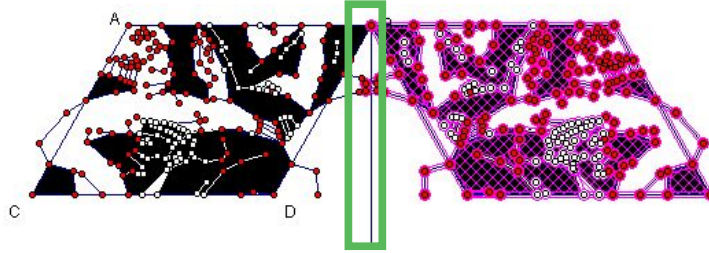
③ 이름도구(  )를 사용하여 점A, 점B, 점C, 점D의 이름을 붙인다. 선분AC에 점(  )과 직선(  )을 이용해서 그리고자 하는 그림을 그린다.



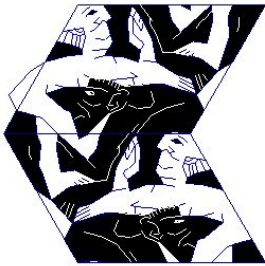
④ 점(  )과 직선(  )을 이용해서 그리고자 하는 그림을 그린다. 점B를 선택한 후 선분CD를 대칭축으로 지정하고 선대칭 이동을 하고 난 점과 B를 연결한다. 선대칭 축이 된다.



⑤ 다각형 내부를 칠하기 위해 칠하고자 하는 외부의 점을 선택한다. ctrl+P를 누르면 다각형의 내부가 칠해진다.



⑥ 초록색 사각형 안의 직선을 대칭축을 지정 후 변환-선대칭을 이동을 한다.



⑦ 선분 BC를 벡터로 지정 후 변환-평행이동을 한다. 점(♦)를 선택 후 ctrl+A를 선택하면 모든 점이 선택이 된다. 그리고 ctrl+H를 누르면 모든 점이 숨겨진다. 필요 없는 선들도 모두 숨기기 해준다.



⑧ 점A와 점B를 벡터로 지정 후 작도-평행이동, 점A와 점D'로 벡터로 지정 후 작도-평행이 해주면서 테셀레이션을 완성한다.

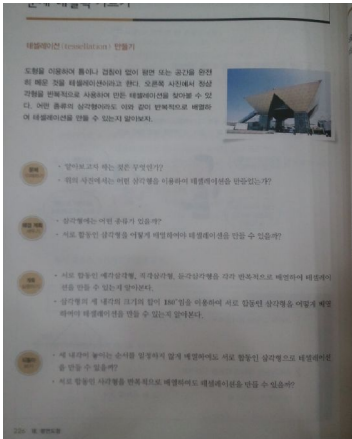
# 5. GSP를 활용한 테셀레이션 프로그램 학습 지도안

## (1) 프로그램 명

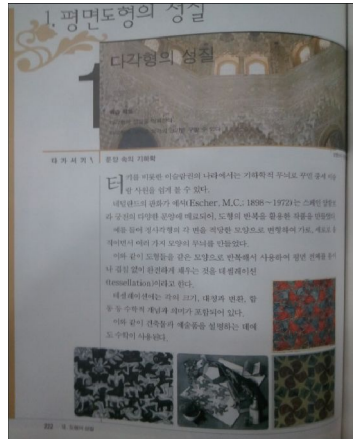
GSP를 이용한 테셀레이션 만들기

## (2) 정규교육과정과의 관계

수학 7 : 평면도형 - 다각형



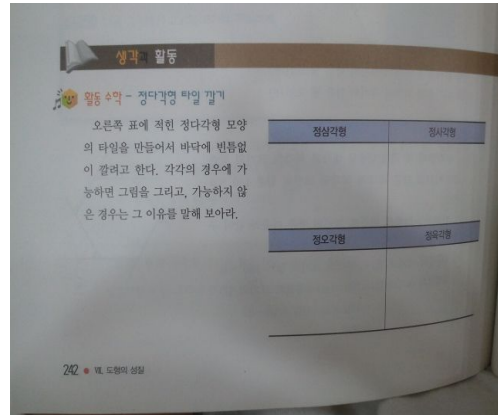
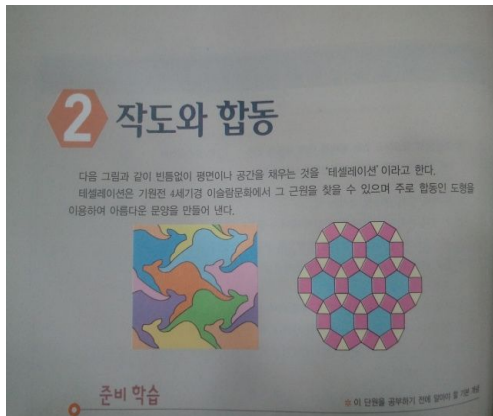
두산동아



도서출판 지학사



새롬교육



천재문화 중학교 1학년 수학

[그림 28] 테셀레이션을 활용한 중학교 1학년 교과서

### (3) GSP와 프로그램의 구성

다음 [표 1]은 GSP를 이용한 테셀레이션 만들기 프로그램 구성표이다.



[표 1] GSP를 이용한 테셀레이션 만들기 프로그램 구성

### (4) 프로그램 개관

테셀레이션이란 동일한 모양을 이용해 평면이나 공간을 빈틈이나 겹쳐지는 부분 없이 채우는 것을 뜻한다. 우리는 실생활에서 테셀레이션을 많이 접하고 있다. 테셀레이션 활동을 통해서 수학이 실생활과 밀접한 관련이 있으며 여기에 숨어있는 수학적 아이디어와 수학의 아름다움을 느낄 수 있다.

학생들에게 테셀레이션을 통해 다각형의 성질, 평행이동, 회전이동, 반사이동, 미끄러짐 이동 등을 학습시킬 수 있다. 또한 GSP 프로그램을 활용해 스스로 제작하고 구연하면서 도형에 대한 학습과 대칭을 분석하고 수학적 사고와 창의성을 발현시킬 수 있다.

(5) 프로그램 목표

- ① 테셀레이션의 정확한 의미를 말할 수 있다.
- ② 실생활에서 테셀레이션의 예를 찾을 수 있다.
- ③ 정다각형을 이용한 테셀레이션의 종류를 알 수 있다.
- ④ 변환에 의한 테셀레이션을 알 수 있다.
- ⑤ GSP를 이용하여 모양변환을 할 수 있다.
- ⑥ GSP를 이용하여 독창적인 테셀레이션을 만들 수 있다.
- ⑦ 실생활에서 수학적 원리를 찾으려는 태도를 기를 수 있다.

(6) 지도상의 유의점

- ① 학생들에게 테셀레이션에 관한 정확한 개념을 이해하게 한다.
- ② 실생활에서 다양한 예를 찾아 수학적 아이디어와 아름다움을 느낄 수 있도록 한다.
- ③ GSP를 이용하여 기능숙달과 자신의 창의적인 생각을 발휘할 수 있도록 한다.

(7) 본시학습의 실제

1-1. 지도차시 : 1차시

1-2. 본시학습목표

- 1. 테셀레이션의 의미를 이해할 수 있다.
- 2. GSP 사용방법을 알 수 있다.
- 3. 실생활에서 테셀레이션의 예를 찾을 수 있다.

교과	수학	중학교수준	지도교사	변윤화	
단원	테셀레이션	수준 및 수업형태	특기적성 교육	차시	1/3
학습 목표	1. 테셀레이션의 의미를 이해할 수 있다. 2. GSP 사용방법을 알 수 있다. 3. 실생활에서 테셀레이션의 예를 찾을 수 있다.				
준비 물	교사	컴퓨터, 대형모니터			
	학생	컴퓨터, 모니터, 필기도구			
학습 단계	학습 내용	교수-학습활동		지도상의 유의점 (시간)	
		교사활동	학생활동		
도입	분위기 조성	▶ 교과 영역을 소개하며 분위기 조성 ▶ 활동안내 - 테셀레이션 소개		컴퓨터(15분) ☞ 추상적인 모양의 테셀레이션 보다는 주변에서 볼 수 있는 소재로 된 테셀레이션을 제시한다.	
	동기 유발	▶ 테셀레이션 사진을 보여 주면서 흥미 유발 ▶ GSP로 만든 테셀레이션을 보여 준다.			
	학습 목표	▶ 학습목표를 읽는다. ▶ 학습순서를 알려준다. - 테셀레이션의 의미 설명 - 실생활에서 테셀레이션의 예를 찾는다. - 테셀레이션의 종류 (정다각형, 다각형) - GSP 메뉴소개 - GSP 기본작도법 설명			
전개	테셀레이션의	▶ 테셀레이션의 뜻 설명 ▶ 테셀레이션의 예가 무엇이 있는지 찾아본다.		(35분) ☞ 자신의 생각을 조리있게 표현 하도록 한다.	

교과	수학	중학교수준		지도교사	변운화	
단원	테셀레이션		수준 및 수업형태	특기적성 교육	차시	1/3
학습 단계	학습 내용	교수-학습활동			지도상의 유의점 (시간)	
		교사활동		학생활동		
전개	뜻과 활용 예	▶ 실생활에서 테셀레이션 예가 무엇이 있는지 찾아 설명하게 한다.		발표한다.		학생들이 문제 해결 할 때, 너무 어려워 할 경우 적절한 도움말을 제시한다.
	테셀 레이 션 종류	▶ 정다각형을 이용한 테셀레이션 - 정다각형, 준정다각형, 반정다각형, 결레다각형 테셀레이션 - 정다각형의 한 각의 크기 - 정다각형의 각의 합은 꼭짓점과 삼각형의 각의 합과 어떠한 관계가 있는가? ▶ 다각형을 이용한 테셀레이션 - 삼각형, 사각형 테셀레이션 - 규칙 찾아보기 - 모든 삼각형 사각형이 테셀레이션이 되는 이유		정다각형을 이용한 테셀레이션이 무엇이 있는지 확인한다.  다각형을 이용한 테셀레이션이 무엇이 있는지 확인한다.		
	GSP 소개 및 사용 방법	▶ GSP 소개 - 도형부분에서 GSP가 사용되는 예를 설명하면서 소개 ▶ GSP 사용방법 소개 - GSP 도구상자 설명 ▶ GSP 메뉴 설명		교사의 진행에 맞추어 도구상자와 메뉴의 기능을 익히고 따라한다.		

교과	수학	중학교수준		지도교사	변문화	
단원	테셀레이션		수준 및 수업형태	특기적성 교육	차시	1/3
학습 단계	학습 내용	교수-학습활동			지도상의 유의점 (시간)	
		교사활동		학생활동		
전개	GSP 기본 작도	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ GSP 기능설명</li> <li>- 꼭짓점 표시</li> <li>- 길이재기</li> <li>- 각의 크기 측정하기</li> <li>- 삼각형 만들기</li> <li>- 기본작도법 (다각형만들기)</li> <li>- 삼각형 테셀레이션 맛보기.</li> </ul>		교사의 진행에 맞추어 GSP를 활용한다.	테셀레이션 과 연관된 기능들을 중 심으로 GSP 를 익히게 한다.	
	내용 정리	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ GSP의 기능확인</li> <li>▶ GSP로 작도하는 방법 확인</li> </ul>		테셀레이션 점 검	(5분)	
결론	질의 응답	▶ 어려운 부분이나 질문사항 받음		어려운 사항 질 문	(4분)	
	차시 예고	▶ GSP로 모양변형함을 예고			(1분)	

2-1. 지도차시 : 2차시

2-2. 본시 학습목표

1. GSP로 평행이동, 회전이동, 반사, 미끄러짐 반사를 할 수 있다.
2. GSP로 변형된 테셀레이션을 만들 수 있다.

교과	수학	중학교수준		지도교사	변윤화	
단원	테셀레이션	수준 및 수업형태		특기적성 교육	차시	2/3
학습 목표	1. GSP로 평행이동, 회전이동, 반사, 미끄러짐 반사를 할 수 있다. 2. GSP로 변형된 테셀레이션을 만들 수 있다.					
준비 물	교사	컴퓨터, 대형모니터				
	학생	컴퓨터, 모니터, 필기도구				
학습 단계	학습 내용	교수-학습활동			지도상의 유의점 (시간)	
		교사활동		학생활동		
도입	전시 학습	▶ 분위기 조성 ▶ 전시학습 - 테셀레이션의 의미를 알고 GSP 사용법을 알 수 있다.			컴퓨터 (15분)	
	동기 유발	▶ 변형된 테셀레이션 사진을 보여 주며 흥미를 유발한다.				
	학습 목표	▶ 학습목표를 읽는다. ▶ 학습순서를 알려준다. - GSP로 평행이동, 회전이동, 반사, 미끄러짐 반사를 할 수 있다. - GSP로 변형된 테셀레이션을 만들어 본다.				
전개	GSP를 이용한 변형 방법	▶ 도형 하나로 평행이동, 회전이동, 선대칭이동 해보기 ▶ 평행이동 (철자“F”) - 철자“F” 평행이동 시킨다.			교사 진행에 맞추어 따라한다. (60분)	

교과	수학	중학교수준		지도교사	변윤화	
단원	테셀레이션	수준 및 수업형태	특기적성 교육		차시	2/3
학습 단계	학습 내용	교수-학습활동			지도상의 유의점 (시간)	
		교사활동		학생활동		
전개	GSP 를 이용 한 변형 방법	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 평행이동 후 어떻게 바뀌었을까?</li> <li>- 이동 전 후의 방향과 거리의 관계는 어떠한가?</li> <li>▶ 회전이동 (철자“F”)</li> <li>- 철자“F”를 회전이동 시킨다.</li> <li>- 회전이동 후 어떻게 바뀌었을까?</li> <li>- 이동 전 후의 방향과 거리의 관계</li> <li>▶ 반사이동(철자“F”)</li> <li>- 철자“F”를 반사이동 시킨다.</li> <li>- 반사이동 후 어떻게 바뀌었을까?</li> <li>- 이동 전 후의 방향과 거리의 관계</li> <li>▶ 회전이동 (새 그림) GSP로 그리기</li> <li>▶ 선대칭 &amp; 평행이동 GSP로 변환하기</li> </ul>		교사의 진행에 맞추어 GSP로 따라한다.	GSP를 활용 해 변환하고 변환을 했을 때 각각의 모양들이 서 로 합동이 됨을 발견할 수 있게 한 다.	
	내용 정리	▶ GSP로 변형된 도형으로 테셀레이션을 만들 수 있다.		테셀레이션 점검	(10분)	
결론	질의 응답	▶ 어려운 부분이나 질문사항 받음		어려운 사항 질문	(4분)	
	차시 예고	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ GSP로 자신의 독창적인 테셀레이션을 만들 것을 예고</li> <li>▶ 테셀레이션의 모양 생각해 오기</li> </ul>			(1분)	

3-1. 지도차시 : 3차시

3-2. 본시학습목표

1. 테셀레이션의 단위모양을 찾아 GSP로 따라할 수 있다.
2. GSP로 나만의 독창적인 테셀레이션을 만들 수 있다.

교과	수학	중학교수준		지도교사	변윤화	
단원	테셀레이션	수준 및 수업형태		특기적성 교육	차시	3/3
학습 목표	1. 테셀레이션의 단위모양을 찾아 GSP로 따라할 수 있다. 2. GSP로 나만의 독창적인 테셀레이션을 만들 수 있다.					
준비 물	교사	컴퓨터, 대형모니터				
	학생	필기도구, 컴퓨터, 대형모니터				
학습 단계	학습 내용	교수-학습활동			지도상의 유의점 (시간)	
		교사활동		학생활동		
도입	전시 학습	▶ 분위기 조성 ▶ 전시학습 - GSP로 모양변환을 할 수 있다.			컴퓨터 (15분)	
	동기 유발	▶ 에셔의 여러 가지 작품들을 GSP로 만들 수 있음을 이야기 한다. ▶ GSP로 만든 테셀레이션을 보여 준다.				
	학습 목표	▶ 학습목표를 읽는다. ▶ 학습순서를 알려준다. - 주어진 테셀레이션으로부터 단위 모양을 찾고 GSP로 만들어 본다. - 자신만의 독창적인 테셀레이션 만들어 본다.				
전개	GSP를 이용	▶ 테셀레이션 따라 해보기 - 모형에서 단위모양을 찾는다. - 변의 모양을 관찰한다.			교사의 진행에 맞추어 따라한다. (20분)	

교과	수학	중학교수준		지도교사	변윤화	
단원	테셀레이션	수준 및 수업형태		특기적성 교육	차시	3/3
학습 단계	학습 내용	교수-학습활동			지도상의 유의점 (시간)	
		교사활동		학생활동		
전개	한 변형 방법	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 어떤 모양으로 변의 모양을 변형시킬 것인가?</li> <li>- 어떠한 이동방법이 쓰이는가?</li> <li>- 어떠한 이동규칙이 있는가?</li> <li>- 평행이동, 회전이동 등을 이용하여 평면을 채울 수 있음을 확인한다.</li> </ul>		교사의 진행에 맞추어 따라한다.	모양의 변환을 다양한 관점에서 찾을 수 있게 허용적 분위기를 조성해준다.	
	나만의 테셀레이션 만들기	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ 자신만의 테셀레이션 구상하기</li> <li>- 무엇을 만들 것인가?</li> <li>- 단위모양을 어떻게 정할 것인가?</li> <li>- 단위모양을 어떻게 변형할 것인가?</li> <li>- 어떠한 이동을 할 것인가?</li> <li>▶ GSP로 자신만의 독창적인 테셀레이션을 만들어 보기</li> </ul>		자신만의 독창적인 테셀레이션을 만들어 본다.	(40분) 다각형을 이용하여 테셀레이션을 만들 때 다양한 방법이 가능하므로 학생들의 지적 자율성을 최대한 보장해준다.	
	내용 정리	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ 자신의 테셀레이션을 친구와 함께 감상하기</li> <li>▶ 자신이 만든 테셀레이션 제출하기</li> </ul>		테셀레이션 점검	(10분)	
결론	질의 응답	▶ 어려운 부분이나 질문사항 받음		어려운 사항 질문	(5분)	

### III. 결론

교육과정이 변화하면서 수학과 교육학습이 실생활에서 활용과 컴퓨터자재 사용을 권장하고 효과적인 기하학습지도가 중시되고 있다. 이러한 교육현장에서 GSP는 수학과 교수학습을 위한 좋은 프로그램이다. GSP는 처음 개발단계부터 대상을 잡아끌어(drag) 점이나 선을 조작할 수 있는 획기적인 동적 기하프로그램으로 개발되었다.

수학 소프트웨어는 그림을 그리는 것이 아니라 수학을 실현해야 하는 것이 목적이다. 도형을 흔들고, 끌고, 비틀고, 측정하고, 변환하는 것들이 모두 실제에 기반을 두어야 한다. 이러한 점에서 기하영역의 수업에 효과적이다. GSP를 활용하는 교육과정을 통해 수학적 아이디어를 시각적으로 나타낼 수 있으며, 형식적 증명을 다루기 전에 기하의 성질을 파악하고 개념을 이해 하는데 많은 도움을 줄 수 있다.

본 연구는 테셀레이션의 정의, 종류를 설명하고 평면에서 테셀레이션이 되는 성질을 파악하였다. 그리고 수학적 프로그램인 GSP를 소개하고, 테셀레이션을 통해 알 수 있는 기하의 성질들을 분석하고, GSP로 평행이동, 대칭이동, 반사, 미끄러짐 이동을 활용한 테셀레이션을 만들어 보았다. 또한 수업에 적용할 수 있는 지도안을 작성하여 소개하였다.

GSP를 활용해 테셀레이션을 구성해 가는 과정을 통해 얻을 수 있는 교육적 효과는 다음과 같다.

첫째, 기하학적 내용들을 GSP를 통해 보다 직관적으로 파악할 수 있고, 기하학습에 기초가 되는 다각형의 내각과 외각, 평행이동, 회전이동, 반사, 미끄러짐 이동을 흥미롭게 탐구 할 수 있다.

둘째, 학생들의 능동적인 조작활동을 통해 기하학적인 사실과 원리를 탐구 하며 테셀레이션의 다양한 결과물을 통해 이론적 내용을 시각화할 수 있다.

셋째, 생활 주변 속에 있는 테셀레이션을 통해 수학의 유용함을 직접 느끼고 실생활의

문제를 수학적으로 사고하고 분석하는 능력을 기를 수 있다.

넷째, 학생들의 수학적 태도 및 수학적 개념 형성에 긍정적 효과를 줄 수 있다.

하지만 이런 컴퓨터 소프트웨어를 활용하기 위해서는 교사의 태도가 중요하다. 그 목적을 명확하게 하고, 컴퓨터 소프트웨어의 기능을 익히기에 치중되지 않은 수업이 되어야 한다. 테셀레이션을 만드는 작업에서도 무늬를 꾸미는 활동에 지나치게 시간을 낭비하지 않고 배열된 양식과 단위 모양 및 단위 모양을 움직이는 방법, 그리고 규칙적으로 무늬 꾸미기 등에 중점을 둔 교수-학습이 이루어져야 한다.

교사는 공학적 도구의 교육적 한계를 분명히 인식하고, 학생들이 수학적 개념을 이해하고 흥미를 느끼기 위해 공학적 도구의 이해가 충분히 바탕 되어야 한다.

또한 본 연구는 실제 수업에 적용해보지 못했으므로 추후 학생들을 대상으로 적용한 실험결과 및 실험연구가 뒤따라야 할 것으로 보인다. 테셀레이션 뿐만 아니라 다양한 GSP를 활용한 연구가 지속된다면 수학을 이해하는데 많은 도움이 될 것이다.

## 참고문헌

- [1] 황혜정 외5인 (2009), 수학교육학신문, 문음사
- [2] 김향숙 외2인, 창의적 수학을 위한 GSP활용, 경문사
- [3] 채희진 외8인(1999), 새롭게 다가가는 평면도형·입체도형, 수학사랑
- [4] 우정호 외9인(2011), 중학교 수학 7 교사용지도서, (주) 두산
- [5] 박현미·강신포·김성준, 테셀레이션 활용 수학학습이 공간감각능력에 미치는 효과 분석, 한국초등수학교육학회지 11(2), 117-136
- [6] 이미화(2005), 테셀레이션을 통한 수학의 미학에 관한 고찰, 목포대학교 교육대학원 석사학위 논문
- [7] 조한준(2005), 테셀레이션과 GSP의 활용, 수원대학교 교육대학원 석사학위 논문
- [8] 신원국(2009), 테셀레이션이 가지고 있는 다양한 수학적 성질에 관한 연구, 서울 시립대학교 교육대학원 석사학위 논문
- [9] 이찬규(2001), 초등학교 기하학습 지도에서 테셀레이션 활용방안 연구, 인천교육대학교 교육대학원 석사학위 논문
- [10] 이호심(2010), 학습동기 유발을 위해서 GSP를 활용한 테셀레이션 학습자료 연구, 창원대학교 교육대학원 석사학위 논문
- [11] 남승인(2000), 바닥깔기를 위한 수학적 미의 탐구, 서울 : 한국교육개발원
- [12] 수학사랑, <http://www.mathlove.co.kr>
- [13] <http://library.thinkquest.org/16661/>

[14] <http://mathworld.wolfram.com/>

[15] <http://mathworld.wolfram.com/>

[16] <http://web.inter.nl.net/hcc/Hans.Kuiper/17system.htm>

[17] <http://mathforum.org/~sanders/geometry/GPLinesList.html>

Abstract

A Study on Developing Resources of Math activities for the middle school class by Using Geometer's Sketchpad in the part of "Centering around tessellation"

Byun, Yoon Hwa

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education

Sungshin Women's University

Supervised by Shim, Seong-A of advisor, Ph. D.

The report was based on research from the data from the classroom activity, using the GSP program centering on tessellation. Using a program called GSP, this research shows the value of tessellation in teaching mathematics and making the class more productive.

The research is as follows.

First, define and find the general idea of tessellation. And identify the different aspects of the different types of tessellation. The

different types of tessellation will be looked into using the various types of examples.

Second, introduce and show the usage of GSP.

Third, tessellation conversion that is, the Cabinet and the periphery of the polygon, translation, reflection, rotation, for research and utilize the GSP to understand the relationship between mathematical concepts propose specific courses.

Fourth, make learning material for the teachers to operate tessellation on their own, and present tessellation program lesson guides using the GSP.

This research gave information to manipulate the GPS accordingly, and we were unable to apply this in live classrooms, the an imitated lesson plan was included. If the research using not only tessellation but different GPS continues, it will help to understand mathematics greatly.

<부록>

시나리오 형식 수업지도안

1-1. 지도차시 : 1차시

1-2. 본시학습목표

1. 테셀레이션의 의미를 이해할 수 있다.
2. GSP 사용방법을 알 수 있다.
3. 실생활에서 테셀레이션의 예를 찾을 수 있다.

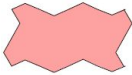
1-3. 준비물 : 교사 - 컴퓨터, 대형모니터

학생 - 필기도구, 컴퓨터, 모니터

T<sub>1</sub> 안녕하세요. 이번에 수업을 통해서 GSP라는 수학적 프로그램과 그 프로그램을 이용한 테셀레이션 이라는 것을 공부할 거예요.

테셀레이션이란 말이 생소하죠?

S<sub>1</sub> 네

T<sub>2</sub> 길에서 우리 이런  보도블록이 깔려있는 거 많이 봤죠? 직사각형도 정사각형도 아닌 이런 보도블록이 어떻게 서로 겹치지도 않고 빈틈없이 바닥을 덮을 수 있을까요?

S<sub>2</sub> 음.....길게 연결해요./ 모양사이에 끼워요.

T<sub>3</sub> 실제 보도블록이 깔려있는 그림을 볼까요?



앞으로 보도블록과 같이 틈이나 서로 겹쳐지는 거 없이 평면을 채우는 것을 배울 거예요. 그럼 오늘 배울 학습목표를 읽어 볼까요?

S<sub>3</sub> 1. 테셀레이션의 의미를 이해할 수 있다.

2. GSP 사용방법을 알 수 있다.

3. 실생활에서 테셀레이션의 예를 찾을 수 있다.

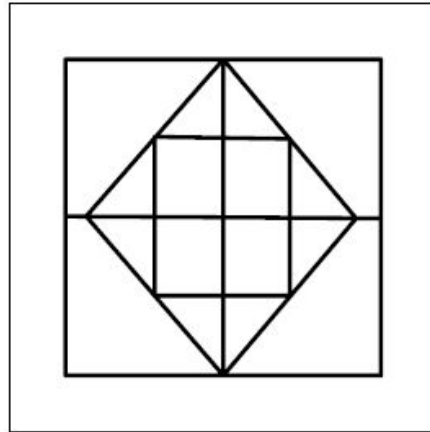
T<sub>4</sub> 테셀레이션이란 마루나 욕실 바닥에 깔려 있는 타일처럼 어떠한 틈이나 포개짐이 없이 평면이나 공간을 도형으로 완벽하게 덮는 것을 말해요. 그럼 우리 주위에서 볼 수 있는 테셀레이션이 뭐가 있을 까요?

S<sub>4</sub> 음..숫자매트요.

T<sub>5</sub> 아 맞아요. 숫자매트도 테셀레이션이 될 수 있어요. 테셀레이션이 대표적



연구자인 에서의 작품들을 볼까요. ....이 모양을 잘 살펴보면 반복되는 무늬를 찾을 수 있어요. 다음 양탄자에서 반복되는 무늬를 찾아볼까요?



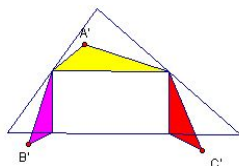
S<sub>5</sub> 사각형이요.

T<sub>6</sub> 반복되는 무늬하나를 단위모양이라고 부를게요. 테셀레이션이 가능하기 위해서 단위모양을 어떻게 배열해야 할까요?

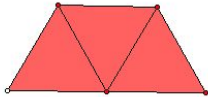
S<sub>6</sub> 단위모양 한 꼭짓점을 중심으로 360°가 되어야 해요.

T<sub>7</sub> 맞아요. 우선, 삼각형의 내각에 대해서 알아볼까요. 삼각형 내각의 합은 몇도이죠?

S<sub>7</sub> 180°요.

T<sub>8</sub>  (GSP를 통해서 확인 시켜준다.)

맞아요. 삼각형의 한 꼭짓점에 세 내각이 만나도록 합동인 세 개의 삼각형을 모으면 평각을 이루게 되어 직선이 이루어 저요.



(GSP에 삼각형을 그리고 회전이동을 하면서 보여주며 설명한다.) 이 세 개의 삼각형을 반대편으로 모으면 한 꼭짓점에 합동인 삼각형이 6개가 모아지고 한 꼭짓점에 모인 삼각형의 내각의 크기의 합은  $360^\circ$ 가 됩니다. 삼각형의 내각의 합과 외각의 합을 바탕으로, 정다각형의 내각의 합과 외각의 합을, 그리고 정다각형의 한 내각의 크기를 구해 볼까요?

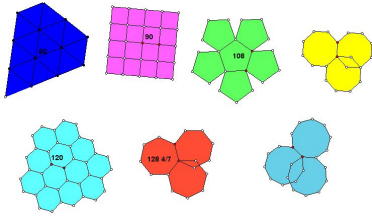
S<sub>8</sub> 네...

(시간을 준다. 칠판에 표를 그린다.)

T<sub>9</sub> 다 구했나요? 그럼 표를 완성해 볼까요?

도형 \ 구분	내각의 합	외각의 합	한 내각의 크기
정삼각형	$180^\circ$	$360^\circ$	$60^\circ$
정사각형	$360^\circ$	$360^\circ$	$90^\circ$
정오각형	$540^\circ$	$360^\circ$	$108^\circ$
정육각형	$720^\circ$	$360^\circ$	$120^\circ$
정칠각형	$900^\circ$	$360^\circ$	약 $128.6^\circ$
정팔각형	$1080^\circ$	$360^\circ$	$135^\circ$

S<sub>9</sub> 네.. (표를 완성한다. 중학교 1학년 다각형의 내각과 외각 참조)



T<sub>10</sub> 이 그림에서 테셀레이션이 가능한 정다각형

은 무슨 색 일까요?

S<sub>10</sub> 파란색, 핑크색, 밝은 하늘색이요.

T<sub>11</sub> 그럼 연두색은 왜 테셀레이션이 안될까요?

S<sub>11</sub> 음..연두색은 빈틈이 있어서 안되요.

T<sub>12</sub> 노란색과 하늘색은요?

S<sub>12</sub> 서로 겹쳐져서 안돼요.

T<sub>13</sub> 맞아요. 테셀레이션은 겹쳐지지도 않고 빈틈이 생기지 않게 평면을 덮는 거니까 정오각형으론 테셀레이션을 만들 수 없어요.

그럼 정다각형만 테셀레이션이 가능할까요?

함께 생각해 봐요. 삼각형이나 사각형들은 테셀레이션이 가능할까요? 가능하다면 왜 그럴까요? (종이의 끝을 삼각형으로 잘라서 회전시켜 보도록 한다.)

S<sub>13</sub> (다양한 방법으로 오린 삼각형을 이동하며 테셀레이션을 만든다.)

T<sub>14</sub> (만든 삼각형을 탐구해본다.) 삼각형을 테셀레이션이 가능한가요?

S<sub>14</sub> 가능해요.

T<sub>15</sub> 왜 그럴까요?

S<sub>15</sub> 한점에 6개의 삼각형이 모여요.



T<sub>16</sub> 그럼 사각형은 어떨까요?

S<sub>16</sub> 삼각형 2개를 합치면 사각형이 되니까 모든 사각형도 가능해요.



T<sub>17</sub> 그럼 이따가 GSP를 통해서 확인보죠. GSP 프로그램을 열어주세요.

S<sub>17</sub> (교사의 안내에 따라 활동한다.)

T<sub>18</sub> GSP라는 수학프로그램은 (삼각형내각의 합 증명을 보여주는 파일 열기

-논문) 수학적 내용을 보여주기 위한 프로그램으로 점을 끌거나 이동했을 때 가지고 있는 도형의 기하학적 성질 은 변하지 않게 하고 도형을 쉽게 변형시킬 수도 있습니다. 우선 점()도구를 클릭 해볼까요? 빈 화면에 점 두 개를 찍어보세요. 화살표()도구로 점 두 개를 선택하고 측정-거리를 눌러보세요. 그리고 점을 이동하면서 거리가 어떻게 변하는지 확인해보세요.

S<sub>18</sub> 와..

T<sub>19</sub> 원()도구선택하세요. 원도구는 중심과 그 원이 그려지져요. 이번에 선()도구를 선택해 보세요. 선도구로 삼각형을 그려볼까요?

S<sub>19</sub> (교사의 안내에 따라 활동한다.) 네.

T<sub>20</sub> (잘 따라오고 있는지 확인한다.) 삼각형을 그리고 꼭짓점에 이름(A)도구를 이용해서 이름을 붙여보세요. 그리고 세 내각의 크기를 측정해 보는데요. 각을 측정하기 위해선 그 각을 이루는 세 점을 순서대로 선택해야 합니다. 각A의 크기를 알고 싶다면 어떻게 해야 할까요?

S<sub>20</sub> 음...점A,B,C 순서대로 인가?/ 점B,A,C??

T<sub>21</sub> 점A, B, C순서대로 선택해보고 측정-각의크기를 눌러보세요.

S<sub>21</sub> 각B의 크기가 나와요.

T<sub>22</sub> 그럼 각 A의 크기를 알려면 어떤 순서로 해야하나요?

S<sub>22</sub> 점 B, A, C /점 C, A, B 요.

T<sub>23</sub> 네..^^ 그럼 나머지 각의 크기도 측정해 보세요. 그리고 세 내각의 합도 확인 해볼까요? 진짜 180°가 맞는지..먼저 오른쪽 마우스에서 계산을 눌러도 되고요. 측정메뉴에서 계산을 눌러도 되요. 그리고 계산기가 나타나면 ∠ABC 를 선택해서 +를 누르고 차례대로 다음의 측정값을 누른 후 “OK”버튼을 누릅니다. 세 내각의 합은 몇도 입니까?

S<sub>23</sub> 180°요.

T<sub>24</sub> 삼각형을 선택하고 작도메뉴에서 내부를 클릭해보세요. 그럼 삼각형 ABC가 색이 칠해져요. 선분 AC를 벡터로 표시 할건데요. 벡터라는 건 방향과 크기를 지정해 주는 거예요. 벡터 지정은 내가 가고자 하는 방향으로 점A에서 점C방향으로 가길 원한다면 점 A, C의 순서로 선택 후 변환 메뉴 - 벡터지정 “A->C” 로 하면 되요. 그리곤 삼각형 내부를 선택해서 변환 메뉴 - 평행이동 - 지정된 벡터사용을 해보세요. 같은 방법으로 3개의 삼각형이 생기게 반복해보세요.

S<sub>24</sub> (교사의 안내에 따라 활동한다.)

T<sub>25</sub> 이번엔 선분 AB를 벡터로 표시하고 반복해서 그린 삼각형과 원래의 삼각형을 표시한 벡터만큼 3번 이동해 보세요.

S<sub>25</sub> (교사의 안내에 따라 활동한다.)

T<sub>26</sub> 다 했나요? 삼각형 꼭짓점 중 하나를 선택하고 움직여 보세요. 한 꼭짓점이 움직이니까 삼각형의 모양이 변하나요?

S<sub>26</sub> 네..변해요.

T<sub>27</sub> 그리고 변한 모양의 삼각형도 테셀레이션이 가능한가요?

S<sub>27</sub> 네 가능해요.

T<sub>28</sub> 그럼 모든 삼각형은 테셀레이션이 가능하다라고 말할 수 있나요?

S<sub>28</sub> 네..

T<sub>29</sub> 그럼 위와 같은 방법으로 각자 사각형을 작도해보고 모든 사각형이 테셀레이션이 가능한지 한 꼭짓점을 움직여서 확인해보세요.

S<sub>29</sub> 네~~

T<sub>30</sub> 오늘 수업은 여기까지입니다. 질문 있나요?

S<sub>30</sub> 와..

T<sub>31</sub> 오늘 테셀레이션이 무엇인지 배웠는데요. 집에 가서 인터넷으로 테셀레이션에 대해서 검색해 보면 사진들이나 작품들이 많이 있어요. 한번 확인해 보시구요. 그리고 평행이동, 회전이동, 선대칭 이동의 예를 하나씩

조사해 오세요^^ GSP를 처음 접해본 학생들은 틴틈이 GSP 이것 저것  
구경해 보면서 눌러보세요. 재미있을 꺼예요^^ 다음시간에 봐요^^

2-1. 지도차시 : 2차시

2-2. 본시학습목표

1. GSP로 평행이동, 회전이동, 반사, 미끄러짐 반사를 할 수 있다.
2. GSP로 변형된 테셀레이션을 만들 수 있다.

T<sub>1</sub> 안녕하세요.^ 지난 시간에 이어서 오늘은 GSP로 테셀레이션이 가지고  
있는 성질에 관해서 배울 꺼예요. 지난 시간에 집에서 테셀레이션에 관  
해서 검색해 봤나요?

S<sub>1</sub> 네./ 아니요./

T<sub>2</sub> 좋아요. 오늘 수업을 통해서 테셀레이션이 가지고 있는 수학적 성질을 확  
인해 가면서 더 배워 보도록 하죠.

S<sub>2</sub> 네.

T<sub>3</sub> 다 같이 학습목표를 읽어볼까요?

S<sub>3</sub> (학습목표를 읽고, 배울 내용이 무엇인지 확인) 1. GSP로 평행이동, 회전  
이동, 반사, 미끄러짐 반사를 할 수 있다.

2. GSP로 변형된 테셀레이션을 만들 수 있다.

T<sub>4</sub> 오늘은 GSP로 도형의 변환에 대해서 공부해 볼거예요. 지난 시간에 제  
가 여러분께 조사해 오란게 있었는데 기억하나요? 실생활에서 평행이동,  
회전이동, 선대칭 이동의 예를 조사해 보라고 했었죠? 평행이동의 예는  
무엇이 있을 까요?

S<sub>4</sub> 음..창문이 열고 닫을 때 문틀이요./

T<sub>5</sub> 맞아요. 음..그리고 우리가 버스나 택시를 타고 가는 사람은 어떤 의미에  
서 평행이동한다고 볼 수 있죠. 그럼 회전이동의 예는 뭐가 있을까요?




S<sub>5</sub> 시계요.

T<sub>6</sub> 시계의 초침도 회전 이동을 하죠. 중심이 있고 일정한 회전각을 유지하면서 이동하고 있죠. 그리고 놀이공원에 회전목마를 탄 사람도 회전이동을 하고 있다고 볼 수 있겠네요. 마지막으로 선대칭 이동은 뭐가 있죠?

S<sub>6</sub> 나비요./음..거울에 비친 저요.

T<sub>7</sub> 잘 찾았네요. 여러분 미술시간에 한번 쯤 했을 법 한건데 데칼코마니라고 아세요? 종이 한쪽에 물감을 짜서 반 접어 만든 작품이죠. 반을 접은 선이 대칭축이 되어선 선대칭 이동을 하고 있죠. 그럼 GSP를 통해서 어떻게 변하는지 한 번 확인 해보죠. GSP를 열어주세요.

S<sub>7</sub> (교사의 안내에 따라 활동한다.)

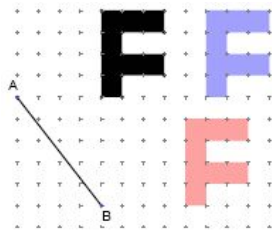
T<sub>8</sub> 를 누르고 점()도구를 이용해서 자를 만들어 보세요.

“F”자를 이쁘게 만들고 싶으면 그래프 메뉴에서 격자점 보이기를 선택하세요. 그리고 작도메뉴-내부 선택해 다각형의 내부를 칠해주세요. (ctrl+P) 단축키를 사용해도 됩니다. 다 따라오셨나요?

S<sub>8</sub> 네.

T<sub>9</sub> F자를 선택해서 변환-평행이동을 선택하고, 벡터 종류를 가로/세로로 하고 가로 성분에 5cm, 세로 성분에 0cm를 입력하세요. 변환된 모양에 다른 색깔을 넣어주세요 (오른쪽 마우스 - 색) 그리고 선분 AB를 그리고 차례로 점을 선택 한 후 변환-벡터지정을 하고, 맨 처음의 F자를 선택해서 변환-평행이동-지정된 벡터로 이동해 주세요. 변환된 모양에 다른 색

을 지정해 주세요.



다 따라 왔나요? (학생들이 잘 따

라고고 있는지 확인한다.)

S<sub>9</sub> 네./잠시만요.

T<sub>10</sub> 맨 처음의 “F”의 꼭짓점을 움직여 볼까요? 평행이동 된 모양들은 어떻게 되나요?

S<sub>10</sub> 똑같이 움직여요.

T<sub>11</sub> 평행이동 시키기 전의 모양과 평행이동 시킨 후의 모양이 어떻게 되나요?

S<sub>11</sub> 똑같아요.

T<sub>12</sub> 다시 처음 만든 “F”자를 선택해서 변환-평행이동 가로/세로로 벡터 입력을 선택하고 처음과 다른 수를 입력하고 평행이동 된 모양을 관찰해 보세요. 가로 성분과 세로 성분은 각각 무엇을 의미 할까요?

S<sub>12</sub> 가로 성분은 가로로, 세로 성분은 세로로 입력한 길이만큼 평행이동 해요.

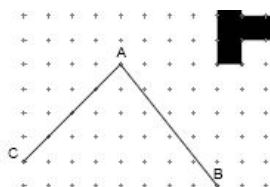
T<sub>13</sub> 선분AB에서 점 B를 선택해서 길이를 움직여 볼까요? 어떻게 되나요?

S<sub>13</sub> 따라서 움직여요.

T<sub>14</sub> 점B를 움직이면 철자 “F”도 움직여요. 즉 점A와 점B의 거리와 방향 만큼 철자 “F”가 움직이게 되요. 평행이동을 하기 위해서는 거리와 방향을 가지고 있어야 해요.

그럼 다시 점A를 선택해서 변환-중심지정을 실행해 보세요. 그리고 맨 처음 “F”자를 선택해서 변환-회전이동-45°를 입력하고 실행을 눌러보세요.

새로 만들어진 모양에 다른 색을 칠합니다.



선분AC를 그리고 점C, A, B순으로 선택해서 변환-

각 지정을 합니다. 맨 처음 “F”를 선택해서 변환-회전이동-각 지정이동을 실행합니다. 그리고 새로 만들어진 모양에 다른 색을 칠해보세요.

맨 처음 “F”의 점을 움직이면 회전이동 된 모양은 어떻게 되나요?

S<sub>15</sub> 똑같이 움직여요.

T<sub>16</sub> 이번엔 회전 이동 된 모양을 선택하고 점B를 중심지정을 해준 후 회전이동을 하고 어떻게 되는지 볼까요?

S<sub>16</sub> 중심으로 지정된 점을 중심으로 지정된 각 만큼 회전 이동해요.



T<sub>17</sub>

다음에서 평행이동 된 도형과 회

전이동된 도형을 분류해 봅시다. 평행이동 된 도형은 무엇입니까?

S<sub>17</sub> 나하고 마요.

T<sub>18</sub> 회전이동 된 도형은요?

S<sub>18</sub> 가, 다, 라요

T<sub>19</sub> 잘했어요. 회전이동을 하기 위해서는 중심과 중심각이 필요해요. 이번엔 선대칭에 대해서 알아보죠. 선분AB를 선택해서 변환-대칭축지정을 해요.

맨 처음 “F”를 선택해서 변환-선대칭이동을 실행합니다. 새롭게 만들어진 도형에 다른 색을 입혀주세요. 다 따라 왔나요?

S<sub>19</sub> 네

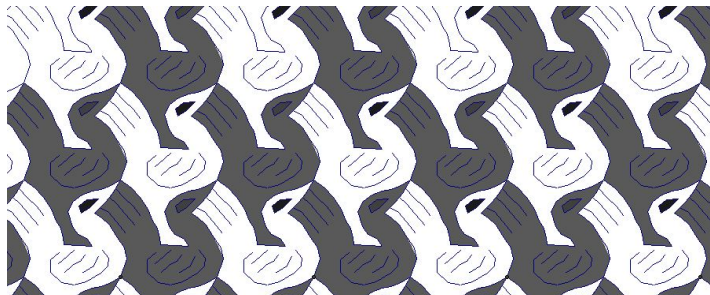
T<sub>20</sub> 맨 처음 “F”의 꼭짓점을 움직이면, 선대칭 이동한 도형은 어떻게 되나요?

S<sub>20</sub> 똑같이 움직여요.

T<sub>21</sub> 선분AB를 움직이면 선대칭 된 도형은 어떻게 되나요?

S<sub>21</sub> 선분AB의 길이를 다르게 하면 도형은 안 변해요. / 좌우로 움직이면 도형은 변해요.

T<sub>22</sub> 맞아요. 선대칭 이동은 지정된 대칭축을 중심으로 거울의 상과 같은 모양을 만들어 줘요. 이제는 GSP로 만든 테셀레이션을 보고 어떤 성질을 이용했는지 살펴 볼까요? 우선 첫 번째 그림을 보고 어떤 성질들이 쓰였



는지 말해볼까?

S<sub>22</sub> 평행이동이요.

T<sub>23</sub> 왜 그렇게 생각해요?

S<sub>23</sub> 음..모양이 그대로 옆으로 움직였어요.

T<sub>24</sub> 철자 “F”를 평행이동 했을 때처럼 새 한 마리를 놓고 보면 모양과 크기가 일정한 거리만큼 움직였어요. 그럼 이 테셀레이션의 단위 모양은 무엇이였을까? 어떤 모양에서 시작 했을지 생각해봐.

S<sub>24</sub> 사각형이요.

T<sub>25</sub> 왜? 사각형에서 출발했다고 생각해?

S<sub>25</sub> 어..부리 끝하고 부리 끝하고 연결하고 엉덩이인가? 암튼 그거 끼리 연결하고 위에 새하고 아래 새 부리 연결하면 사각형이예요.



T<sub>26</sub> 다음 그림을 볼까?


이건 테셀레이션을 예술적 아름

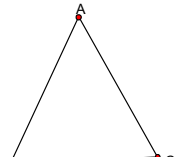
다음을 부각 시킨 네덜란드 화가 에셔의 작품이야. 이것은 어떤 변환을 사용 했고 단위 모양은 무엇일지 생각해 보자. (잠시 후..) 어떤 변환일까요?

S26 회전이동이야.

T27 (새 한 마리를 가리키면서 변환을 나타내 준다.) 그림 단위 모양은 무엇일까?

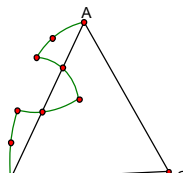
S27 삼각형이야. 꼬리하고 날개 연결하면 삼각형 나와요.

T28 그림 우리 같이 해볼까요? 사용자()도구-정다각형-3/정삼각형(변)을

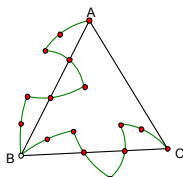


실행한다. 각 변에 이름도구를 이용해서 이름을 붙여준다.

점A와 점B를 곡선으로 연결 시켜준다. 점도구를 이용해 여러개 찍고 3개씩 동시에 선택 후 작도-세 점을 지나는 호를 실행해서 처음 선택 한 점으로부터 양의 방향으로 세 점을 지나는 호를 그린다.

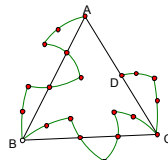


곡선AB를 점B를 중심(점B를 두 번 클릭 또는 변환-중심지정)으로  $-60^\circ$ 만큼 회전이동시킨다(변환-회전이동-회전각 $-60^\circ$ ).

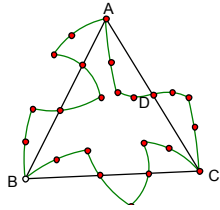


나머지 한변(선분AC)선택 하고 중점D를 찍어 준 후 (작

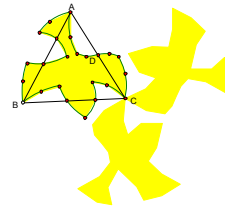
도 -중점 또는 ctrl+M) 곡선CD를 그린다.



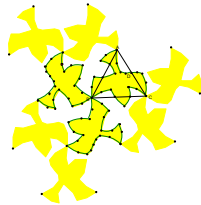
곡선CD를 점D를 중심으로  $180^\circ$  회전시킨다.(변환-회전이동-회전각



$180^\circ$ ) 모든 점을 선택 (점도구 클릭 후 ctrl+A) 작도-다각형 내부를 칠한다. 다각형을 선택하고 점C를 중심으로  $120^\circ$  만큼



두 번 회전시킨다.(변환-회전이동-회전각 $120^\circ$ ) 세 마리의 새를 한 도형으로 선택하고 점B를 중심으로  $120^\circ$ 만큼 두 번 회전

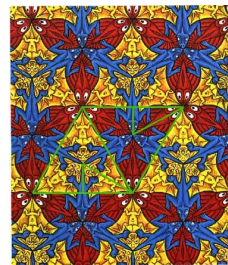


이동한다.

중심 점의 위치를 바꿔가면서 회전 이동시켜 테셀레이션을 완성한다. 필요 없는 점과 선은 보기-개체숨기기로 숨겨준다.

S<sub>29</sub> (교사의 안내에 따라 활동한다.)

T<sub>30</sub> 새의 모양을 주고 싶으면 회전이동하기 전에 점도구와 선도구를 이용해서 세부그림을 그려줘도 되요. 지금은 GSP로 변환이 어떻게 이루어지고 있는지 점검하시면서 보시면 되요.




그러면 다음 테셀레이션 그림을 한 번 볼까요?

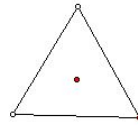
단위모양은 삼각형으로 표시 되어있네요. 선대칭 이동을 하고 있는게 보이나요?


S<sub>30</sub> 네.

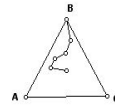
T<sub>31</sub> 삼각형 내부에서도 대칭을 이루고 있네요. 요 그림을 간단하게 대칭과 평행이동 변환을 사용해서 그려 보죠.

사용자()도구-정다각형-3/정삼각형(무게중심)을 실행한다. 각 변에

이름도구를 이용해서 이름을 붙여준다.

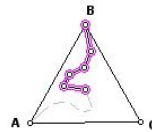


직선()을 이용하여 무게중심까지 선을 그린다.



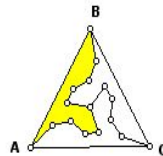
무게중심을 변환-중심(또는 더블클릭)선택, 작도한 직선과 점을 모두 선

택한 후, 변환-회전이동-회전각120°를 2번 실행한다.



선의 바깥 점들을 모두 선택한 후, 작도-다각형내부를 선택한 다음 보기

-색에서 도형의 내부의 색을 정한다.



보기-색에서 각각 다

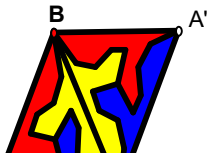
른 색상으로 바꾸어 준다. 모든 점을 선택(점A, B, C제외)한 후, 보기-점

숨기기를 행한다.

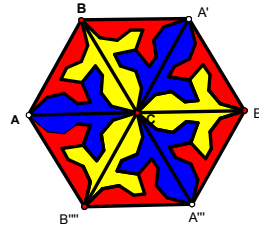


선분BC 선택 후 변환-대칭축 지정(또는 더

블클릭)하고, 변환-선대칭이동을 실행한다.

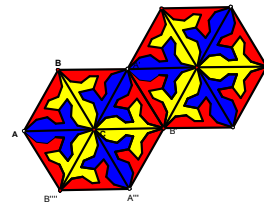


선분A'C를 대칭축 지정 변환-선대칭이동 실행 대칭

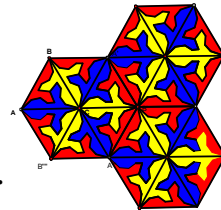


축을 바꿔가면서 육각형을 만들어 준다.

점A와 A'을



차례로 선택 벡터지정 변환-평행이동을 실행한다.



점A와 점A'' 벡터지정 변환-평행이동 실행한다.

여기서 문제입니다. 정육각형을 평행이동시켜서 테셀레이션을 만들 수 있는 방법은 몇가지 일까요?

S<sub>31</sub> 6개요. 각 변에 하나씩 붙으니깐요

T<sub>32</sub> 6개 맞아요. 벡터AA'와 벡터A'A는 크기는 같지만 방향이 다르니까 다른 벡터로 봐야 하고 벡터AA'와 벡터B''B는 방향도 같고 크기도 같으니깐 같은 벡터로 봐서 평행사변형의 긴 대각선 벡터 수만큼 평행이동시킬 수 있어요.

T<sub>33</sub> 오늘 테셀레이션의 중요한 수학적 성질을 알아 봤는데요. 평행이동, 회전이동, 선대칭이동 들은 처음의 도형을 똑같은 크기와 모양으로 변환시

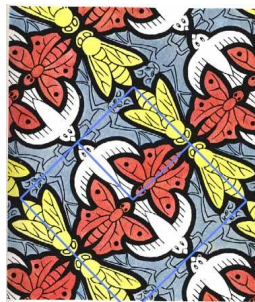
켜 줌을 알 수 있었는데요. 평행이동은 지정된 거리와 방향으로 회전이동은 지정된 점을 중심으로 일정한 각도만큼 회전시킵니다. 그리고 선대칭이동은 대칭축을 중심으로 반사된 상의 모양을 이루고 있어요. 오늘 수업 시간만으로 이해하기 힘든 부분 있을 꺼예요. 집에서 다시 한 번 천천히 연습해 보길 바라요. 다음 시간에는 오늘 까지 배운 내용을 토대로 자신만의 테셀레이션을 GSP로 만들어 볼 꺼예요. 자신이 만들고 싶은 테셀레이션을 모양을 생각해 오세요.

3-1. 지도차시 : 3차시

3-2. 본시학습목표

1. 테셀레이션의 단위모양을 찾아 GSP로 따라할 수 있다.
2. GSP로 나만의 독창적인 테셀레이션을 만들 수 있다.

T<sub>1</sub> 지난시간 까지 GSP로 모양변환과 테셀레이션의 수학적 성질에 대해서 배웠어요. 오늘은 지금까지 배운걸 토대로 나만의 테셀레이션을 만들어 보도록 해요.



T<sub>2</sub> 에서의 작품들을 한 번 볼까요.

이 작품의 단위 모양

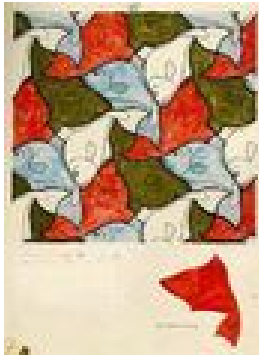
은 될까요?

S<sub>1</sub> 사각형이요./마름모요.

T<sub>3</sub> 어떤 변형을 사용했죠?

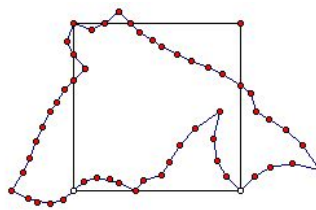
S<sub>2</sub> 선대칭이동이요./ 선대칭이동하고 사각형 4개를 하나로 평행이동 했어요.

T<sub>4</sub> 잘 찾네요. 다음 그림을 볼까요?



이 그림의 단위 모양은 될까요?

S3 어렵다../사각형/



T5 사각형이에요.

이건 GSP로 그려본 단위 모양입

니다. 이 단위 모양을 회전이동 시켰네요.



이건

도마뱀이네요. 이것의 단위 모양은 될까요?

S4 아..육각형이요.

T6 육각형 맞아요.. 어떤 변환을 했을까요?

S5 회전이동이요./평행이동이요.

T7 회전이동을 하고 평행이동으로 테셀레이션 채울 수 있겠네요.



그 밖에도 많은 작품들이 있어요. 이런 작품들도 참조하면서 여러분이

생각해본 자신만의 테셀레이션을 만들어 보세요.

먼저 무엇을 만들지 생각해 보고, 단위모양을 정하고, 어떻게 변환시키고 이동할 것인지 생각해 보세요. 만들면서 궁금한 사항은 손들면 제가 찾아가겠습니다.

(각자 만들어 보고 친구들과 함께 감상한다.)

각자 만든 테셀레이션은 단위 모양과 변환 등 간단한 소개와 함께 메일로 보내주세요.