



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

강 병 개 교수지도  
석사학위 청구논문

중학교 2학년 기하단원에서의  
구체적 조작활동

2010년

성신여자대학교 교육대학원  
교육학과 수학교육전공  
주 은 지

중학교 2학년 기하단원에서의  
구체적 조작활동

강병개 교수지도

이 논문을 석사학위 논문으로 제출함

2010년 5월

성신여자대학교 교육대학원

교육학과 수학교육전공

주 은 지

# 인 준 서

주은지의 석사학위 논문을 인준함

심사위원 \_\_\_\_\_ (인)

심사위원 \_\_\_\_\_ (인)

심사위원 \_\_\_\_\_ (인)

성신여자대학교 교육대학원

## 논문개요

본 논문에서는 학생들이 어려워하는 단원인 기하영역의 도형 단원을 보다 쉽고 효과적으로 지도하기 위한 방법에 대해서 연구했다. 실제로 우리나라 수학 수업은 학습자의 수준이나 상황을 고려하지 않은 교사 주도의 설명식 수업으로, 학생들의 사고나 흥미를 고취시킬 수 있는 다양한 교수·학습 자료의 활용이 미흡한 것이 현실이다. 이에 본 연구는 여러 가지 구체적 조작물과 그 활용법을 소개하고, 활동의 예를 보임으로써 수학 수업에 사용될 수 있는 다양한 자료와 아이디어를 제공하고자 하였다.

구체적 조작물은 비교적 간단한 재료를 이용하여 활동학습을 함으로써 수학교육의 현장에 적용할 수 있다는 장점이 있다. 우선 간단한 종이접기 활동이나 컴퓨터 소프트웨어를 수업에 도입함으로써 학생들의 흥미를 유발시킨 후, 구체적 조작물을 활용하여 평면도형의 개념과 성질을 확립하게 한다. 구체적 조작물은 추상적인 도형의 성질을 구체적으로 형상화 하여 학생들의 이해를 도와주고 사고력을 기르는데 좋은 도구이기 때문이다.

또한, 구체적 조작물을 이용한 활동은 7차 개정 교육 과정에서 추구하는 ‘수학적 의사소통’이 가능하다. 구체적 조작활동과 학습자 사이에 많은 의미 있는 상호작용이 일어나므로 학습자가 능동적으로 학습에 참여할 수 있는 기회를 부여할 뿐만 아니라, 탐구활동의 제공으로 학습자의 사고 활동을 촉진시키고 수학 학습에서 습득한 내용의 지속력을 향상시킨다. 컴퓨터를 활용하여 기하수업을 구성적으로 만드는 역동적 기하학습 도구인 GSP를 도구로 사용하여 중학수준의 도형의 성질을 탐구하고, 각자 탐구한 내용을 의견을 교환하여 비교해 보고 자기가 미처 발견하지 못한 내용을 다른 사람과의 의사소통을 통해 알게 함으로써 즉각적인 피드백으로 수학적 사고 능력을 강화시켜줄 수 있다.

# 차 례

## 논 문 개 요

I. 서 론 .....	1
II. 이론적 배경 .....	3
1. 제7차 개정 교육과정에서 기하영역의 성격과 교육 내용 .....	3
가. 중학교 수학의 교수·학습의 성격 .....	3
나. 기하영역의 교육 내용과 지도의 의의 .....	4
1) 내용 개요 .....	4
2) 지도의 의의 .....	5
다. 기하 교육에서의 구체적 조작과 컴퓨터 소프트웨어의 활용 .....	5
2. 조작활동과 관련된 교수·학습이론 .....	7
가. 활동주의적 수학교육 .....	7
나. 딘즈(Dienes)의 수학학습이론 .....	8
다. 피아제(Piaget)의 인지발달단계이론 .....	10
라. 브루너(Bruner)의 수학학습심리학 .....	11
3. 구체적 조작활동으로서의 수학적 도구의 활용 .....	13
가. 종이접기 .....	13
나. GSP의 활용 .....	14
4. 학습현장에서의 조작적 활동학습의 실현 가능성 .....	16
III. 구체적 조작의 실제 .....	19
1. 삼각형의 성질 .....	19

가. 선분의 수직이등분선의 성질 .....	19
나. 삼각형이 내각의 크기의 합 .....	20
다. 이등변삼각형의 성질 .....	21
라. 삼각형의 내심 .....	22
마. 삼각형의 외심 .....	24
바. 삼각형의 무게중심 .....	26
2. 사각형의 성질 .....	29
가. 사다리꼴 .....	29
나. 평행사변형 .....	30
다. 직사각형 .....	32
라. 마름모 .....	33
IV. 결론 .....	34

참고문헌

ABSTRACT

부록 : 학습지도안

감사의 글

# I. 서론

수학은 간결하고 함축적이며 모호함이 없는 언어이다. 그러나, 수학을 학습하는 방법이 형식적이고 추상적인 기호의 사용에만 집중되고 교사의 일방적인 설명만을 학생들이 이해하도록 한다면, 현재와 미래의 학생들은 수학이 실용적이지 못하고 기호들로만 이루어진 추상적인 학문이라는 생각을 하게 된다. 이러한 점을 인식함에 따라 수학교육은 수학적 힘의 신장이라는 목표를 갖고 수학의 유용성과 수학 자체의 가치를 확인하고, 다양한 교수 방법과 평가를 통해서 학습 지도가 이루어지는 방향으로 변화되고 있다. 이로 인해 2007년 개정 교육과정에서는 특히 ‘수학적 의사소통(mathematical communication)’을 강조하고 있다.

이종희·김선희 [1]에 따르면 수학적 의사소통의 개념이란 수학 수업에서 학생들 자신이 알고 있는 개념을 말과 글, 신체 활동 즉 구체적 조작활동을 보여주거나 직접 경험하면서 설명하고, 다양한 표현을 이해하고 해석하는 경험을 하는 능력을 신장시켜야 한다는 것을 의미한다.

수학적 의사소통을 원활하게하기 위해서는 일상 언어, 수학용어와 기호, 시각적 표현의 수단과 말하기·듣기·쓰기·읽기의 신체적 활동, 비수학적인 용어 등의 의사소통 방식이 필요하다. 따라서 수학적 의사소통은 학생 자기 자신, 학생들 간에 수학에 대한 정보, 아이디어, 느낌, 수학 기호 등을 교환하거나 의미를 도출하기 위해 읽고, 쓰고, 아이디어를 말하고 듣고 활동하는 것으로 정의할 수 있다.

중학교 수학에서 도형 영역은 1학년 과정에서는 주로 직관적 내용을 다루는데 반하여 2학년 과정에서는 명제와 증명을 학습하게 됨으로써 학습의 난이도가 갑자기 높아지게 된다. 따라서, 학생들은 학습의 흥미를 잃기 쉽고, 어려운 내용을 잘 따라가지 못하는 문제점이 발생할 수 있다.

간단한 종이접기나 컴퓨터 소프트웨어의 활용 등 조작적 활동은 이러한 문제점을 해결하기 위한 하나의 대안이 될 수 있다. 구체적 조작물과 컴퓨터를 활용한 수업방식은 수학적 의사소통의 기회를 충분히 제공할 뿐만 아니라 학생 스스로가 학습에 흥미를 가지고 수학적 지식을 습득할 수 있도록 이끌어 줄 수 있다.

학생들은 종이접기 등 구체적 조작활동을 통하여 도형의 성질을 증명에 앞서 미리 확인할 수 있고, 확인된 내용이 어떻게 참이 되는지 증명을 통하여 입증할 수 있다. 이러한 방법이 어렵고 딱딱한 증명 위주의 학습보다는 학생들의 흥미를 유지시키고 성취감을 높이는 교육적 효과를 기대할 수 있음은 분명해 보인다. 종이접기 등 조작물을 이용한 수업과 더불어 컴퓨터 소프트웨어를 수업에 활용할 수 있다. 수학교육에 활용할 수 있는 소프트웨어는 종류도 다양하고, 다룰 수 있는 사람의 수준에 따라 기능도 엄청난 차이가 있다. 보통 중학교 과정의 기하 및 함수를 다루는 데 있어서 가장 손쉽게 활용할 수 있는 것으로는 GSP(The Geometer's SketchPad)가 있다.

본 논문에서는 제7차 개정 교육과정에서 기하영역의 성격과 교육 내용을 바탕으로 하여 조작활동과 관련된 교수·학습이론을 분석하고, 중학교 수학 2 과정의 도형 단원을 중심으로 신체적 활동(종이접기)과 시각적인 표현(GSP 소프트웨어)을 혼합하여 구체적 조작활동과 수학적 의사소통이 강조된 학습 자료를 개발해서 수업에서의 활용방안을 제시하고자 한다.

## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. 제 7 차 개정 교육과정에서의 기하영역의 성격과 교육 내용

#### 가. 중학교 수학의 교수·학습의 성격

제 7 차 개정 교육과정에서는 수학 교과와 성격에서 수학의 교수·학습에 대하여 다음과 같이 제시하고 있다.

수학의 교수·학습에서는 학생이 구체적인 경험에 근거하여 여러 가지 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 추상화 단계로 점진적으로 나아가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해할 수 있도록 한다. 또한 수학적 문제를 해결하는 과정에서 문제를 명확히 이해하고 합리적인 해결 계획을 세워 실행하며, 반성을 통하여 풀이 과정을 점검하고 다양하게 활용하는 태도를 기르도록 한다. 수학적 지식과 기능을 활용하여 실생활의 여러 가지 문제를 해결해 봄으로써 수학의 필요성과 유용성을 인식하고, 수학 학습의 즐거움을 경험함으로써 수학에 대한 긍정적인 태도를 갖도록 한다 [2].

위와 같이, 제 7차 개정 교육과정에서는 수학 전반에 걸쳐서 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰을 강조하고 있다. 수학의 모든 영역에서 구체적조작활동을 통한 학습이 이루어지는 것이 바람직하며, 이를 통하여 학생들의 흥미를 유발하고, 수학적 사고력을 신장시킬 수 있다. 더불어 직관과 구체적인 조작 활동을 가장 필요로 하는 영역이 바로 기하 영역이다.

## 나. 기하영역의 교육 내용과 지도의 의의

### 1) 내용 개요

초등학교에서 학습한 것을 기초로 하여 중학교에서 다루는 기하 영역의 학습 내용은 다음과 같다.

1학년에서는 기본 도형인 점, 선, 면, 각에 관한 기초지식을 직관적으로 다루고, 삼각형의 결정조건, 삼각형의 합동조건을 학습한다. 간단한 평면도형과 입체도형의 성질을 탐구하게 되는데 평면도형에서는 다각형의 내각과 외각의 크기, 원과 부채꼴의 넓이와 호의 길이를 구하는 방법을 학습한다. 입체도형에서는 다면체와 회전체의 개념을 소개하고 기둥, 뿔, 구와 같은 입체도형의 부피와 겉넓이 구하는 방법에 대해 탐구한다.

2학년에서는 삼각형과 사각형의 기본 성질을 집중적으로 다룬다. 삼각형의 성질에서는 이등변삼각형의 성질과 직각삼각형의 합동조건, 삼각형의 외심과 내심을 학습한다. 사각형의 성질에서는 평행사변형과 여러 가지 사각형의 성질과 함께 여러 가지 사각형 사이의 관계에 대하여 알아본다. 그리고 삼각형의 닮음을 이용하여 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비, 삼각형의 중점연결정리, 무게중심 등을 다룬다. 2학년 과정에서 명제와 정리, 증명을 다루면서 간단한 도형의 성질을 증명할 수 있게 한다.

3학년에서는 피타고라스의 정리와 원과 직선(현, 접선), 원주각, 원에 내접하는 사각형의 성질, 원과 비례에 관한 성질 등을 탐구한다. 삼각비를 이용하여 삼각형의 변의 길이, 각의 크기 등을 계산하는 삼각법을 학습하고, 이를 이용하여 길이와 삼각형의 넓이를 구할 수 있고, 실생활에 관련된 문제를 해결할 수 있다. 특히 3학년 과정은 이들 성질을 이해하고 활용하여 문제를 해결하는 것이 중요하다.

## 2) 지도의 의의

평면이나 공간에서 도형에 관한 기본적인 성질의 이해는 자연, 예술, 건축, 그래픽, 공간 탐험, 지도 읽기 등 실생활 상황의 문제를 해결하는데 기초가 되며, 도형의 성질에 대한 증명은 고대 그리스 이래로 연역적 추론의 전형으로 인식되어 왔다. 또한, 여러 가지 도형의 개념과 성질은 수학의 다른 여러 분야의 개념과 밀접하게 관련되어 있다.

기하에서 다루는 문제는 해결 방법이 다양하기 때문에 문제해결 능력과 수학적 창의성을 신장시킬 수 있는 좋은 소재이다. 특히 도형에 관한 명제는 그에 대한 일반화나 유추, 조건의 변형 등을 통해 새로운 문제를 만들어 보는 경험을 제공할 수 있어 학생의 문제 만들기 능력을 신장시킬 수 있는 좋은 소재이기도 하다.

중학교 기하 영역에서는 자연 현상이나 실생활의 상황을 통해 평면과 공간 및 평면도형과 입체도형의 개념을 직관적으로 이해하고, 여러 가지 도형의 성질을 학생의 수준에 따라 직관적으로 혹은 연역적 추론을 통해 이해하고 탐구하며 이를 활용하여 다양한 문제를 해결하는 학습 활동을 한다 [2].

다. 기하 교육에서의 구체적 조작과 컴퓨터 소프트웨어의 활용

컴퓨터의 출현은 지필활동 위주의 정적인 수학 교육을 시각화가 가능하게 만들어 주었다. 컴퓨터는 설명을 위한 보조적인 도구일 뿐 아니라 수학적 개념을 이해하고 문제를 표현하기 위해 적절한 도형을 그릴 수 있어서 학생들의 수학적 능력을 신장시킬 수 있다. 수학적 시각화는 발견과 이해를 위해, 수학적 이미지를 형성하고 효과적으로 그 이미지를 사용하는 과정이다. 이해에 깊이와 의미를 주고 문제해결에 믿음직한 안내자

를 제공하며 창조적 발견을 고취시키는, 마음의 눈에서 형성된 그림을 통한 직관이다. 따라서, 시각화는 이미 마음 속에 있는 생각들을 응시함으로써 지식을 창출하거나 획득하는 과정이다. 컴퓨터 그래픽을 사용하면 수학적 지식의 의미를 눈으로 확인 가능하며, 수학적 개념을 보다 근본적으로 이해시킬 수 있으며, 발전된 학습이 가능하다. 교과서에 나오는 정적인 시각화 이외에 역동적인 시각화를 사용하면 학생들에게 보다 발전된 학습을 시킬 수 있고, 지식의 생성배경을 이해시킬 수 있음으로써 훨씬 설득력 있는 수업이 가능하다.

컴퓨터의 활용이 기하교육에 미치는 영향은 다음과 같다.

첫째, 기하개념을 지도하는 데 좀더 직관적인 방법을 택할 수 있다. 컴퓨터의 그래픽 기능은 도형과 도형의 변환과 관련된 학습내용을 전체적인 시각을 통해 파악하도록 하는 데 도움이 되고, 도형을 마음대로 조작할 수 있는 그래픽 기능은 학생들의 시각적 직관력을 키우는 데 도움이 된다.

둘째, 추정하거나 탐구하는 활동에 초점을 맞출 수 있다. 컴퓨터의 그래픽 기능과 계산처리 능력은 도형의 관계를 탐구하고 추정하는 실험의 기회를 제공한다.

셋째, 논리적 사고력을 향상시킬 수 있다. Proofchecker(기하학적 증명에 대한 인공지능 프로그램)을 이용하여 주어진 기하 증명문제에 대해 증명할 수 있고, 자신의 증명과정을 스스로 수정할 수 있다. 또한, 컴퓨터 언어를 이용한 프로그래밍 자체가 논리적 추론과정이므로 프로그래밍 활동은 논리적 추론능력을 향상시킨다.

넷째, LOGO 프로그래밍 언어를 통해 종래와는 다른 기하교육 환경을 제공할 수 있다. 초등학교 저학년부터 도형을 그리는 훈련을 함으로써, 기하학의 중요원리를 조기에 도입할 수 있다.

다섯째, 변환기하를 쉽게 도입할 수 있다. 움직임을 구현하는 그래픽

소프트웨어를 사용하면 변환기하의 중심 아이디어(회전, 대칭이동, 평행이동, 닮음변환)를 시각적으로 분명히 이해시킬 수 있다.

여섯째, 컴퓨터의 계산능력 때문에 전에는 가능하지 않았던 복잡한 계산이 요구되는 문제를 해결할 수 있다.

일곱째, 적절한 소프트웨어를 이용하면 기하나 여러 다른 과목(대수, 물리, 화학, 확률 등)의 아이디어를 통합시킬 수 있다 [3].

## 2. 조작활동과 관련된 교수·학습이론

### 가. 활동주의적 수학교육

활동주의 수학교육을 주장하는 학자는 프로이덴탈(Freudenthal), 폴리아(Polya)가 대표적이다. 학습은 모방에서 시작된다고 할 수 있다. 하지만 학습의 전 과정이 모방으로만 이루어지거나 교사의 설명만으로 이루어진다면 학습의 결과는 교사의 수준을 넘어서기 어려우며 교육은 현상 유지에만 급급할 것이다. 학생이 교사의 수준을 능가하기 위해서는 교사를 모방하는 수준을 넘어 학생 스스로 수학적 내용을 이해하고 창조하는 학습 활동을 하여야 한다. 학생이 문자나 기호의 조작에 의해 수학적 개념을 학습하기 어려운 경우 구체물이나 반구체물을 활용한 조작 또는 관찰 활동을 함으로써 수학적 개념을 쉽게 이해할 수 있다. 이와 같이 구체물이나 반구체물을 조작 또는 관찰함으로써 어떤 개념을 학습하게 하는 것을 활동주의 교육이라고 한다 [4].

활동주의는 전통적인 학교에서의 주입식 교육에 따른 정숙, 침묵 등에 대한 반론으로 제기된 것이므로 신체적 활동이 중시됨은 당연하나, 행위로서의 활동성은 목적이 아니라 수단임을 유의해야 한다.

활동주의에 의한 학습지도는 새로운 개념을 지도하기 위해 구체적인 경

힘이나 조작활동을 통해 학습하게 하는 지도 방법이다. 활동주의 학습지도 이론은 구체적인 조작으로 학습이 가능한 아동들에게 추상화된 개념의 이해를 돕기 위해 구체적인 조작이나 관찰이 필요할 때 효과적인 학습지도 방법이 될 수 있다.

프로이텐탈은 ‘수학은 현실을 매체로 하는 인간의 정신적 활동이며, 지속적인 수준의 비약에 의한 현상과 본질의 교대 작용이 이루어지면서 조직화 되는 과정’이라 보고, 올바른 수학 교수법은 수학의 지식을 전달하는 것이 아니라 수학자가 자신의 수학을 창조하듯이 학생들이 스스로의 활동을 통해 수학화 과정을 직접 경험해 봄으로써, 수학의 본질적 측면을 체험시키는 것이어야 함을 주장하는 것이다. 이것은 수학자가 하는 활동을 어린 학습자라도 자신의 수준에 맞는 대상들을 통해 직접 경험할 수 있다는 것을 의미한다.

따라서, 수학 학습의 출발점은 가능한 한 구체적인 학생의 현실이어야 한다. 또한 수학 학습의 과정은, 학생의 현실 안에 내포되어 있는 수학적 현상들과 수학적 요소들을 알아내어 불필요한 정보를 제거함으로써, 수학적 수단으로 조직하고 이와 관련된 수학적 구조를 창조하는 일련의 과정으로 이루어져야 하며, 특히 학생들 수준에 적합한 현실과의 고리가 항상 연결되어야 한다 [5].

#### 나. 딘즈(Dienes)의 수학학습이론

딘즈는 수학 학습을 ‘놀이’를 통한 구성적 활동이라 보고, 학습자의 수학 학습 경험의 계열화 과정에서 구체적인 수학 자료의 사용을 중요시하였다.

딘즈가 놀이를 통하여 제시하고 있는 수학 개념의 학습 과정은 6단계로 이루어진다. 도형 개념의 학습을 예로 들어 6단계를 더욱 상세히 살펴

보면 다음과 같다.

제 1 단계인 자유놀이의 단계는 아동들이 구조화되어 있지 않은 조작이나 실험 활동 등 많은 구체적인 자료를 자유롭게 대하는 시기이다. 도형 개념의 예를 든다면 개수나 모양, 크기 등이 여러 가지로 주어진 구체물로 놀이하는 경험을 하는 것이 된다.

제 2 단계인 게임 단계는 아동들은 자유롭게 놀이를 하는 가운데 점차 어떤 규칙성이 있다는 느낌을 갖게 되는 시기이다. 도형 개념의 예를 든다면 어떤 도형은 각진 부분이 없다거나 모양에 차이가 있다는 것을 인식하는 단계이다.

제 3 단계인 공통성 탐구의 단계에서는 놀이의 소재가 되는 여러 구체물 속에 공통적으로 들어 있는 특정 개념의 수학적 구조를 파악하기 시작하며, 게임 단계에서 감지되는 규칙성이 보다 명확해지는 단계로 볼 수 있다. 예를 들면, 네모 모양은 꺾여지는 부분이 4군데이고, 원 모양은 그런 부분이 없다는 것을 명확히 인식하는 단계이다.

제 4 단계인 표현 단계는 아동이 추상화 과정을 통하여 파악한 개념의 공통성을 적절한 방법으로 표현하는 시기이다. 이 때 사용하는 표현 방법은 간단한 그림의 형태나 언어적인 방법, 전형적이거나 포괄적인 예 등 다양한 방법이 가능하다. 네모 모양이나 세모 모양, 둥근 모양 등에 대하여 다양한 방법으로 표현하게 된다.

제 5 단계인 기호화의 단계에서 아동들은 자신만의 적절한 수단으로 표현한 개념을 수학적인 기호를 이용하여 표현하게 된다. 아동이 자기 나름의 기호 체계를 발명하는 것도 좋겠지만 의사소통을 위하여 공통적으로 사용하는 수학적 기호를 이용하도록 지도해야 한다. 도형 개념에서는 네모, 세모, 동그라미 또는 삼각형, 삼각형, 원 등의 표현을 이용하도록 지도하는 단계이다.

제 6 단계인 형식화의 단계에서는 아동이 추상한 개념의 수학적인 구

조를 파악하고, 이 개념이 갖고 있는 여러 성질들을 체계화하게 된다. 삼각형과 사각형의 관계나, 삼각형의 성질, 사각형의 성질 등을 파악하게 되는 단계이다 [6].

#### 다. 피아제(Piaget)의 인지발달단계이론

피아제는 수학적 지식 및 사고의 본질을 조작(operation)이라고 보고, 그 발생과정을 분석하여 제시하였다. 피아제에 따르면 인간은 타고난 기본적인 스킴(scheme)을 바탕으로 적응기능에 의하여 환경과 상호 작용하는 가운데 보다 유연하고 포괄적인 인지 스킴을 구성함으로써 인지 구조를 변화시켜 간다. 스킴이란 행동과 조작을 반복 가능하게 하고 일반화할 수 있게 하는 인지 구조를 의미하며, 기초적인 스킴에서 보다 수준 높은 조작적 스킴으로 발달시켜 나가게 된다.

또한, 피아제는 학습을 위한 전제조건으로 적절한 인지발달이 필요하다고 하였다. 여기에서 말하는 인지발달이란 환경에 적응하는 과정에서 끊임없이 일어나는 인지적 균형의 파괴와, 동화 및 조절에 의한 새로운 균형화가 반복되는 스킴의 끊임없는 재구성 과정을 의미한다 [6].

피아제는 인지발달단계를 감각운동기, 전조작기, 구체적 조작기, 형식적 조작기의 4단계로 구성하였는데, 우리나라의 중학생은 구체적 조작기와 형식적 조작기에 속하게 된다. 각 단계별로 살펴보면 감각운동기의 아동은 본능적인 행동이 경험에 의해 수정이 되면서 복합적인 행위 패턴을 가지게 된다. 이 기간에 아동은 대상을 지각하고 식별하며 그것의 불변성을 인식하기 시작한다. 또한 대상을 다루는데 원인과 결과의 관계를 인식하게 되고 자연스럽게 대상은 자기와 관계없이 존재한다는 사실을 알게 된다. 두 번째 전조작기의 아동들은 기호를 사용하긴 하지만 자기중심적이므로 사물을 자기 관점에서 보려 한다. 사물이 움직일 때 처음과 끝만

보고 중간 과정은 모르는 경우가 많다. 세 번째 구체적 조작기는 수와 양의 보존이 이루어지는 단계이며 직관적 영상을 수반하는 사고 단계이다. 두 집합의 포함관계를 인식하고 순서관계의 추이성을 이해한다. 여기서 조작은 웹이 언어의 기능에 의해 내면화되고 동화와 조절을 통해 가역성을 획득할 때를 말한다. 마지막 단계인 형식적 조작기는 눈에 보이지 않는 추상적 대상을 사고할 수 있고 또한 조합적인 사고를 할 수 있는 단계이다. 가설을 세워서 결론을 이끌어낼 수도 있으며 연역적 추론 즉, 증명을 할 수도 있다. 또한 미래의 가능성을 예측할 수 있으며 한 번에 여러 가지 변수를 생각하여 원리를 상황에 적용할 수도 있다.

어떤 특수한 인지는 특정한 발달단계에서만 일어나는 것이라고 생각했던 피아제는 아동의 사상에 대한 진실한 이해는 그들의 인지 발달단계에 맞추어 일어난다고 주장했다. 그에 따르면 형식적 사고는 전조작기와 구체적 조작기에서 동화와 조절을 경험한 사람만이 할 수 있다고 한다. 이것은 발달의 시기와 단계를 강조하는 것으로 볼 수 있다. 앞서 말했듯이 우리나라 중학생은 구체적 조작기에서 형식적 조작기로 올라가는 과정에 있으므로 추상적 개념을 나열하기 보다는 구체적 조작활동을 기초로 공부할 것을 시작하는 것이 좋다고 할 수 있다 [5].

#### 라. 브루너(Bruner)의 수학학습심리학

피아제의 인지발달단계이론을 바탕으로 학교에서 지식의 구조의 지도를 주장한 사람이 브루너이다. 브루너의 교수이론의 핵심은 수학적 안목의 형성을 목적으로 하며 학문의 기저를 이루는 핵심적인 개념과 원리인 지식의 구조를 지도하는 것으로 지식의 구조를 효과적으로 지도하기 위해 EIS 이론을 제시하였다.

EIS이론이란, 활동적 표현(Enactive Representation), 영상적 표현

(Iconic Representation), 상징적 표현(Symbolic Representation)의 3가지를 말하는 것으로, 각각의 특징은 다음과 같다. 먼저 활동적 표현은 적절한 운동적 반응을 통하여 표현하는 것으로, 구체적 조작기까지의 아동에게 지배적인 역할을 하게 되며, 아동의 인지 발달과 더불어 내면화되어 간다. 영상적 표현은 도식을 이용하여 표현하는 것으로, 예를 들면 수도(數圖)를 이용하여 자연수를 표현하거나 벤다이어그램으로 집합을 표현하는 것이다. 마지막으로 상징적 표현은 언어능력의 발달과 더불어 나타나는 것으로, 피아제의 발달 단계이론으로는 구체적 조작기까지는 구체물과 관련되어 가능하며 순수하게 상징적 표현만을 다루는 것은 형식적 조작기에서 가능하다고 할 수 있겠다. 숫자 표현은 자연수에 대한 상징적 표현이며, 덧셈식이나 뺄셈식은 덧셈과 뺄셈에 대한 상징적 표현이다 [5].

브루너는 어떠한 지식일지라도 이 세 가지의 표현방법으로 지도가 가능하다고 보고 수학교육에서 초등 수학과 중, 고등 수학이 같은 심상으로 이루어지는 지식의 구조지도를 강조하였다.

브루너에 따르면 학교에서 지식의 구조를 지도했을 때 다음과 같은 네 가지 이점이 있다. 첫째, 기본적인 사항을 이해하면 내용을 훨씬 쉽게 파악할 수 있다. 둘째, 세세한 사항은 구조화된 패턴 안에 들어 있지 않으면 쉽게 잊어버린다. 그러므로 구조화된 패턴 안에 들어있으면 기억하기가 쉬워진다. 셋째, 기본적인 원리나 아이디어를 이해하는 것은 적절한 훈련의 전이를 가능하게 하는 가장 주된 방법이다. 넷째, 초등학교와 중등학교에서 가르치는 학습 자료가 어떤 기본적인 성격을 나타내고 있는가를 끊임없이 재조사함으로써 고등 지식과 초보적인 지식 사이의 간격을 좁힐 수 있다 [7].

### 3. 구체적 조작활동으로서의 수학적 도구의 활용

#### 가. 종이접기

구체적 조작에 의한 수학 개념의 형성에 도움을 줄 수 있는 활동의 하나로 종이접기를 들 수 있다. 종이접기를 이용한 수업은 가장 저렴하고 접근이 용이한 학습도구로서 학생들의 도형에 대한 직관적인 사고력 향상에 아주 유용하게 이용될 수 있다. 또한 종이접기를 이용한 교육은 어린 학생에서 성인까지 모든 연령층에 사용할 수 있으며, 간단한 조작에 의해 손쉽게 선분의 수직 이등분선이나 각의 이등분선을 표현할 수 있으므로 중요한 기하학적인 과정을 보다 쉽게 이해할 수 있다 [8].

종이접기와 관련된 선행 연구와 문헌을 토대로 수학 교수·학습에 있어서의 종이접기의 가치를 정리해보면 다음과 같다.

종이접기는 수학교육과정에 능동적이고 적극적인 경험을 추가시킴으로써, 흥미를 유발시키고, 수학과에 대한 긍정적인 태도를 갖게 할 수 있다. 현재 학생이 배우고 있는 수학적 개념과 법칙에 대하여 직관력을 개발하고 이해를 증가시킬 수 있는 기회를 줄 수도 있다. 종이접기를 통해 얻어지는 수학적 개념은 생소하거나 어렵게 느껴지지 않기 때문에 주어진 상황에서 문제 해결을 위해 얻어진 개념이나 법칙을 구체적으로 실행할 수 있는 능력을 키울 수 있다.

종이접기에 필요한 자료는 준비가 쉽고 저렴하여 언제든지 수업에 적용할 수 있으며 이로 인해 학생들에게 정신적이고 물리적인 참여를 유도하여 수업의 주제에 대한 친근감과 성취감을 느끼게 할 수 있다. 처음 도형단원이 시작할 때의 지루함과 어려움을 시각화와 체험을 통해 줄여줄 수 있으며, 더 나아가 구체적인 조작활동으로 학생들의 수학적 상상력을 자극하고, 그 속에서 수학적 원리를 발견하면서 지속적인 학습을 할 수 있게 해주는

동기유발 자료로서 활용될 수 있다.

체계적인 종이접기 활동을 통하여 학생들은 새로운 아이디어에 대한 정교성과 사고의 유연성을 신장시킬 수 있다. 조작 활동을 하면서 종이접기의 작품에만 중점을 두지 않고 과정을 중시함으로써 사고의 재미를 알게 하고 논리적 추리력을 향상시킬 수 있다. 기하의 감각을 길러주어 학생들에게 수학적 관심을 심어주며 모든 작품에는 순서와 법칙이 있다는 것을 배우게 된다.

종이접기 과정은 삼각형이나 사각형 등이 갖는 성질을 무의식적으로 경험하고 익숙하게 해주는 양질의 비정형적인 학습 환경을 제공한다고 할 수 있다. 더욱 중요한 것은, 기초적인 도형들이 갖고 있는 성질이 그 종이접기 과정 속에 함유되어 있을 뿐만 아니라, 의도하는 모양을 이루어 가는 과정이 수학 문제해결 과정과 흡사한 점이 많다는 것이다. 그리고 도형의 넓이의 등분이나, 도형의 대칭성, 선분의 길이 비교, 각의 등분 등 기초 기하적인 개념이 흥미 있는 놀이의 과정 속에 풍부하게 잠재되어 있음을 알 수 있다. 따라서 종이접기는 학생들이 도형 영역에서 수학적 의미나 개념을 파악할 수 있는 수학적 조작물로서의 충분한 역할을 할 수 있다.

#### 나. GSP의 활용

GSP(The Geometer's SketchPad)는 미국과학재단(NSF)의 시각적 기하 프로젝트(VGP:Visual Geometry Project)의 일환으로 개발된 탐구형 기하 소프트웨어이다. GSP는 수학교사들에게 널리 알려져 있고, 또한 학교 현장에 많이 보급되어 사용되고 있는 평면도형 프로그램이다. 자와 컴퍼스 즉, 선과 원을 사용하여 도형을 작도하는 프로그램이 GSP의 활용이 기하학습에 미치는 효과는 다음과 같다.

가) 도형의 표현을 동적으로 보여줌으로써 평면기하의 성질들을 정적인

상태의 인쇄 매체나 칠판에서의 강의 등을 통하여 지도할 때보다 더욱 확실하게 이해시킬 수 있다.

나) 새로운 멀티미디어 매체로서 GSP는 일반적인 그림 프로그램과 달리 자(직선 또는 선분)와 컴퍼스(원)만을 사용하는 작도와 측정을 통하여 학생들의 흥미를 자극할 수 있고, 학생들이 직접 GSP를 사용한다면 학습욕구를 유발할 수 있을 뿐만 아니라 학습내용을 확인할 수 있어서 더욱 효과적이다.

다) 평면기하의 여러 다양한 성질을 발견할 수 있도록 자극할 때 GSP를 마치 실험 도구처럼 사용하여 실제로 작도하고 측정함으로써 그 성질에 대한 가설을 학습자 스스로 세울 수 있도록 도와준다.

라) 평면기하의 성질이 학습자에게 충분히 이해된 다음 연역적인 증명이 필요한데 이 때 GSP는 정확한 그림을 제공하여 증명이나 문제 풀이에 필요한 정보를 제공하게 한다.

마) 애니메이션(Animation)과 드래그(Drag)를 사용하여 평면기하의 성질을 연속적이면서 역동적으로 관찰할 수 있다. 특히 애니메이션으로 만들어지는 ‘흔적남기기’는 도형의 자취를 생생하게 보여줄 수 있어서 더욱 현실감을 갖게 한다. 많은 도형을 그 정의에 의하여 구현해 봄으로써 확실한 개념을 얻고 그로부터 파생되는 도형의 성질에 자연스럽게 접근할 수 있다.

바) 스크립트(Script)의 루프(Loop) 기능을 사용하면 같은 작업의 순환을 할 수 있어서 프랙탈 도형을 구현할 수 있다.

사) GSP에서 제공되는 직교좌표계와 극좌표계를 통하여 평면기하의 여러 가지 성질에 대한 해석기하적 접근이 가능하다.

#### 4. 학습현장에서의 조작적 활동학습의 실현 가능성

현재 기하교육은 힐버트(Hilbert)의 공리계에 기반을 둔 공리나 정의로부터 주어진 기하학적 원리나 정리를 연역적으로 증명하는 과정에 주안점을 두고 있다. 적절한 정리를 발견하고 형식화하며 가설을 설정하는 능력은 증명하는 능력만큼 중요하다.

그런데 김흥기 [9] 에 따르면 중학교 1학년에서 증명이 필요한 명제들을 직관적으로 받아들이고, 그 사실들을 중학교 2학년 과정에서 이미 알려진 사실로 받아들이고 그 후 그 명제에 대한 증명이 없이 고등학교 과정이 끝나는 경우가 있다고 지적하였다. 이 논리적 간격을 메울 수 있는 대안의 하나로, 조작을 통한 확인이 가능할 수 있다.

도형을 마음대로 조작할 수 있는 컴퓨터의 그래픽 기능은 도형의 관계를 탐구하고 추정하는 실험의 기회를 제공한다. 따라서 기하 교육에서 컴퓨터 소프트웨어를 활용하면 학생들의 학습에 대한 흥미를 유발시키고 수학에 대한 태도를 긍정적으로 변화시킬 수 있다. 소프트웨어의 목적이 학생들에게 의미있고 분명할수록, 학생들의 판단이나 결정에 의해 프로그램이 진행될수록 그 효과는 크다. 예를 들어 도형을 마음대로 조작할 수 있는 그래픽 소프트웨어를 사용하면 중점연결 정리를 지도할 때, 현재의 교과서에 나와 있는 것처럼 바로 증명으로 들어가기에 앞서 다양한 종류의 그림을 통해 직접 중점을 연결시켜 봄으로써 중점을 연결한 선분의 길이가 밑변의 절반이고 두 선분이 평행함을 추측하게 할 수 있다.

Cunningham [10]은 교사가 시각화를 위하여 컴퓨터를 사용할 때, 고려해야 할 사항을 다음과 같이 제시하고 있다. 첫째, 이미지들로 표현할 항목들을 결정하고, 이 중에서 가장 중요한 것을 강조해서 학생들에게 보여주어야 한다. 여기에서 모순되는 정보는 제거되어야 한다. 둘째, 이미지들을 이용해 설명해야 할 내용의 순서를 정하고, 이 내용을 논리적으로 연결되게 소개해야

한다. 셋째, 학생들이 이미 가지고 있는 수학적 지식과 혼란이 일어나지 않으면서 그들의 지식을 넓힐 수 있도록 도와주어야 한다. 넷째, 생동감 있고 발전적인 수학적 처리를 소개하는 기회를 찾고, 학생들에게 그것을 탐구하거나 조절할 수 있는 적절한 기회를 제공하여야 한다. 다섯째, 학생들이 시각적으로 어떻게 학습할 것인지, 이런 학습을 어떻게 평가할 것인지, 이 학습을 학생들의 수학학습의 다른 부분과 어떻게 통합할 것인지 주의 깊게 고찰해야 한다. 정적인 시각화는 교과서에서 나오는 도형과 같이 이해를 위한 보조물에 지나지 않는다. 학습현장에서 교사들은 학생들에게 증명을 이해시키기 위해 도형을 '오른쪽'에 두고 설명한다. 그러나 그러한 종류의 시각화는 새로운 기하문제를 푸는 데 거의 도움이 되지 못한다. 그림을 통해 탐구하고, 그 결과를 정리하는 활동이 그림을 통한 이해만큼이나 강조되어야 한다. 따라서, 학생들의 학습능력을 신장시키기 위해 조작적 활동을 활용하는 실제 수업이 진행되어야 한다.

위에서 조작적 활동학습의 중요성을 뒷받침하는 이론과 활용 가능한 도구를 살펴보았다. 그러나, 현실적으로 교실 수업에서 조작적 활동학습을 모든 수학에 적용하여 가르치기는 힘들다. 활동학습의 수업이 가능하려면 전통적인 방식의 교실 수업이 아닌 개인차를 고려한 소집단 그룹이 적합한데, 이런 수업방식은 실제 교실 수업에서는 시간상의 제약이나 자료 및 교수 제작 등 여러 다른 이유로 제한점이 많이 다르기 때문이다. 여러 가지 제약이 있음에도 불구하고, 특히 기하영역에서 간단한 조작활동을 통하여 학습 효과를 높이는 것은 그리 어려운 일이 아니다. 종이접기나 GSP와 같은 소프트웨어의 활용은 비교적 시간적, 공간적 제약이 덜한 학습도구로서 교사가 수업을 어떻게 조직하고 진행하느냐에 따라 많은 시간을 들이지 않고 높은 학습 효과를 기대할 수 있다. 교실 수업에서 활동적 수업은 학생과 교사 간 상호작용을 통하여 다양한 경험을 할 수 있게 되고 어떤 수학적 개념에 이르게 되는

과정 속에서 학생들은 수학에 흥미를 갖고, 지적 호기심을 가질 수 있게 되며, 그 결과 학습 내용을 발견하는 경험을 직접 할 수 있게 될 것이다. 또한 그 속에서 또 다른 무언가를 발견할 수 있는 계기가 마련될 것이다.

### Ⅲ. 구체적 조작활동의 실제

이 장에서는 중학교 2학년 과정에서 다루고 있는 평면도형(삼각형, 사각형)의 성질을 구체적 조작활동을 통하여 효과적으로 학습할 수 있는 학습 자료를 제시하기로 한다.

#### 1. 삼각형의 성질

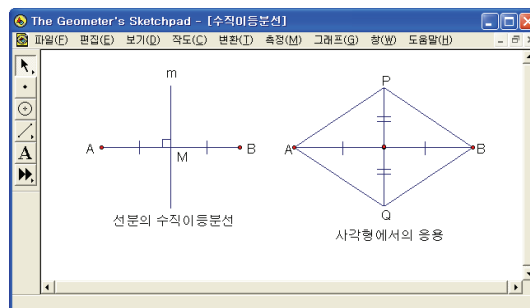
##### 가. 선분의 수직이등분선의 성질

선분의 수직이등분선의 성질은 중학교 1학년 과정의 작도와 중학교 2학년 과정의 삼각형의 성질과 사각형의 성질을 증명하는데 기본이 되는 성질인데, 1학년에서는 증명없이 직관적으로 받아들이고 있다.

이 성질을 색종이를 이용한 구체적 조작활동을 통하여 확인해 볼 수 있다.

- ① 직사각형 모양의 종이를 네 꼭짓점이 겹쳐지도록 두 번 접는다.
- ② 대각선( $\overline{AB}$ ,  $\overline{PQ}$ )을 따라 접은 후에 펼친다.
- ③  $\overline{AB}$ 와  $\overline{PQ}$ 의 교점을 M으로 표시한다.

위의 순서대로 다음과 같이 탐구 활동을 해보도록 하자.



위의 그림과 같이 직선  $m$ 이  $\overline{AB}$ 의 중점  $M$ 을 지나면서  $\overline{AB}$ 에 수직일 때, 즉  $\overline{AB} = \overline{BM}$ ,  $m \perp \overline{AB}$ 일 때, 직선  $m$ 을  $\overline{AB}$ 의 수직이등분선이라고 한다.

탐구 활동의 결과로 사각형  $AQBP$ 에 대하여  $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{AQ} = \overline{BQ}$ 이 확인 가능하므로 이 사각형은 마름모이다. 또  $\overline{AB} = \overline{BM}$ ,  $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ 이므로 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분함을 알 수 있다.

따라서 선분의 수직이등분선의 작도에는 위와 같은 마름모의 두 대각선의 성질이 이용된다. 즉  $\overline{AB}$ 를 한 대각선으로 하는 마름모의 나머지 두 꼭짓점을 지나는 직선을 작도하면 된다 [11].

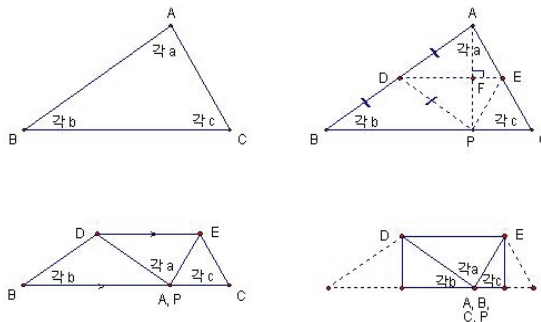
#### 나. 삼각형의 내각의 크기의 합

중학 수학 과정에서 “삼각형의 내각의 합이  $180^\circ$ 이다.”는 삼각형의 기초가 되는 중요한 명제이다. 그 성질을 종이접기를 이용하여 확인해 볼 수 있다.

①  $\triangle ABC$ 의 한 점  $A$ 에서  $\overline{BC}$ 에 이르는 수선의 발을 먼저 찾아서 점  $P$ 로 표시한다.

② 꼭짓점  $B$ 를 점  $P$ 에 일치시킨다.

③ 꼭짓점  $C$ 를 점  $P$ 에 일치시킨다.



위의 순서대로 다음과 같이 종이접기를 해보도록 하자.

그림에서  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  이고,  $\overline{AF} = \overline{PF}$  이므로  $\triangle ADE$ 와  $\triangle ABC$ 는 닮음비가 1:2인 닮은 삼각형임을 알 수 있다.  $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{PD}$  이므로  $\triangle DBP$ 는 이등변삼각형이다. 따라서  $\angle DBP = \angle DPB$ 이다. 이와 같은 방법으로  $\angle ECP = \angle EPC$ 인 것이 확인 가능하다.

또한, 이 종이접기 활동을 통하여 학생들은 중선을 접어 기존  $\triangle ABC$  내에 합동인 삼각형 3쌍이 만들어졌음을 학생들 스스로가 발견하는 것을 기대할 수 있다.

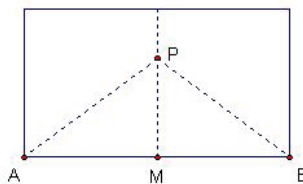
#### 다. 이등변삼각형의 성질

두 변의 길이가 같은 삼각형을 이등변삼각형이라 한다. 이등변삼각형은 다음과 같은 성질이 있다.

- i. 두 밑각의 크기는 같다.
- ii. 꼭짓각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

이등변삼각형의 성질 또한 종이접기를 이용하여 확인해 볼 수 있다. 다음의 순서대로 종이접기를 해보자.

- ① 직사각형 종이의 세로 변을 포개어 밑변의 수직이등분선을 접는다.
- ② 수직이등분선 위에 임의의 점 P를 표시하고, 선분 PA와 선분 PB를 접으면 삼각형 PAB가 생긴다.
- ③ 삼각형 PAB는 이등변삼각형이다. ( $\because$  선분 PA=선분 PB)



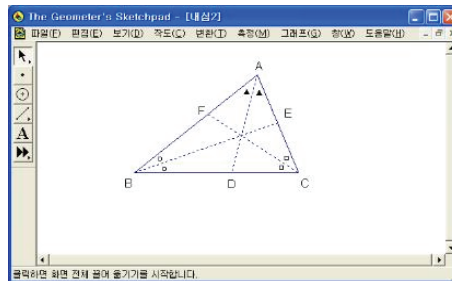
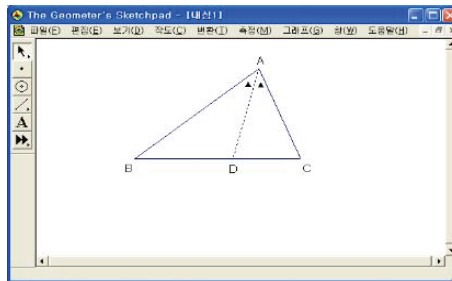
라. 삼각형의 내심

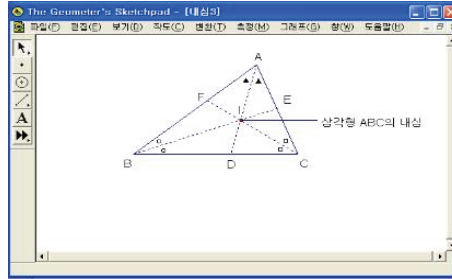
다각형의 모든 변이 한 원에 접할 때, 이 원을 내접원이라 하고 내접원의 중심을 내심이라고 한다. 모든 삼각형의 내심은 삼각형의 내부에 위치한다는 공통점이 있다. 내심의 성질은 다음과 같다.

- i. 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점(내심)에서 만난다.
- ii. 내심에서 삼각형의 세 변에 이르는 거리는 같다.

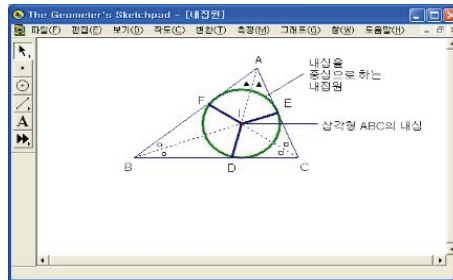
GSP를 활용하여 삼각형의 내심을 찾고, 작도 과정에서 내심의 성질을 확인할 수 있다.

- ① 삼각형 ABC에서 각 A의 내각을 이등분하는 선을 작도한다.
- ② 다른 두 점 B, C의 각의 이등분선도 작도한다.
- ③ 이 때 세 내각의 이등분선의 교점이 삼각형 ABC의 내심이다.





그 다음 점 I를 중심으로 하여 반지름을  $ID$ 로 하는 원을 그린 후  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  와 외접하는지 확인하도록 한다.



GSP 작도 활동을 통해 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이 내심이라는 것을 알 수 있고, 삼각형의 세 변에 각각 접하는 원(내접원)을 그릴 수 있다. 이 때 생기는 내접원의 중심이 내심이 되는 것을 확인할 수 있으며, 삼각형의 내부에 세 쌍의 합동인 삼각형이 존재함을 학생들 스스로가 발견할 수 있을 것이다.

위와 같이 내심의 성질을 알아보는 활동은 종이접기로도 확인 가능하다. 종이접기에 관한 내용은 교과서 우정호 외 [14] 와 신향균 외 [15] 에서 찾아볼 수 있다.

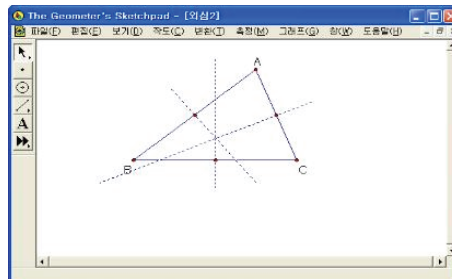
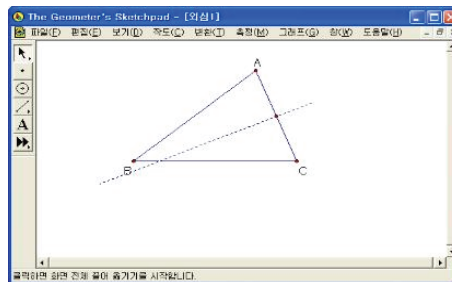
## 마. 삼각형의 외심

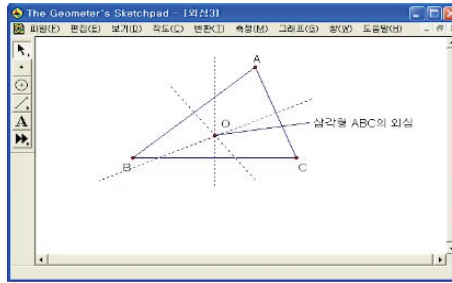
한 다각형의 모든 꼭짓점이 한 원 위에 있을 때, 이 원을 외접원이라고 하고 외접원의 중심을 외심이라고 한다. 외심의 성질은 다음과 같다.

- i. 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.
- ii. 외심에서 삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

삼각형의 외심 또한 GSP로 간단하게 작도가 가능하다. 다음의 순서에 따라 직접 확인해 볼 수 있다.

- ① 삼각형  $ABC$ 에서  $\overline{AC}$ 의 중점을 지나는 수직이등분선(수선)을 작도한다. (점  $A$ 와 점  $C$ , 그리고  $\overline{AC}$ 를 선택한 후 작도 메뉴의 수선을 선택한다.)
- ② 다른 두 선분에 대해서도 수직이등분선을 그려준다.
- ③ 이 때 세 수직이등분선의 교점이  $\triangle ABC$ 의 외심이다.

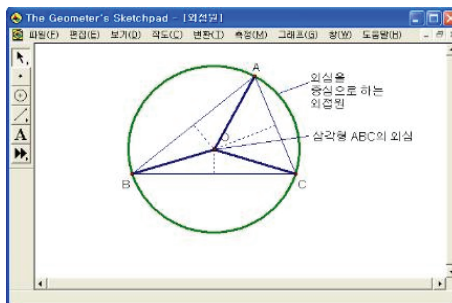




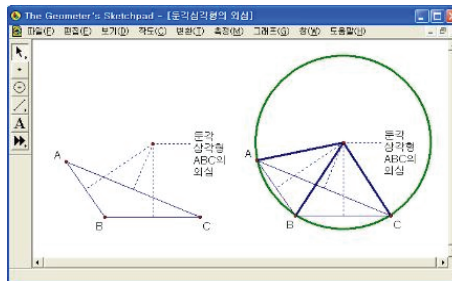
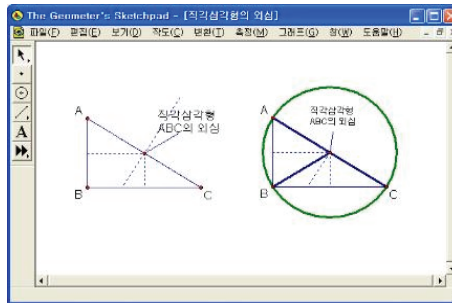
GSP 작도 활동을 통해 외심의 정의를 알고 외심의 성질까지도 이해할 수 있다.

삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이 외심이라는 것을 알 수 있고, 삼각형의 세 꼭짓점에 접하는 원(외접원)을 그릴 수 있다. 이 때 생기는 외접원의 중심이 외심임을 확인할 수 있으며, 삼각형의 내부에 세 쌍의 합동인 삼각형이 존재함을 학생들 스스로가 발견할 수 있기 때문에 다양한 문제로의 접근이 가능하다.

외심과 외접원의 중심이 같은 점이라는 것을 직접 확인하기 위해 점 O를 중심으로 하는 반지름이  $\overline{OA}$  인 원을 그려서 다른 두 꼭짓점이 이 원 위에 있는지 확인하여 본다.



직각삼각형과 둔각삼각형에서도 같은 방법으로 외심을 찾아볼 수 있다. 직각삼각형의 외심은 빗변의 중심에 위치하고, 둔각삼각형은 삼각형의 외부에 존재하는 것을 GSP 작도를 통해 확인해보기로 한다. 이를 탐구 활동으로 학생들에게 제시한다면 효과적인 조작 활동이 될 것이다.



삼각형의 내심과 마찬가지로 외심의 성질을 알아보는 활동은 종이접기로도 확인 가능하다. 종이접기에 관한 내용은 교과서 우정호 외 [14]와 신향균 외 [15]에서 찾아볼 수 있다.

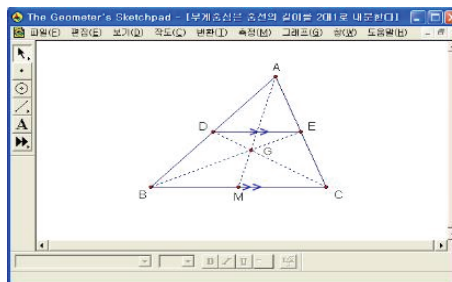
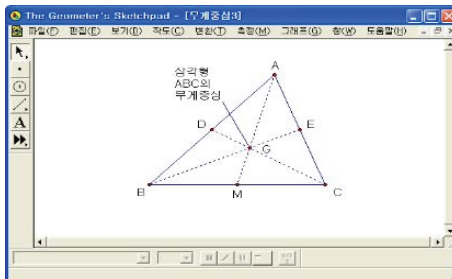
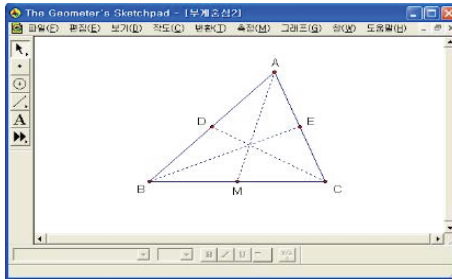
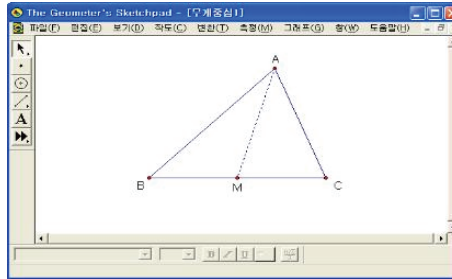
#### 바. 삼각형의 무게중심

삼각형의 세 중선의 교점을 무게중심이라 하는데 무게중심은 다음과 같은 두가지 성질이 있다.

- i. 세 중선은 한 점(무게중심)에서 만난다
- ii. 세 중선(한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분)의 길이를 각 꼭짓점으로부터 2:1로 나눈다.

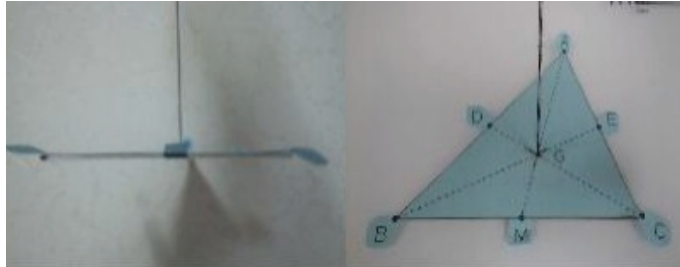
다음 순서대로 작도를 하여 무게중심을 그릴 수 있고, 더불어 i의 성질도 확인할 수 있다.

- ① 점 A와  $\overline{BC}$  (A의 대변)의 중점을 잇는 중선을 그린다.
- ② 다른 꼭짓점에 대해서도 중선을 그린다.
- ③ 세 중선의 교점이  $\triangle ABC$ 의 무게중심이다.



위의 그림에서  $\overline{DE}$ 와  $\overline{BC}$ 가 평행함을 알 수 있다.  $\angle EDG = \angle BCG$  ( $\because$ 엇각),  $\angle DGE = \angle CGB$  ( $\because$ 맞꼭지각)이므로  $\triangle BGC$ 와  $\triangle EGD$ 의 닮음비는 2:1로 ii의 성질을 확인할 수 있다.

GSP를 이용하여 구한 무게중심 G가 실제로 삼각형 무게의 중심인 점인지 확인할 수 있는 활동을 해보기로 한다. 이 때 필요한 도구는 실, 테이프, 종이 삼각형이다. 무게중심 G가 있는 지점에 실을 매달아 직접 삼각형을 들어올린 후 삼각형이 어느 한 쪽으로 치우치지 않고 평행한지를 실험을 통해 확인해보자.



실험을 통해 무게중심 G가 실제 삼각형의 무게의 중심임을 확인할 수 있었다. 따라서,  $\triangle ABC$ 의 내부에 있는 6개의 삼각형의 넓이가 모두 같음을 알 수 있다. 이를 정리하면 다음과 같다.

$$\triangle AGD = \triangle DGB = \triangle BGM = \triangle MGC = \triangle CGE = \triangle EGA$$

## 2. 사각형의 성질

### 가. 사다리꼴

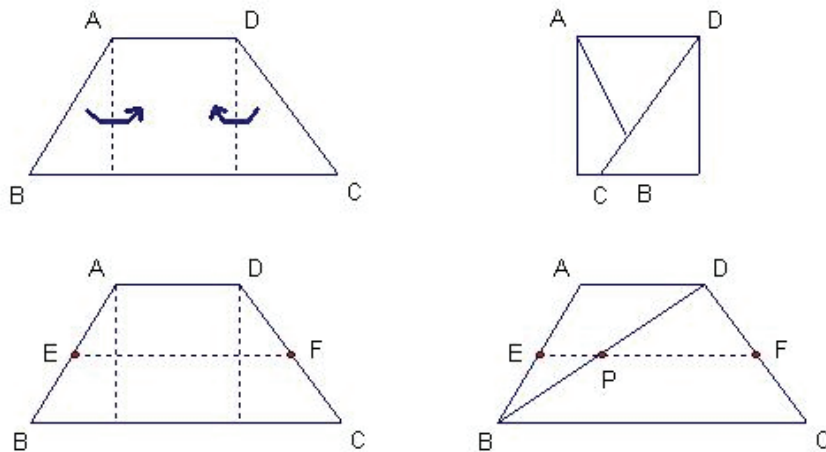
사다리꼴은 한 쌍의 대변이 평행한 사각형이다. 사다리꼴의 성질은 다음과 같다.

- i. 중선  $EF$ 는 사다리꼴의 높이를 수직이등분한다.
- ii.  $\overline{EF}$ 의 길이는  $\overline{AD}$ 와  $\overline{BC}$ 를 더한 길이의 절반이다.

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$$

위의 성질을 종이접기를 이용하여 확인해볼 수 있다.

- ① 사다리꼴의 윗변과 아랫변 중 짧은 쪽에서 높이를 각각 접는다.
- ② 각각의 평행하지 않은 변을 반으로 접어 중점을 찾는다.
- ③ ②에서 찾은 두 중점을 연결하는 선분이 생기도록 접어준다.



ii의 성질  $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$ 은 삼각형의 닮음을 이용하여 증명할 수 있다.

$\triangle PDF \approx \triangle DBC$ ,  $\triangle BEP \approx \triangle BAD$ 는 1:2의 닮음비를 가진 삼각형이다. 따라서  $\overline{EP} = \frac{1}{2}\overline{AD}$ ,  $\overline{PF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 가 되므로  $\overline{EF} = \overline{EP} + \overline{PF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$ 임을 확인할 수 있다.

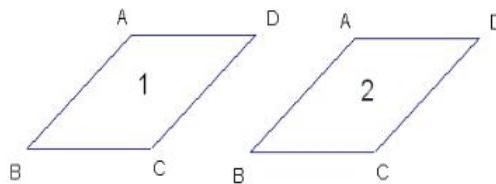
#### 나. 평행사변형

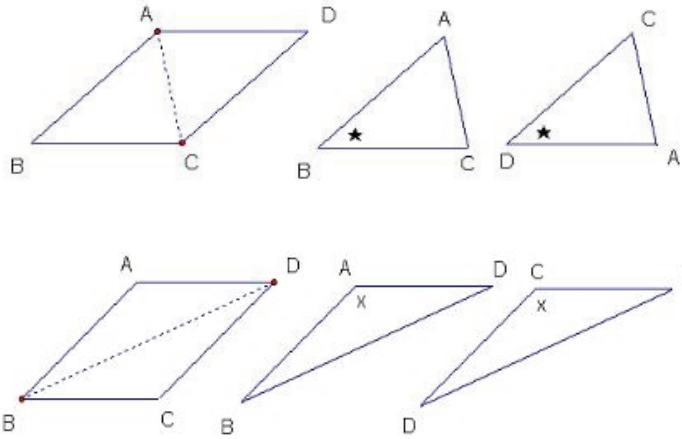
두 쌍의 대변이 평행한 사각형을 평행사변형이라 한다. 평행사변형에는 다음과 같은 성질이 있다.

- i. 대변의 길이가 각각 같다.
- ii. 대각의 크기가 각각 같다.
- iii. 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

먼저 i, ii의 성질을 종이접기를 이용하여 알아보자.

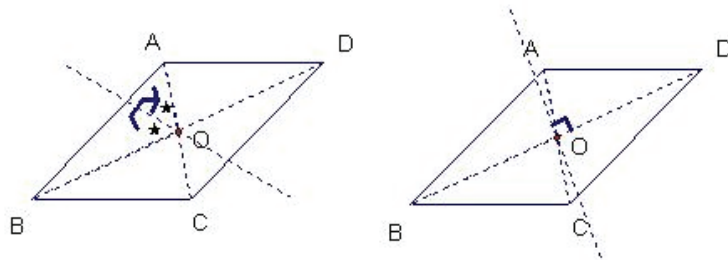
- ① 평행사변형 ABCD를 2개를 만든다.
- ② 대각선 AC를 따라 잘라 두 개의 삼각형을 만들어 하나의 삼각형을 뒤집어서 포개어 본다.
- ③ 대각선 BD를 따라 잘라 두 개의 삼각형을 만들어 하나의 삼각형을 뒤집어서 포개어 본다.





다음으로 iii의 성질 또한 종이접기를 통해 확인하기로 한다.

- ① 주어진 평행사변형 ABCD의 대각선을 접는다
  - ② 각 AOB의 이등분선을 접어  $\overline{AO}$ ,  $\overline{BO}$ 의 길이가 같은지 비교한다.
  - ③ 점 O를 지나고 대각선 BD에 수직인 직선을 접어  $\overline{BO}$ 와  $\overline{DO}$ 의 길이가 같은지 확인한다.
  - ④ 위의 ②,③의 과정을 대각선 AC에 반복한 후, 평행사변형의 대각선의 성질을 확인할 수 있다.
- ⇒ 평행사변형의 대각선의 길이는 서로 같지는 않지만, 서로 다른 것을 이등분한다.



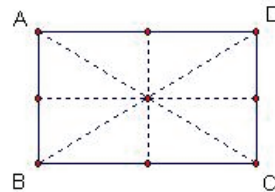
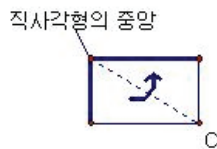
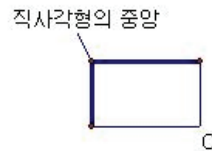
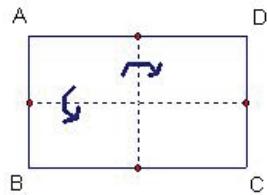
다. 직사각형

직사각형은 네 각이 모두 같은 사각형이다. 직사각형에는 다음과 같은 성질이 있다.

- i. 대변의 길이가 각각 같다.
- ii. 대각의 크기가 각각 같다.
- iii. 두 대각선의 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.

위의 세가지 성질을 종이접기를 활용하여 확인해 본다.

- ① 직사각형 모양의 종이를 준비하여 각 선분의 중점을 찾는다.
- ② 중점을 이용하여 직사각형의 1/4 크기의 직사각형으로 접는다.
- ③ 직사각형의 중앙점과 직사각형의 꼭짓점을 잇는 선분을 접는 선으로 하여 접어준다.
- ④ 모두 펼친다.



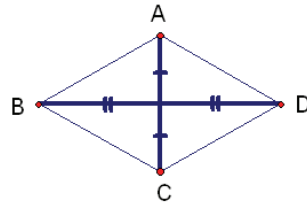
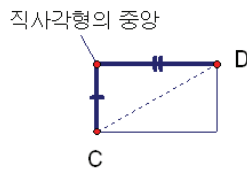
라. 마름모

마름모는 네 변의 길이가 모두 같은 사각형이다. 마름모의 성질은 다음과 같다.

- i. 대변의 길이가 각각 같다.
- ii. 대각의 크기가 각각 같다.
- iii. 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

위의 세가지 성질을 다음과 같이 종이접기를 통해 확인해 볼 수 있다.

- ① 직사각형을 두 번 접어  $\overline{CD}$ 를 자르는 선으로 하여 자른다.
- ② 모두 펼친다.



이번 장에서는 구체적 조작활동을 통하여 평면도형의 성질에 관한 내용을 스스로 탐구하고 원리를 발견할 수 있는 몇 가지 사례를 들었다. 학생들은 종이접기와 GSP를 통한 활동학습을 통해 흥미를 가질 수 있게 될 것이며, 도형의 성질을 암기하는 학습 방법에서 벗어나 경험을 통해 스스로 지식을 재구성할 수 있으리라 기대해본다.

## IV. 결 론

중학교 기학영역에서 2학년 과정은 1학년까지의 직관적인 학습으로부터 논리적이고 체계적인 학습을 처음 시작하게 된다는 점에서 매우 중요하다. 그러나, 학생들의 입장에서 이는 매우 생소한 경험을 하게되는 것이어서 결코 쉽지 않은 도전이 될 것임에 틀림이 없다.

직관적인 방법에서 논리적 추론으로 옮겨가는 과정에서 나타날 수 있는 학습내용과 방법론적 격차를 줄이고, 학생들의 흥미를 잃지 않도록 하기 위한 방안이 필요하다는 것은 누구나 공감할 수 있는 일일 것이다. 이러한 대안의 하나로, 이 논문에서는 구체적 조작활동을 통한 학습자료의 개발을 목표로 하였으며, 종이접기와 컴퓨터 활용을 수단으로 제시하였다.

제7차 개정 교육과정에서 강조하고 있는 내용 중 한 가지는 수학적 의사소통이다. 이 수학적 의사소통 능력을 최대화하기 위해서는 교사의 일방적인 이론 위주의 수업에서 벗어나 교사와 학생 사이의 상호적인 교과 수업을 진행하는 것이다. 기하 영역을 지도할 때 교사가 학생들과 함께 구체적인 조작물을 통해 학생들이 직접 만지고 조작하는 활동을 할 수 있도록 지도해야한다. 이로서 학생들은 구체적 경험에 근거하여 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해할 수 있으며, 수학의 필요성과 유용성을 인식하고, 학습의 즐거움을 경험함으로써 수학에 대한 흥미와 자신감 및 긍정적인 태도를 갖출 수 있게 된다.

상징언어로서의 수학은 논리적 측면만을 강조할 경우 수학적 의사소통에 문제를 일으킬 수 있고, 결과적으로 학생들로 하여금 어려운 과목으로만 인식하게 하여 학습동기가 감퇴하게 만들 수 있다. 이미지에 대한 상상과 직관이 더 중요할 수도 있는 기하 영역의 경우는 더욱 그러하다. 따라서 구체적 조작활동을 수업에 활용하는 것은 학생들이 기하학적 상상과 원리,

법칙을 발견하는 방법을 이해할 수 있도록 도와줄 수 있을 뿐만 아니라 기하학에 지속적인 흥미와 관심을 유지할 수 있는 대안적 방법이 될 것이다.

특히, 시각적인 학습 효과는 스스로 수학적 내용을 강화하여 지식구조를 지속적으로 유지할 수 있게 해준다. 종이접기와 GSP를 이용한 조작활동은 기하영역에서 배우는 이론적인 내용을 시각화하고 직접 체험 가능하게하여 수학에 대한 관심이 생기게 해준다. 구체적 조작물을 이용한 다양한 활동을 통해 학생 스스로 관찰하고 탐구하여 도형의 여러가지 성질을 찾아내게 된다면 수학에 대한 인식도 변화하여 수학 교과에 자신감과 긍정적인 태도를 갖게 되며, 스스로 탐구할 수 있는 능력을 길러줄 것이다. 이런 과정을 통해 비로소 수학에 대한 지속적인 학습을 할 수 있는 동기유발이 될 것이며, 스스로 상상하고 예측하면서 학생들 자신의 결과를 확인함으로써 학습 능력과 탐구력 신장의 효과까지 불러일으킬 수 있다.

전술한 바와 같이, 본 논문은 많은 학생들이 어렵다는 선입견을 갖고 있는 중학교 수학 2의 도형 단원을 중심으로 학교 수업에서 구체적 조작활동이 이루어질 수 있는 학습 자료를 제시해봄으로써 학교 수학에의 적용방안을 모색해 보았다. 교사는 학습내용을 일방적으로 전달하고 주입시키는 교수 방법에서 벗어나 학생들에게 다양한 활동을 제시하고 학생들 스스로 어떤 것을 관찰하고 탐구하게 하는 역할을 해야 한다. 이처럼 조금 더 활동적인 수업 위주로 수학 수업이 진행된다면 기하 단위 뿐 아니라 가능한 많은 영역에서 교사와 학생이 능동적으로 함께 참여하는 수학 수업이 가능해질 것이며, 그렇게 된다면 교사의 교수·학습 능력과 학생들의 수학에 대한 자신감, 흥미도, 학습태도 및 학업성취도까지 함께 발전할 수 있을 것이다. 교사와 학생 상호 간 수학적 의사소통을 최대한 부각시키고 조작적 활동을 효율적으로 활용함으로써 도형 단위에서 수학에 대한 재미를 느끼고 능동적인 수학학습활동이 가능하기를 기대해본다.

## 참 고 문 헌

- [1] 이종희 · 김선희, 수학적 의사소통, 교우사, 2002.
- [2] 교육과학기술부, 2007년 개정교육과정 중학교 교육과정 해설Ⅲ(수학, 과학, 기술가정), 2008.
- [3] 신동선 · 류희찬, 수학교육과 컴퓨터, 경문사, 1999.
- [4] 강옥기, 수학과 학습지도와 평가론, 경문사, 2000.
- [5] 박미영, 구체적 조작물을 이용한 체험학습에 관한 수업 방법 연구, 성균관대학교 교육대학원 석사학위 논문, 2000.
- [6] 황혜정 · 나귀수 · 최승편 · 박경미 · 임재훈 · 서동엽, [개정판] 수학교육학신론, 문음사, 2008.
- [7] Bruner, J.S., The Process of Education, New York:Vintage, 1960.
- [8] 백석운, 종이접기를 위한 초등기하교육, 초등교육연구 제 4집, 진주교육대학교 초등 교육연수원, 1991.
- [9] 김홍기, 중학교 수학에서 기하 내용 취급에 관한 연구, 수학교육학 연구, 14(1), 111-127, 2004.
- [10] Tall,D., Intuition and rigour:The role of visualization in the calculus. In W.Zimmermann, & S.Cunningham (eds.), Visualization in teaching and learning mathematics. A project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of the Mathematical Association of America, 1991.
- [11] 황선욱 · 강병개 · 김수영 · 박정아, 중학교 수학1, (주)좋은책신사고, 2009.
- [12] 우정호 · 박교식 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 임재훈 · 박인 · 이영란 · 고현주 · 김은경, 중학교 수학2, 두산동아, 2010.

- [13] 신향균 · 이광연 · 윤혜영 · 이지현, 중학교 수학2, (주)지학사, 2010.
- [14] 박영훈 · 여태경 · 김선화 · 심성아 · 이태림 · 김수미, 중학교 수학2, (주)천재문화, 2010.
- [15] 김향숙 · 박진석 · 김영미 · 김영태 · 박준형 · 박선희 · 진현경 · 한은혜, 창의적 수학을 위한 GSP 활용, 경문사, 2005.
- [16] 김향숙 · 박진석 · 윤삼열 · 김영태 · 박준형 · 박선희 · 정성곤 · 도석수 · 김영미, GSP를 이용한 기하의 이해, 경문사, 2006.
- [17] 나숙자 · 신상희, 친절한 도형교과서 도형의 성질과 닮음편, 부·키, 2007.
- [18] 우정호, 학교 수학의 교육적 기초 제2판, 서울대학교출판부, 2007.
- [19] 김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤, 수학교육과정과 교재연구, 경문사, 2007.
- [20] 이상미, 종이접기와 GSP를 활용한 수업이 수학 학습 태도에 미치는 영향(7-나 단계의 작도 및 도형 단원을 중심으로), 충북대학교 교육대학원 석사학위논문, 2007.

# ABSTRACT

## Concrete Operational Activities in the Second Grade Junior High School Geometry Classes

Joo, Eun Ji

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education

Sungshin Women's University

Supervised by Kang, Byung Gai, Ph. D.

In this paper, we study some effective methods of teaching geometry to which the students have difficulties in understanding. Our curriculum deals with more logical aspects in the second grade of junior high school rather than intuitive ones of the first grade. So it will be reasonable to help our students to understand the principles and logical foundations of geometry via some intuitive and visualized materials. Also, it may be an useful method for students to maximize their learning effect by experiencing and conceptualizing geometric principles with concrete operational activities.

Concrete manipulating activities have advantages of applying it

to mathematics education by using relatively simple materials. First, very simple origami activities and the operations of computer software can be used to stimulate students' interests and help them to grasp the meaning and basic principles of geometric objects such as parallel lines, orthogonal bisectors, triangles, squares, rectangles and parallelograms. Next, students can demonstrate and conceptualize their knowledges obtained from concrete manipulating activities. Furthermore, they can be helpful for students to establish and prove some more abstract properties of geometric objects.

Also, concrete operational activity has an accordance with the 'mathematical communication' which our 7th Curriculum pursues. As we may expect, most students participating in concrete operational activities can have sufficient opportunities of meaningful interactions in learning.

The use of computer software such as GSP in geometric class can also help our students to strength their ability of mathematical thinking by understanding geometric constructions visually, exploring geometric configurations and applying them to more abstract concepts.

In this paper, we introduce several materials of specific operations and methods of its applications and provide a variety of examples and ideas which can be used in geometry classes.

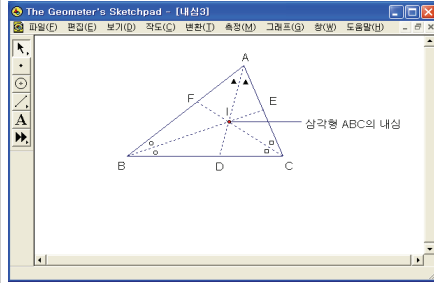
[부록] 교수-학습 지도안

단 원	VI. 도형의 성질		일 시	2010. ○. ○		
	1. 삼각형의 성질		대 상	중 2 학년		
	(4) 삼각형의 외심과 내심		차 시	7 / 10		
주 제	삼각형의 내심과 그 성질		교과서			
학 습 목 표	<ul style="list-style-type: none"> <li>삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이 내심임을 이해할 수 있다.</li> <li>삼각형의 내접원의 중심이 내심임을 이해할 수 있다.</li> <li>삼각형의 세 변에서 같은 거리에 있는 점이 내심임을 이해할 수 있다.</li> <li>예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형에 대하여 삼각형의 내심은 항상 삼각형의 내부에 있다.</li> </ul>					
준비물	교과서(수학책, 수학익힘책), 지도안, GSP, 컴퓨터, 컴퍼스, 색분필					
단 계	학 습 요 소	교수·학습 과정		수업 형태	시 간	자료 및 유의점
		교 사	학 생			
도 입	수업 시작	<ul style="list-style-type: none"> <li>학생들과 인사하고 출결 상황 확인 (학생들 인사한다)</li> </ul>	(반장이 일어나 인사한다) -차렷, 선생님께 경례!  (다같이)반갑습니다.		5	※ 학급의 분위기를

	<p>-여러분 안녕하세요? 오늘 결석한 학생 있나요?</p> <p>- 다 왔군요. 좋아요.</p> <p>요즘 날씨가 제법 선선하죠? 이제 정말 완전한 가을인가 봐요. 간단한 스트레칭을 통해서 수업에 집중할 수 있도록 해보세요. 알겠죠?</p> <p>• 삼각형의 외심의 성질</p> <p>-자, 그럼 우리가 지난 시간에 전시 어떤 것을 배웠는지 한번 생각해 볼까요? 삼각형의 외심의 성질은 어느 것이 있었죠?</p>	<p>-아니요. 없어요.</p> <p>-네.</p> <p>-세 변의 수직이등분선의 교점이 외심이예요. 그 점에서</p>	<p>문답 및 일제 학습</p>	<p>조성하여 수업에 집중하도록 한다.</p>
--	---	--	-------------------	---------------------------



점에서 만나게 되고 이 교점이 우리가 찾는 삼각형 ABC의 내심이에요.



너무 빨라요.

-정말 세 선분이 한 점에서 만나요. 신기해요.

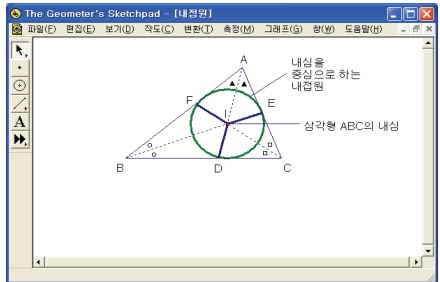
탐구  
활동2

-좋아요. 그럼 우리 삼각형에 내접하는 원을 그려볼까요? 어떻게 하면 될까요?

-(대답을 못한다)웅성웅성 거리고, 아무 얘기나 하기 시작한다.

-어렵게 느껴지나요? 방금 우리가 작도한 내심에서 한 단계만 더 하면 금방 찾을 수 있어요.

※모든 학생이 이해할 수 있도록 천천히 지도한다.

	<p>- 자, 직접 나와서 해보고 싶은 학생 있나요?</p> <p>(한 학생을 지목하여 앞으로 나와서 GSP를 직접 실행시키도록 한다.)</p> <p>-승기가 직접 해볼까요? 이 삼각형의 세 변과 접하도록 하나의 원을 만들어보세요.</p> <p>-잘했어요. 바로 이 원이 삼각형의 내접원이예요.</p> 	<p>-저요저요!</p> <p>-네.(동료 학생의 조작활동을 지켜본다.)</p> <p>-네.</p>	<p>발표 학습</p>	<p>※ 학생들이 잘 따라오고 있는지 문답식으로 발표시켜 집중하도록 한다.</p> <p>※ 삼각형의 내심과 내접원의 중심이 일치하는 것을 시각 자료를 통해 직관적으로 이해하게 한다</p>
--	--	---	--------------	--

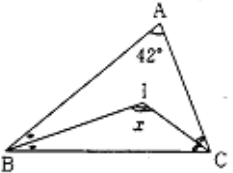
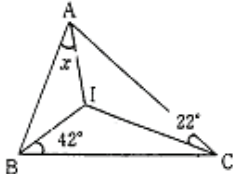
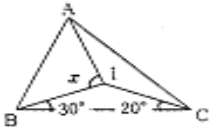
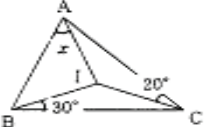

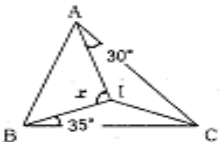
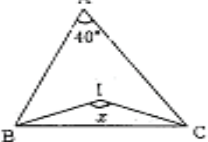
	<p>문제 (칠판에 판서를 하며)</p> <p>제시 Q1. 삼각형 내부에서 그릴 수 있는 가장 큰 원의 중심은 내심과 어떤 관계가 있을까요?</p> <p>Q2. 내심에서 세 변에 이르는 거리는 어떤 관계가 있을까요?</p>	<p>A1. 삼각형 내부에서 그릴 수 있는 가장 큰 원의 중심은 내심과 같아요.</p> <p>A2. 내심에서 세 변에 이르는 거리는 내접원의 반지름이므로 그 길이가 각각 같아요.</p>	<p>전체 학습</p>		
	<p>문제 해결</p>	<p>-네. 맞아요. 잘했어요. 이해를 잘 하고 있군요.</p>			

		<p>-정리해볼까요? 내심은 어떤 점 인가요? -맞아요. 또 다른 의견이 있나요?</p> <p>-잘 알고 있군요. 그럼 내심은 어떤 성질을 갖고 있나요?</p>	<p>-삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이 내심 이에요</p> <p>-내접원의 중심이 내심 이에요.</p> <p>-내심은 삼각형의 세변에서 같은 거리에 있어요.</p>	<p>전체 학습</p>	
정		<ul style="list-style-type: none"> <li>• 수학익힘책 풀기</li> </ul> <p>-이해가 잘 안 되는 문제는 조</p>	<p>-학생들은 문제를 풀어</p>		

리		<p>용히 손을 들게 한 뒤 개별적으로 설명을 해주면서 이해할 수 있게 한다.</p> <p>-예상하지 못한 질문을 할 경우에는 칠판에 그 내용을 판서하여 다같이 푼다.</p>	본다.	개별 학습	7	<p>※ 다양한 문제 학습을 위하여 각 수준의 문제를 풀어 보도록 유도한다.</p>
	정리	<p>• 차시 내용 확인</p> <p>-이번 시간에 배운 삼각형의 내심과 그 성질은 앞으로 다양한 문제의 형태로 응용이 되어 만나게 될 거예요. 오늘 배운 내용을 집에 가서 다시 한 번 복습하도록 하세요.</p>	-네.			<p>※ 아이들이 스스로 집중해서 풀 수 있도록 한다.</p>
	숙제 안내	<p>• 숙제 안내:익힘책, 가정학습지 p○○부터 p○○까지.</p> <p>-오늘의 숙제는 수학익힘책 문제를 풀어오는 거예요. 오늘 다 하지 못한 문제들은 숙제로 풀어오도록 하세요. 그리고 나눠주는 프린트를 아침자습시간에 풀</p>		전체 학습		

		<p>어봐요. 다음 시간에 모르는 문제는 질문을 받겠습니다.</p> <p>- 우리는 오늘 삼각형의 내심과 그 성질에 대해서 배웠지요?</p> <p>예고 다음 시간에는 오늘 배운 내용을 응용한 다양한 문제들을 풀어보도록 하겠습니다. 이것으로 오늘 수업을 마치도록 해요.</p>	<p>- 네.</p> <p>-네.(인사를 한다.)</p>		<p>▶ 가정 학습지 배부</p>
--	--	---	---------------------------------	--	--------------------

-1차시 가정 학습지-

단원명	VI. 도형의 성질 1. 삼각형의 성질 (4) 삼각형의 외심과 내심	반	이름
<p>1. 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점을 그 삼각형의 ( )이라고 하며 이 점으로부터 이 삼각형의 세 ( )에 이르는 거리는 같다.</p> <p>2. 다음 <math>\triangle ABC</math>에서 점 I는 내심이고 <math>\angle A=42^\circ</math>이다. <math>\angle BIC</math>의 크기는?</p>  <p>3. 오른쪽 그림에서 점 I는 <math>\triangle ABC</math>의 내심이고 <math>\angle IBC=42^\circ</math>, <math>\angle ICA=22^\circ</math> <math>\angle BAI</math>의 크기는?</p>  <p>4. 다음 <math>\triangle ABC</math>에서 I는 내심이다. <math>\angle x</math>의 크기를 구하여라.</p> <p>(1)  (2)  (3) </p> <p>(4)  (5) </p>			

## 감사의 글

2010년 6월. 벌써 교육대학원 5학기를 마무리하는 시기가 되었습니다.

학부 과정 4년, 교육대학원 과정 2년 반. 총 6년 반이라는 시간동안 성신여자대학교에서 선생님이 되기 위한 준비를 하였습니다. 이제 마지막 절차인 석사 학위 논문을 마치며 그동안 도움 주신 분들께 감사의 말씀을 전하려 합니다.

먼저 석사 학위 논문을 지도해주신 강병개 교수님께 깊은 감사의 말씀을 전합니다. 학교 수업과 교과서 편찬 작업 등 업무가 많으신데도 1년 반이라는 긴 시간동안 교수님의 다양하고 심도있는 지식과 많은 지도경험을 토대로 꼼꼼하게 지도를 해주셔서 이렇게 좋은 결과물을 얻고, 마무리할 수 있었습니다. 그리고 논문 심사 위원이시자 학부 과정 수업부터 대학원 과정 수업까지 좋은 가르침 주신 김주홍 교수님, 제가 조교로 있을 때 많이 챙겨 주시고 신경써주신 08-09년도 학과장님 심성아 교수님께 감사의 말씀을 전합니다.

다음으로 제가 학교 공부를 마칠 수 있게 물심양면으로 도움주신 부모님. 감사드립니다. 그리고 같은 길을 가고 있는 동기 언니들이 있어 대학원 생활을 하며 도움도 많이 받고, 동기부여도 되었습니다. 우리들의 맏언니 근애 언니, 소영언니, 지홍언니, 희정언니, 혜정언니, 유진언니, 민아언니 그리고 든든한 후배 성겸이, 유란이, 평생친구 유하, 예진이, 수민, 고운, 지선, 윤아 우리 앞으로 열정을 갖고 아이들을 가르치는 선생님이 되자!

2010년 6월 주 은 지