



저작자표시-동일조건변경허락 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



동일조건변경허락. 귀하가 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공했을 경우에는, 이 저작물과 동일한 이용허락조건하에서만 배포할 수 있습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

金 周 洪 教授指導
碩士學位 請求論文

옵션가격 결정모형에 대한
연구 : 이항 및
삼항나무모델의 수렴성

2011

誠信女子大學校 金融情報大學院
金融情報科 金融·保險專攻
張 有 廷

옵션가격 결정모형에 대한
연구: 이항 및
삼항나무모델의 수렴성

金 周 洪 教授指導

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

2010年 11月

誠信女子大學校
金融情報大學院金融情報科
金融·保險專攻
張 有 廷

認 准 書

張 有 廷의 碩士學位 論文을 認准함

審査委員 _____ 印

審査委員 _____ 印

審査委員 _____ 印

2010年 11月

誠信女子大學校 金融情報大學院

논문개요

본 논문은 옵션의 가격결정 모형인 CRR 이항나무, RB (또는 JR) 이항나무, CRR 삼항나무, $3\Delta t$ 삼항나무 모형의 블랙-숄즈 편미분방정식과 일치성(consistency)이 있음을 보이고 또한 푸리에 변환을 이용한 폰 노이만 분석을 통해 이항, 삼항나무 모형의 안전성(stability), 수렴성(convergence)과 수렴속도를 비교 분석한다. 마지막으로 수치적 계산을 통해 이항, 삼항나무 모형로 계산한 옵션가격은 블랙-숄즈 방정식의 해로 수렴함을 보인다.

목 차

논문 개요

I. 서 론	1
--------------	---

II. 본 론	4
---------------	---

1. 옵션의 정의	4
-----------------	---

(1) 옵션의 유래	4
------------------	---

(2) 옵션의 개념	5
------------------	---

(3) 옵션의 분류	7
------------------	---

(4) 옵션의 손익구조	7
--------------------	---

2. 옵션의 가격결정모델	9
---------------------	---

(1) 이항나무 모델	9
-------------------	---

(2) 블랙-숄즈 방정식 모델	17
------------------------	----

(3) 몬테카를로 시뮬레이션 모델	21
--------------------------	----

(4) 이항나무 모델과 기하학적 브라운운동	22
-------------------------------	----

3. 격자 모델에 대한 이해 및 구현	30
----------------------------	----

(1) 격자모델의 블랙-숄즈 방정식과의 관계	30
--------------------------------	----

(2) 삼항나무모델을 이용한 옵션 가격과 유한차분식	38
------------------------------------	----

(3) 격자모델의 수치적해의 블랙-숄즈 방정식의 해에의 수렴성	43
--	----

III. 결 론	48
----------------	----

참고문헌

ABSTRACT

I. 서론

마코위츠(Harry Markowitz)[18]가 1952년에 쓴 박사학위 논문인 '포트폴리오 선택(Portfolio Selection)'은 금융에 수학적 초석을 마련하였다. 그는 보통주(株)들에 대한 기대수익(expected return)과 위험(risk)으로 해석되는 표준편차(standard deviation)를 이용해 분산투자(diversification)의 개념을 수량화 하였다. 그는 위험의 크기가 주어졌을 때 최대의 기대수익을 내는 포트폴리오를 최적화시키는 방법을 보여 주었다. 지금은 금융이론에 확률미적분(stochastic calculus)이 사용되고 있고, 위험 관리가 현대 금융이론과 실제 계량금융의 기초 테마이다.

머튼(Robert Merton)[22]은 1969년에 확률미적분(stochastic calculus)을 금융이론 연구에 도입하였다. 머튼은 고전 경제학의 equilibrium의 문제인 금융시장에서 가격결정이 어떻게 이루어지는 지 이해하고 규명하기 위하여 확률미적분이라는 도구를 사용했다.

머튼의 연구와 동시에 블랙(Fisher Black)과 솔즈(Myron Scholes)[5]는 머튼의 도움을 받아 유명한 옵션가격 공식을 유도했다. 이 연구로 1997년에 노벨 경제학상을 받았다. 이 옵션가격 공식은 유럽형 콜옵션의 공정가격을 결정하는데 사용된다. 1979년부터 1983년 사이에 해리슨(Harrison), 크레프스(Kreps), 플리스카(Pliska)[13,14]는 연속 확률과정의 일반이론을 이용하여 블랙-솔즈 옵션가격 공식에 견고한 이론적 기반을 제공했고 이를 이용해 수많은 파생상품의 가격을 어떻게 결정 하는지를 보였다.

보일(Phelim Boyle)[8]은 옵션가격 결정을 랜덤 자산 경로의 시뮬레이션과 연관시켰다. 그는 가능한 미래 자산의 수많은 경로를 찾고 그 옵션의

이득을 평균함으로써 옵션의 공정가격을 결정하는 방법인 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation) 방법을 연구했다.

확률미적분을 이용하여 유도된 블랙-숄즈 식은 편미분방정식을 풀어야 하는 복잡함이 있지만 1979년에 콕스(John Cox), 로스(Stephen Ross), 루빈스타인(Mark Rubinstein)[10]은 사칙연산만을 사용하는 간단한 알고리즘을 이용하여 구할 수 있는 이항나무(Binomial Tree) 방법을 보여 주었다. 이항나무 방법은 옵션가격을 결정하는 정확하고 직관적으로 매력적인 도구이다. 이 방법은 기초자산의 시간적 변동에 따라 모델링된다. 이항나무 모델은 기하학적 브라운 운동의 근사모델이며 현재 자산가격이 S 일 때 Δt 시간간격 동안 오를 경우의 자산가격은 확률 p_u 로 S_u , 내릴 경우의 자산가격은 확률 p_d 로 S_d 라 가정하고 만들어진다. 이항나무 모델의 주요한 내용은 연속 과정을 랜덤 워크로 이산화한 것이고 위험중립세상에서 가격을 결정하는 것이다. 만기일까지 시간간격의 크기가 0이 되면 연속적인 자산가격의 변화를 나타낸다[29]. 초기자산가격이 주어지면 만기일까지 각 나무의 자산가격과 확률이 결정되고, 만기일의 옵션이득을 초기값으로 하고 역으로 계산하여 옵션 가격이 된다.

삼항나무 모델은 이항나무 모델과 비슷하며 Δt 시간 후의 자산가격의 변화는 각각 확률 p_u, p_m, p_d 로 S_u, S_m, S_d 라 가정하고 만들어진다. 이 모델은 보일(Boyle, 1986)에 의해 처음으로 소개되었고 이항나무 모델의 정밀성과 수렴속도를 증가시킨다.

논문[19]에서는 경로 종속인 추가 변수를 도입하여 유럽형 및 아메리칸형의 경로 종속적인 옵션에 대해 이항나무 방법이 편미분방정식 방법을 이용해 수렴함을 보여준다.

본 논문은 옵션의 가격결정 모형인 이항, 삼항나무 모델이 어떻게 유도

됨을 살펴보고 블랙-숄즈 편미분방정식과 일치성(consistency)이 있음을 보이며 또한 수렴성(convergence)과 수렴속도를 비교 분석한다. 폰 노이만 분석을 통해 격자모델의 안정성을 분석한다. 마지막으로 수치적 계산을 통해 이항, 삼항나무 모델로 계산한 옵션가격은 블랙-숄즈 방정식의 해로 수렴함을 보인다.

논문은 제 1장은 옵션의 정의를 다루고, 제 2장은 옵션의 가격결정모델을 소개하며 제 3장은 이항, 삼항나무 모델인 격자 모델에 대한 분석 및 구현으로 이루어져 있다.

Ⅱ. 본 론

1. 옵션의 정의

(1) 옵션의 유래

옵션거래의 시작은 17세기 경 네덜란드의 튜립 투기 붐이 일어나던 때부터 존재하게 되었다. 이와는 달리 아주 먼 그리스 시대부터 시작했다는 이야기도 전해지며 철학자 탈레스의 일화를 그 예로 들 수 있다.

그리스에 밀레투스 지역에는 탈레스라는 이름의 철학자가 있었다. 그는 매우 가난하였는데 주위에서는 이러한 그를 조롱하였다. 그런 조롱이 싫었던 탈레스는 자신의 가난은 스스로 선택한 것이라고 증명해 보이고 싶어 했다. 그러던 어느 날 탈레스는 점성술로 그 해의 날씨를 예측하여 올리브가 대풍작을 이루게 될 것이라고 예상을 하였다. 그는 올리브 열매가 열리기 전에 그 지역에 있는 모든 압착기 소유주에게 선금(옵션가격)을 주고 그가 필요할 때 언제든지 압착기를 빌릴 수 있는 권리를 샀다. 그리고 압착기를 실제로 빌리는데 필요한 대여금(행사가격)도 압착기 주민들과 협상을 통해 결정을 해 두었다. 마침내 올리브 수확기가 되었을 때 그가 예상한대로 올리브는 대풍작이 되었고 압착기 소유주들에게 미리 협상한 대여금을 지불하고 그 지역에 모든 압착기를 빌려 두었다. 올리브 생산자들은 엄청나게 수확된 올리브를 가공하기 위해 압착기가 필요했으나 압착기를 가지고 있는 사람은 오직 탈레스 한 사람뿐이었다. 탈레스는 자신이 지불

한 대여금보다 훨씬 높은 가격을 압착기 대여금으로 책정하여 놓았지만, 올리브 생산자들은 울며 겨자 먹기로 압착기를 빌릴 수밖에 없어 그 결과 탈레스는 막대한 돈을 벌고 그 이후로는 누구도 탈레스를 가난하다고 이야기하지 않았다.

또한 현대적 의미의 옵션거래는 네덜란드의 튜립 투기 붐이 일었던 17세기경이다. 1630년대에 네덜란드에서는 튜립재배가 유명하였고 많은 사람들이 튜립재배로 돈을 벌고 있었는데 작황에 따라 가격변동 폭이 커짐에 따라 재배 자들과 중개업자들은 안정적인 가격으로 거래하는 방법을 찾게 되었다. 이 때 옵션을 이용하게 되었는데 튜립을 매입할 중개인들은 콜(Call)을 매입함으로써 일정기간에 정해진 가격으로 튜립을 매입할 수 있게 되었고, 튜립 재배자는 풋(Put)을 매입함으로써 일정한 가격에 팔 수 있게 되었다.

주식을 대상으로 하는 옵션거래는 1690년대에 런던에서 최초로 시작되었고 그 후 뉴욕의 월가에서 점두거래 형태로 거래되던 19세기 말부터 현대적인 옵션거래로 발전하게 되었다.

(2) 옵션의 개념

옵션이란 선택할 수 있는 권리로 파생상품에서의 옵션은 이와 비슷한 개념으로 말하면 특정 대상물을 장래의 지정된 날 또는 그 이전에 일정한 가격으로 사거나 팔 수 있는 권리를 부여한 ‘선택권’을 매매하는 것이 옵션거래이다.

1) 콜 옵션 - 살 수 있는 권리(Call Option)

콜 옵션을 매수한 사람은 사전에 정한 가격(행사가격) 보다 높은 가격으로 시장에서 해당 상품이 거래 될 경우, 그 권리를 행사함으로써 싼 값에 상품을 구입할 수 있다. 그러나 해당 상품의 가격이 사전에 정한 가격보다 낮게 시장에서 형성되는 경우는 그 권리를 포기하거나 시장의 가격을 따를 수밖에 없다. 옵션은 권리이지 의무는 아니기 때문에 옵션을 매수하는 사람은 해당 옵션을 매도한 사람에게 일정한 구입의 대가를 지불해야 하는데 이를 ‘옵션 프리미엄’ 이라고 한다.

2) 풋 옵션 - 팔 수 있는 권리(Put Option)

풋 옵션을 매수한 사람은 사전에 정한 가격(행사가격)보다 낮은 가격으로 시장에서 해당 상품이 거래될 경우, 그 권리를 행사함으로써 비싼 값에 상품을 팔 수 있다. 그러나 해당 상품의 가격이 사전에 정한 가격보다 높게 시장에서 형성되는 경우에는 콜 옵션처럼 권리를 포기하고 시장의 가격을 따르는 것이 유리하다.

3) 옵션 매수자와 매도자

옵션 매수자는 콜(Call)과 풋(Put)의 구분이 없이 ‘선택권’이 있기 때문에 자신에게 유리한 경우에만 행사하고 불리하면 포기하는 것이 가능하다. 반면에 옵션 매도자는 옵션 매수자로부터 프리미엄을 받았기 때문에 권리 행사에 반드시 응해야 할 의무를 갖는다. 옵션의 매수자가 권리를 행사하지 않는 경우에는 옵션 매도자는 이미 받아둔 프리미엄이 이익이 되고, 권리를 행사하는 경우에는 손실을 책임질 수 있도록 하고 있다.

(3) 옵션의 분류

옵션은 기본적으로 상품을 정해진 가격에 살 수 있는 권리인 콜(Call) 옵션과 팔 수 있는 권리인 풋(Put) 옵션으로 구분하듯이 권리행사 가능시기, 기초자산에 따른 분류, 행사가격과 상품의 가격에 따른 구분 등으로 다시 분류할 수 있다.

1) 권리행사 가능시기에 따른 분류

옵션의 매수자가 권리를 만기일 이전에 아무 때나 행사할 수 있는 것과 만기일에만 행사할 수 있는 것에 따라 구분한다. 유럽형 옵션(European Option)은 권리행사를 만기일에만 행사가 가능한 옵션으로 우리나라 KOSPI 옵션이 해당 된다. 반면에 미국형 옵션(American Option)은 옵션의 만기일을 포함하여 그 이전에 언제라도 자신에게 유리하다면 권리의 행사가 가능한 옵션이다. 현물 옵션(Physical Option)은 현물을 기초자산으로 하는 옵션으로 일반적인 옵션이다. 선물 옵션(Futures Option)은 선물계약을 기초자산으로 하는 옵션으로 권리 행사시 선물계약이 유효해지는 옵션이다. 예를 들면 우리나라의 3년물 국제선물옵션으로 콜 옵션을 행사하는 경우 선물 매수 포지션이 생기게 된다.

(4) 옵션의 손익구조

옵션을 매수하는 목적은 이익의 가능성을 무한대로 열어두되 손실 폭을 일정한도(옵션의 프리미엄)로 제한하기 위한 것이다. 따라서 살 권리와 팔 권리인 콜(Call) 옵션과 풋(Put) 옵션에 따라 서로 다르며 다시, 콜 옵션의 경우 매수(Long)와 매도(Short)에 따라 손익이 달라지게 된다.

1) 콜 옵션 매수의 경우 (Long Call)

콜 옵션을 매수하는 경우 기초자산의 가격이 행사가격보다 클 경우 이익이 되며, 그 이익은 현물의 시장가격(최종정산가격)에서 행사가격을 뺀 차액만큼으로 된다. 반대로 현물가격이 행사가격보다 낮을 때에는 그 차액이 마이너스가 되더라도 이미 옵션 매수 시에 지급한 프리미엄으로 한정되기에 더 이상의 책임이 따르지 않는 것으로 한다.

2) 콜 옵션 매도의 경우 (Short Call)

콜 옵션을 매도한 사람을 다른 말로 콜 옵션 발행자라고도 하며, 해당 옵션을 매수한 사람으로부터 권리행사에 반드시 응해야 하는 의무의 대가로 옵션 프리미엄을 받게 된다. 이 경우 옵션의 행사가격보다 기초자산의 가격이 작아서 옵션을 행사하지 않는 경우 이미 받은 프리미엄이 이익이 되고, 반대로 기초자산의 가격이 행사가격보다 높아 매수자가 옵션을 행사하는 경우 현물가격에서 행사가격을 뺀 차액만큼 손실을 보는 손익구조로 되어 있다.

3) 풋 옵션 매수의 경우 (Long Put)

풋 옵션을 매수하는 경우 손익의 구조는 콜 옵션의 경우와 반대로 기초자산의 가격이 행사가격보다 작을 경우 이익이 되며, 그 이익은 행사가격에서 현물가격을 뺀 차액만큼이 된다. 반대로 현물가격이 행사가격보다 높을 때에는 콜 매수와 마찬가지로 풋 옵션 매수 시에 지급한 프리미엄으로 한정되기에 더 이상의 책임이 따르지 않는 것으로 한다.

4) 풋 옵션 매도의 경우 (Short Put)

풋 옵션을 매도한 사람은 콜 옵션 매도자처럼 해당 옵션을 매수한 사람

으로부터 권리행사에 반드시 응해야 하는 의무의 대가로 옵션 프리미엄을 받게 된다. 이 때 콜 옵션 매도와 차이는 옵션의 행사가격보다 기초자산의 가격이 클 경우 매수자가 옵션의 권리행사를 포기하게 되어 의무가 면제 되므로 이미 받은 프리미엄만큼 이익이 되고, 반대로 기초자산의 가격이 행사가격보다 낮아 매수자가 옵션을 행사하는 경우 행사가격에서 현물가격을 뺀 차액만큼 손실을 보는 손익구조로 되어 있다[1, 2, 3, 4].

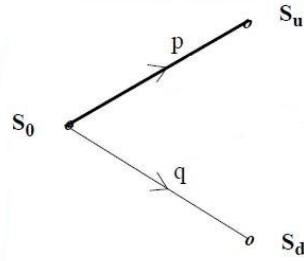
2. 옵션의 가격결정모델

옵션가격결정이론은 시장에서 형성되는 옵션 프리미엄에 해당하는 이론가를 산출하는 모델로서, 옵션가격결정요인에 대응하는 옵션가격을 결정하는 모델이다[15,26,27,28]. 지금까지 개발된 모형은 수십 가지가 넘지만 그중 가장 많이 쓰이는 모델로는 이항나무 모형, 블랙-숄즈 모형, 몬테카를로 시뮬레이션 모형 등이 있다. 블랙-숄즈 모형은 해석모형의 대표적인 모델로 전제하고 있는 가정을 하나씩 완화하여 일반화시킨 모형들과 주식시장 외에 선물시장, 외환시장, 금리시장 등에 확대 응용한 것으로 분류된다.

옵션가격을 구하기 위하여 수치제어 접근방법을 사용한 모형을 수치 모형이라 하는데 이러한 모형의 대표적인 것이 이항나무모형이다. 이 모형은 최적 근사치의 값을 얻을 때까지 반복계산을 하는 방식을 쓰고 있다.

(1) 이항나무 모델

가) 단일기간 모델



단일기간 이항나무모델에서 단일기간의 시작시간은 0, 끝시간을 1이라 하자. 약간 찌그러진 동전을 던졌을 때 앞면(H)이 나올 확률이 p , 뒷면(T)이 나올 확률이 $q=1-p$ 라 하자[25]. 시간 0에서의 주식가격을 S_0 , 시간 1에서의 주식가격을 동전을 던진 결과에 따라 $S_1(H)=S_u$, $S_1(T)=S_d$ 라 하자. 빌리는 이자율이나 대출 이자율 r 은 같다고 가정한다. 시간 1에서는 알 수 있고 시간 0에서 알 수 없는 어떤 결과를 ‘무작위적(random)이다’라고 말한다. 예를 들면 동전을 던져서 나온 결과는 무작위적 결과라고 할 수 있다. 차익거래(arbitrage)란 초기자금 0으로 시작하여 돈을 잃을 확률은 0이고 돈을 벌 확률이 양인 거래전략(trading strategy)을 말한다.

두 양수 u, d 를

$$u = \frac{S_1(H)}{S_0}, \quad d = \frac{S_1(T)}{S_0}$$

정의하고 항상 $u > d$ 를 만족한다고 가정하자. 또한 차익거래를 배제하기 위해서

$$0 < d < 1+r < u$$

라 가정하자. 주식가격은 양이어야 하므로 $d > 0$. 만약 $d \geq 1+r$ 이면 초기 자금 없이 은행에서 돈을 빌려 주식 1주를 산다. 시간 1에서 $S_1(H) = S_0 u > S_0 d = S_1(T)$ 이므로 어떠한 경우에도 빌린 돈을 갚고도 돈이 남아 차익거래가 생긴다. $u \leq 1+r$ 이면 주식을 공매한 돈 S_0 로 은행에 예금한다. 시간 1에서 $S_0 d = S_1(T) < S_0 u = S_1(H) \leq S_0(1+r) \geq S_0(1+r)$ 이므로 $S_0(1+r)$ 의 돈으로 시중에서 주식을 사서 공매를 청산하고도 돈이 남아 차익거래가 생긴다.

단일기간 이항나무모델에서 $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, 그리고 $r = \frac{1}{4}$ 라 하자. 그러면 $S_1(H) = 8$, $S_1(T) = 2$ 가 된다. 유로피언 콜옵션의 행사가격을 $K = 5$ 라 가정하자. 시간 0에서 초기자금 $X_0 = 1.20$ 을 가지고 주식 $\Delta_0 = \frac{1}{2}$ 주를 산다고 가정하자. 그러면 1주 가격이 4이므로 $\frac{1}{2}$ 주를 사기 위해서는 $X_0 - \Delta_0 S_0 = 1.2 - \frac{1}{2} \times 4 = -0.80$ 이므로 금융시장에서 0.8을 대출을 하면 시간 1에서 $(1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = \frac{5}{4} \times (-0.8) = -1$ 이 되므로 1을 갚아야 한다. 시간 1에서 주식과 금융시장으로 구성된 포트폴리오의 가치 X_1 은 동전을 던진 결과에 따라

$$X_1(H) = \frac{1}{2}S_1(H) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 4 - 1 = 3,$$

$$X_1(T) = \frac{1}{2}S_1(T) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 1 - 1 = 0$$

가 된다.

어떠한 경우에도 시간 1에서 포트폴리오의 가치는 옵션의 가치와 일치한다. 즉,

$$X_1(H) = 3 = (S_1(H) - 5)^+, \quad X_1(T) = 0 = (S_1(T) - 5)^+$$

식으로서 주식과 금융시장을 이용해 옵션의 가치를 복제(replicate)할 수 있다. 위와 같은 옵션을 판 사람은 주식이 오르는 경우 손해를 보게 되는 3의 위험(risk)을 없앨 수 있다(hedge). 옵션의 가치를 복제하는데 필요한 초기자금 $X_0 = 1.20$ 이 시간 0에서 콜옵션(행사가격 $K = 5$)의 공정가격이 된다.

만약 옵션가격이 1.21 (> 1.2)이라 가정하자. 옵션 매도자는 0.01을 금융시장에 투자하고 1.2로 헷지를 한다. 시간 1이 되면 헷지하고도 금융시장에 투자한 돈 $0.01 \times (1+r) = 0.125$ 가 남아 차익거래가 생긴다. 만약 옵션가격이 1.19 (< 1.2)라 가정하자. 이 경우에 옵션을 매입하면 차익거래가 생긴

다. 우선 $\frac{1}{2}$ 주를 공매(short selling)하여 $4 \times 1/2 = 2$ 의 돈을 만든다. 1.19로 옵션을 사면 0.81의 돈이 남는데 이 돈을 두개로 쪼개어, 즉 0.8과 0.01로 나누어 금융시장에 각각 투자한다. 시간 1에서 동전을 던진 결과가 H 라 하자. 공매를 청산하기 위해 $8 \times \frac{1}{2} = 4$ 의 돈이 필요하다. 또한 옵션을 행사하면 3의 이득이 생기고 금융시장에 투자한 0.8의 돈은 1로 불어난다. 이 돈 4로 공매 청산을 하고도 금융시장에 투자한 0.01의 돈이 남아 차익거래가 생긴다. 시간 1에서 T 이면 옵션의 가치는 0이고, 공매를 청산하기 위해 $4 \times \frac{1}{2} = 1$ 의 돈이 필요하다. 예금한 0.8은 1로 불어나므로 이것으로 공매를 청산하면 0.01의 돈이 남아 차익거래가 생긴다. 이 단일기간 이항모델을 만족하는 주식 S 를 기초자산으로 하는 행사가격 $K=5$ 인 유럽형 콜옵션의 공정가격(옵션 프리미엄)을 결정해 보자.

시간 0에서 콜옵션 1개를 매도하고 주식 Δ_0 주를 매입한 포트폴리오를 고려해 보자. 시간 1에서 동전을 던진 결과가 H 이면 주식의 가치는 $8\Delta_0$ 이고, 옵션의 가치는 $3(=(8-5)^+)$ 이므로 매도자의 포트폴리오의 가치는 $8\Delta_0 - 3$ 이다. 옵션매도자는 3을 손해를 보게 된다. 시간 1에서 동전을 던진 결과가 T 이면 주식의 가치는 $2\Delta_0$ 이고, 옵션의 가치는 $0(=(2-5)^+)$ 이므로 매도자의 포트폴리오의 가치는 $2\Delta_0$ 이다. 따라서 H 일 때 포트폴리오의 가치와 T 일 때 포트폴리오의 가치를 같게 하는 Δ_0 를 선택하면 이 포트폴리오의 위험이 없다. 즉, $8\Delta_0 - 3 = 2\Delta_0$ 에서 Δ_0 에 관해서 풀면 $\Delta_0 = \frac{1}{2}$ 가 된다.

시간 0에서 옵션의 가치를 V_0 라 하면 시간 0에서의 포트폴리오의 가치(또는 포트폴리오를 구성하는데 드는 비용은)

$$\Delta_0 \times S_0 - V_0 = \frac{1}{2} \times 2 - V_0 = 1 - V_0 \text{이다.}$$

차익거래가 존재하지 않을 때 무위험 포트폴리오의 수익률은 무위험이자율

이어야 한다. 시간 1에서의 포트폴리오 가치의 현재가치가 시간 0에서의 포트폴리오의 가치가 같아야 하므로

$$1 - V_0 = \frac{1}{1+r}(8\Delta_0 - 3) = \frac{4}{5} \times 1.$$

따라서 옵션의 가치는 $V_0 = 1.2$. 이것이 옵션가격이다.

일반적으로 오를 때와 내릴 때의 옵션의 가치를 각각 $V_1(H), V_1(T)$ 라 하면 시간 1에서의 포트폴리오의 가치는

$$-V_1(H) + \Delta_0 S_1(H) \text{ 또는 } -V_1(T) + \Delta_0 S_1(T) \text{가 된다.}$$

$$-V_1(H) + \Delta_0 S_1(H) = -V_1(T) + \Delta_0 S_1(T) \text{이 되는 } \Delta_0 \text{를 선택하면}$$

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{(u-d)S_0}.$$

따라서 시간 1에서의 포트폴리오 가치의 현재가치가 시간 0에서의 포트폴리오의 가치와 같게 하면

$$\Delta_0 S_0 - V_0 = \frac{1}{1+r}(-V_1(H) + \Delta_0 S_1(H)). \quad (2.1)$$

(2.1)식을 V_0 에 관해 풀면

$$\begin{aligned} V_0 &= \Delta_0 \left(S_0 - \frac{uS_0}{1+r} \right) + \frac{V_1(H)}{1+r} = \Delta_0 S_0 \left(1 - \frac{u}{1+r} \right) + \frac{V_1(H)}{1+r} \\ &= \frac{V_1(H) - V_1(T)}{u-d} \cdot \frac{1+r-u}{1+r} + \frac{V_1(H)}{1+r} \\ &= \frac{1}{1+r} \left(\frac{1+r-d}{u-d} V_1(H) + \frac{u-r-1}{u-d} V_1(T) \right) \\ &= (1+r)^{-1} (p^* V_1(H) + q^* V_1(T)). \end{aligned}$$

여기서 p^* 와 q^* 는 $p^* = \frac{1+r-d}{u-d}$, $q^* = \frac{u-r-1}{u-d}$ 이다.

$0 < d < 1+r < u$ 을 만족하면 $p^* > 0$, $q^* > 0$ 그리고 $p^* + q^* = 1$.

$r = \frac{1}{4}$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ 이면 위험 중립확률 p^* 와 q^* 는 $p^* = \frac{1}{2} = q^*$ 가 된다.

또한, $p^*u + dq^* = \frac{u(1+r-d)}{u-d} + \frac{d(u-r-1)}{u-d} = 1+r$ 이므로

$$\frac{1}{1+r}[p^*S_1(H) + q^*S_1(T)] = \frac{1}{1+r}[p^*uS_0 + q^*dS_0] = \frac{1}{1+r}[p^*u + q^*d]S_0 = S_0.$$

즉, $E^*[S_1] = (1+r)S_0$. 위험중립가정하에서는 이는 시간 1에서의 주식가격의 기대치는 현재 주식가격이 무위험이자율로 증가한 값이다.

리스크중립인 확률 $Q = (p^*, 1-p^*)$ 로 만기일 $T=1$ 에서 옵션의 기댓값을 구해보면 앞면이 나왔을 때의 가치는 $3(=(8-5)^+)$ 이고 내렸을 때의 가치는 $0(=(2-5)^+)$ 이므로

$$E^Q[\text{만기일 옵션가치}] = 3 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

가 된다.

$E^Q[\text{만기일 옵션가치}]$ 의 현재가치, 즉

$$(1+r)^{-1}E^Q[\text{만기일 옵션가치}] = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = 1.2$$

가 옵션가격이 된다.

이는 만기일에 옵션의 가치를 복제하는 포트폴리오의 초기자금 1.2와 일치함을 알 수 있다. 완성시장(complete market), 즉 파생상품의 완전 헷지가 가능한 시장에서는 리스크중립인 확률이 유일(제2자산가격정리)하기 때문에 옵션가격은 유일하게 결정된다. 제1자산가격정리(The first fundamental theorem of asset pricing)란 위험중립확률이 존재하는 시장 모델에서는 차익거래가 존재하지 않는다는 것을 말한다.

리스크 측면에서 살펴보면 유로피언 콜옵션 매도자(seller)는 매입자(buyer)가 옵션을 행사($S_1(H)=8$)하게 되면 $3(=8-5)$ 의 손실을 보게 되는 위험(risk)에 처하게 된다. 하지만 옵션 매입자의 가장 큰 손실은 지불한 옵션가격이다. 옵션매도자는 초기자금 1.2(옵션가격)를 가지고 노출된 위험을 헷지해야 한다. 옵션매도자는 이 초기자금 1.2을 이용하여 만기일에 현금과 주식으로 옵션의 가치를 복제하는(replicate) 포트폴리오(X_t) 구성이

가능하다.

$V_t = (S_t - K)^+$ 라 하면 시간 t 에서의 옵션의 가치가 된다. X_t 는 시간 t 에서의 옵션매도자가 구성한 포트폴리오의 가치다. $X_1(H) = V_1(H)$, $X_1(T) = V_1(T)$ 을 만족하는 초기자금 X_0 와 거래일 $t=0$ 에서 사야 할 주식 수 Δ_0 를 결정하려 한다.

$$\begin{aligned} X_1(H) &= V_1(H), \quad X_1(T) = V_1(T) \\ \Leftrightarrow \quad 8\Delta_0 + \frac{5}{4}(X_0 - 4\Delta_0) &= 3, \quad 2\Delta_0 + \frac{5}{4}(X_0 - 4\Delta_0) = 0. \end{aligned}$$

위 식을 풀면 $X_0 = 1.2$, $\Delta_0 = \frac{1}{2}$ 이 된다.

초기자금 X_0 와 거래일 $t=0$ 에서 산 주식수가 Δ_0 라 하면 현금 $X_0 - \Delta_0 S_0$ 가 남는다. 시간 1에서 주식과 현금으로 구성되는 포트폴리오의 가치는

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = (1+r)X_0 + \Delta_0(S_1 - (1+r)S_0).$$

이제 $X_1(H) = V_1(H)$, $X_1(T) = V_1(T)$ 을 만족하는 초기자금 X_0 와 Δ_0 를 선택하고자 한다.

첫 번째 식 $X_1(H) = V_1(H)$ 로부터

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_1(H) - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} V_1(H), \quad (2.2)$$

두 번째 식 $X_1(T) = V_1(T)$ 로부터

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} S_1(T) - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} V_1(T). \quad (2.3)$$

$p^* \times (2.2) + q^* (= 1 - p^*) \times (2.3)$ 하면

$$X_0 + \Delta_0 \left(\frac{1}{1+r} [p^* S_1(H) + q^* S_1(T)] - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} [p^* V_1(H) + q^* V_1(T)].$$

$$\text{여기서 } S_0 = \frac{1}{1+r} [p^* S_1(H) + q^* S_1(T)] \quad \left(\equiv \frac{1}{1+r} \mathbf{E}^{Q^*}[S_1] \right) \quad (2.4)$$

을 만족하는 p^* 을 선택하면

$$X_0 = \frac{1}{1+r} [p^* V_1(H) + q^* V_1(T)] \equiv \frac{1}{1+r} E^{Q^*} [V_1]. \quad (2.5)$$

(2.4)식으로 부터

$$S_0 = \frac{1}{1+r} [p^* u S_0 + q^* d S_0] = \frac{S_0}{1+r} [(u-d)p^* + d] \text{ 이므로}$$

$$p^* = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad q^* = \frac{u-1-r}{u-d}.$$

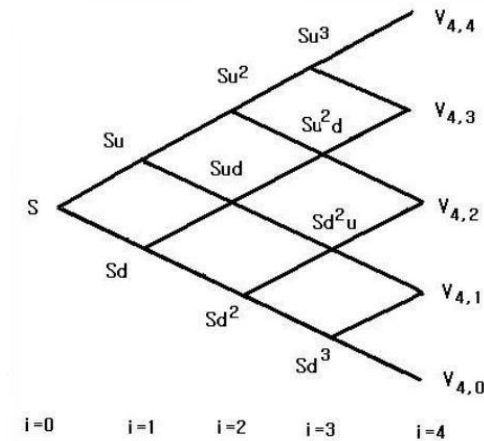
또한 (2.2)-(2.3)하면 사야할 주식수 Δ_0 는

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)}.$$

(2.5)의 현금만 있으면 완전 헷지가 가능하므로 이득이 V_1 인 옵션의 가격

은 $V_0 = \frac{1}{1+r} [p^* V_1(H) + q^* V_1(T)]$ 이어야 한다.

나) 다중기간 이항모델



$$V_{3,j} = \frac{1}{1+r} (p^* V_{4,j} + q^* V_{4,j+1}),$$

$$j = 0, 1, \dots, 3$$

위험중립세상에서 다중기간 이항모델에서 시간 n 에서 던진 동전의 결과가 $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$ 이고 그때의 자산가격이 $S_n(\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n)$ 이라 하면 위험중립확

률(risk-neutral probability) p^* , q^* 는 다음을 만족하는 확률을 선택한다.

$$S_n(\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n) = \frac{1}{1+r} [p^* S_{n+1}(\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n H) + q^* S_{n+1}(\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n T)].$$

여기서 $p^* = \frac{1+r-d}{u-d}$, $q^* = \frac{u-1-r}{u-d}$ 을 만족한다.

표기를 간단히 하기 위해서

$$\mathbf{E}_n^*[S_{n+1}](\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n) = p^* S_{n+1}(\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n H) + q^* S_{n+1}(\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n T)$$

라 정의하면

$$S_n = \mathbf{E}_n^*[S_{n+1}]. \quad (2.6)$$

$\mathbf{E}_n^*[S_{n+1}]$ 은 시간 n 까지의 정보하에 S_{n+1} 의 조건부 확률을 의미한다.

(2.6)식의 양변을 $(1+r)^n$ 으로 나누면

$$\frac{S_n}{(1+r)^n} = \mathbf{E}_n^* \left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right].$$

따라서 위험중립 세상에서는 시간 n 까지의 정보만을 가지고 시간 $n+1$ 에서 할인된 주식가격의 기댓값은 시간 n 에서의 할인된 주식가격임을 나타낸다.

(2) 블랙-숄즈 방정식 모형

옵션가격 결정 모형 중 가장 잘 알려지고 큰 비중을 차지하는 것은 1973년 블랙(Black Fischer)과 숄즈(Myron Scholes)에 의해 발표된 블랙-숄즈 옵션가격결정이론이라고 할 수 있다. 이 공식은 발표 후 금융상품 분야의 발전에 큰 공헌을 하였다. 그 이전의 연구가 객관적이지 못한 투입변수에 의해 결정되는 모형을 제시하여 실제상황에서 응용성이 없는 모형이었던 것과 달리, 블랙-숄즈 공식은 객관적인 독립변수를 사용한 모형을 제시함으로써 실제 시장에서 이용할 수 있는 유용한 결과를 제시하게 된 것이다.

블랙-숄츠의 옵션가격결정모형은 기초자산가격, 잔존만기, 행사가격, 변동성 등의 다섯 가지 변수에 의해 정형화 되었다. 이처럼 이 모델은 표준편차를 제외한 네 개의 결정변수에 대해 최소한으로 의지하고 있는 장점이 있어 학계나 투자자들에게 아직까지도 그 인기를 유지하고 있다. 다시 말해서 변동성(표준편차)을 제외한 네 개의 변수의 경우는 직접적으로 관측이 가능할 때 변동성(표준편차)의 추정이 가장 중요하다 하겠다.

옵션가격은 기초자산의 가격과 시간이 함수형태로 나타낼 수 있는데, 기초자산의 가격이 어떤 구체적인 확률적 과정을 따른다고 가정함으로써 옵션가격의 변화를 나타내는 식을 도출할 수 있다. 블랙-숄츠 모형의 출발점은 장래주가는 불확실 하지만 연속적으로만 변화한다면 기초자산의 매입과 콜옵션 매도포지션을 적절하게 혼합하여 무위험 포트폴리오를 만들 수 있고 그것의 수익률은 무위험시장 이자율과 같을 것이라는 이론이다.

파생상품의 가격결정문제를 논하기 위하여 기초자산과 무위험자산의 움직임에 대한 가정을 포함하여 다음과 같은 몇 가지 가정을 한다.

[가정1] 기초자산의 가격은 대수정규분포하며 기하학적 브라운운동(Geometric Brownian Motion)을 따른다.

[가정2] 기초자산의 배당금 지급은 없다. 배당금 지급이 미리 알려져 있는 경우 이 가정은 완화될 수 있다.

[가정3] 두 개의 자산들은 연속적으로 거래가 가능하다.

[가정4] 거래비용, 세금, 공매도(Short-selling)에 대한 제약이 없다.

[가정5] 차익거래 기회가 존재하지 않는다. 이는 무위험포트폴리오의 수익률은 무위험 이자율이어야 한다는 것을 의미한다.

[가정6] 기초자산의 가격과 금리의 변동가능성은 옵션의 잔존 기간 동안 일정하다.

옵션을 평가하는데 쓰인 블랙-숄즈 옵션가격결정이론을 식으로 나타내면 다음과 같다. S, K, σ, r 을 각각 기초자산가격, 옵션의 행사가격, 기초자산의 변동성, 무위험이자율이라 하고, $V = V(S, t)$ 를 옵션가격이라 하면

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

V 를 콜옵션가격이라 하면 초기값은 $V(S_T, T) = (S_T - K)^+$ 이고 그 해는

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2).$$

여기서 $N(x)$ 는 표준정규분포의 누적분포함수이고 d_1 은

$$d_1 = \left\{ \ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right\} / \sigma \sqrt{\tau}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}, \quad \tau = T - t.$$

만약 V 가 풋옵션의 가격이라 하면 초기값은 $V(S_T, T) = (K - S_T)^+$ 이고 그 해는

$$V(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1).$$

[가정1]에서 기초자산(S)이 기하학적 브라운운동(Geometric Brownian Motion)을 따른다는 가정은 기초자산의 가격 변화가 다음과 같은 확률과정(Stochastic Process)을 따른다는 것을 의미한다.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2.7)$$

여기서 μ 는 기초자산가격의 추세 변화율, σ 는 기초자산가격변화율의 표준편차를 나타내며, W 는 위너과정(Wiener Process)으로서 다음과 같은 특성을 갖는다.

$$dW_t = \epsilon \sqrt{dt}$$

ϵ 은 평균이 0이고 분산이 1인 표준정규분포이다. 즉 dW_t 는 평균이 0이고 분산이 dt 인 정규분포를 가지며, 시간에 대해 독립적이다. 위 식에 의하면 기초자산의 움직임이 결정적 요소와 확률적 요소로 구성됨을 알 수 있다. 블랙-숄즈 모형이 가장 매력적인 점은 옵션가격결정을 위한 변수가 기초자산의 변동성을 제외하고는 시장에서 쉽게 구할 수 있다는 점이다. 그러나 실제 시장에서는 동일한 기초자산을 가진 옵션이라도 만기와 행사가격에 따라 변동성이 변하기 때문에 변동성을 측정하는데 문제가 된다. 특히 블랙-숄즈 모형에서는 기하학적 브라운운동을 따른다고 가정하는데 이러한 동일한 기초자산을 가지는 옵션이 만기나 행사가격에 따라 가격이 다르다는 점은 실제로는 가격이 기하학적 브라운운동을 따르지 않는다고 할 수 있다

기하학적 브라운운동은 블랙-숄즈 옵션가격결정모형이나 확장된 모형의 가장 핵심적인 내용이다. 그러나 실제시장의 주가수익률은 정규분포를 가지지 않는다. 이는 주가수익률이 평균치에 가깝거나 변동이 클 가능성이 기하학적 브라운운동이 제시하는 것보다 더 크며, 주가 수익률 분포의 끝이 정규분포보다 두껍다는 것을 의미한다.

블랙-숄즈 모형은 주가변동이 식(2.7)를 따른다고 할 때 주식매입과 콜 옵션 매도를 적절하게 결합한 무위험 포트폴리오의 가치 변화식으로부터 옵션가치변동에 대한 미분방정식을 도출하여 얻어진 것이다. 이 미분방정식의 해석적 해를 얻기 위해서 위와 같은 가정을 사용했는데 이것의 블랙-숄즈 모형의 단점이 되기도 한다. 예를 들면 주가 움직임이 연속적이라는 가정은 주가가 갑작스런 폭락이나 폭등을 할 경우 모형을 적용할 수 없다. 또한 변동성이 일정하다는 가정은 시간이 경과함에 따라 변동성이 커지거나 작아지는 경우를 고려하지 않은 것이다. 또 무위험수익률은 옵션만기까

지 일정하다고 가정하는 등 여러 가지 약점이 있다.

이와 같은 블랙-숄츠의 옵션가격결정모형은 가정에 있어서 제약성이 존재함에도 불구하고 옵션가격을 다섯 개 변수에 의해 정형화하였다는 점에서 의외의 결과를 찾을 수 있다. 위의 모형에서 표준편차를 제외한 네 개 변수의 경우는 직접적으로 관찰이 가능하며 결국 표준편차의 추정만이 가장 중요한 과제가 된다.

(3) 몬테카를로 시뮬레이션 모델

몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation)[20]모델은 컴퓨터의 도움으로 확률변수의 장래를 예측하는 수치적 접근 방법이다. 확률론의 개척자들이었던 도박사들이 여러 번의 임의 추출을 바탕으로 특정한 카드의 조합이 나올 확률을 직접 계산했던 증세를 시초로 1949년 과학자 폰 노이만(John von Neumann)과 울란(Stanislaw Ulan)이 맨하튼 프로젝트의 하나인 미국의 원자폭탄 개발 계획에서 핵물리학 방정식을 푸는 과정에 일련의 난수를 반복적으로 방정식에 대입하는 방법으로 해를 구할 수 있음을 발견하게 되었고 이 비밀작업의 암호명을 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation)이라 칭하였다고 한다.

이는 고려할 요인이 아주 많고 또한 그 요인 중 불확실한 것이 있는 경우 종래의 수식적인 방법을 적용하기 어려운 경우에 유용한 수단으로 이용이 되고 있다. 특히 파생상품의 가격을 계산하는 경우 해를 구하는 것이 쉽지 않다. 따라서 금융이나 재무 쪽에서는 위험을 추정하거나 상품의 가격을 추정하는데 몬테카를로 시뮬레이션을 많이 이용하고 있다.

(4) 이항나무 모델과 기하학적 브라운운동

가) 브라운 운동(Brownian Motion)

(a) 대칭 랜덤워크(Symmetric Random Walk)

동전을 계속하여 던졌을 때 나타나는 결과를 $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \dots \omega_n \dots$ 로 나타내자. 여기서 ω_n 은 n 번째 동전을 던졌을 때의 결과이다. X_j 와 M_k 를 다음과 같이 정의하자.

$$X_j = \begin{cases} 1, & \omega_j = H \\ -1, & \omega_j = T \end{cases}$$

그리고 $M_0 = 0$, $M_k = \sum_{j=1}^k X_j$, $k=1,2,\dots$ 라 정의하자. 이 M_k , $k=0,1,2,\dots$ 를 대칭 랜덤워크(symmetric random walk)라 한다.

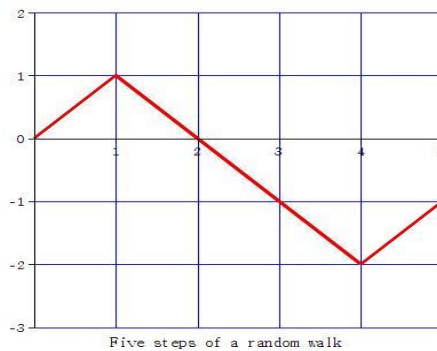


Fig. 2.1 대칭 랜덤워크 M_5

양의 정수 $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_m$ 이 존재하여 확률변수들 $M_{k_1} - M_{k_0}$, $(M_{k_2} - M_{k_1})$, \dots , $(M_{k_m} - M_{k_{m-1}})$ 이 독립(independent)일 때 이 확률변수들은 독립증분(independent increment)을 갖는다고 한다. 증분(increment)

$M_{k_{i+1}} - M_{k_i} = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j$ 은 시간 k_i 와 k_{i+1} 사이의 랜덤 워크의 위치 변화를 나타낸다. $M_{k_{i+1}} - M_{k_i}$ 의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mathbf{E}[M_{k_{i+1}} - M_{k_i}] = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} \mathbf{E}[X_j] = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} \left(1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\text{Var}(X_j) = \mathbf{E}[X_j^2] = 1^2 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\text{Var}(M_{k_{i+1}} - M_{k_i}) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} \text{Var}(X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} 1 = k_{i+1} - k_i.$$

(b) 축소된 대칭 랜덤워크(Scaled Symmetric Random Walk)

축소된 대칭 랜덤워크는 nt 가 정수이면

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt} \text{라 정의하고,}$$

nt 가 정수가 아니면 $s \leq t \leq u$ 을 만족하고 ns 과 nu 를 정수가 되게 하는 t 에 가장 가까운 s, u 를 선택하여

$$W^{(n)}(t) = (1-\lambda)W^{(n)}(s) + \lambda W^{(n)}(u), \quad \lambda = \frac{nt - ns}{nu - ns} = \frac{t-s}{u-s}$$

라 정의한다.

일반 랜덤워크와 같이 축소된 대칭 랜덤워크는 독립 증분을 가진다. 즉, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ 이고 nt_j 가 정수이면

$$\begin{aligned} & (W^{(n)}(t_1) - W^{(n)}(t_0)), (W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1)), \dots, \\ & (W^{(n)}(t_m) - W^{(n)}(t_{m-1})) \text{이 독립적이다.} \end{aligned}$$

예를 들면, 확률변수 $(W^{(100)}(0.2) - W^{(100)}(0))$ 는 처음 20번 던진 동전의 결과에 따라 값이 정해지며, $(W^{(100)}(0.7) - W^{(100)}(0.2))$ 는 그 다음 50번 던진 동전의 결과에 따라 값이 정해진다. ns 와 nt

($s \leq t$)가 정수라 하고 $W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)$ 의 평균과 분산을 구해보자.

$$W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s) = \frac{1}{\sqrt{n}}(M_{nt} - M_{ns}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=ns+1}^{nt} X_j \quad \text{이}$$

$$\text{므로 } \mathbf{E}[W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)] = 0,$$

$$\text{Var}[W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)] = \frac{1}{n} \sum_{j=ns+1}^{nt} \text{Var}(X_j^2) = \frac{1}{n}(nt - ns) = t - s \text{가}$$

된다.

$$\text{예를 들면, } \text{Var}[W^{(100)}(0.7) - W^{(100)}(0.2)] = \frac{1}{100} \cdot 50 = 0.5 \text{가 된다.}$$

또한 \mathcal{J}_s 를 s 까지의 모든 정보라고 하면

$$W^{(n)}(t) = (W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)) + W^{(n)}(s),$$

$$\mathbf{E}[W^{(n)}(t)|\mathcal{J}_s] = \mathbf{E}[W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)|\mathcal{J}_s] + \mathbf{E}[W^{(n)}(s)|\mathcal{J}_s] = 0 + W^{(n)}(s)$$

을 만족하므로 $W^{(n)}(t)$ 는 마틴게일이다.

$t \geq 0$ 이고, nt 가 정수라 하면 시간 t 까지 $W^{(n)}(t)$ 의 이차변분은

$$\begin{aligned} [W^{(n)}, W^{(n)}](t) &= \sum_{j=1}^{nt} \left(W^{(n)}\left(\frac{j}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{j-1}{n}\right) \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{nt} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} X_j \right)^2 = \sum_{j=1}^{nt} \frac{1}{n} = t \end{aligned}$$

이다.

$[W^{(n)}, W^{(n)}](t)$ 는 시간 t 까지의 경로에 따른 계산이며, $\text{Var}[W^{(n)}(t)] = t$ 이지만 모든 가능한 경로의 평균값으로 서로 차이가 있다.

이제 예를 들어 축척된 랜덤워크 $W^{(n)}(t)$ 의 확률을 구해보자. 시간 $t=0.25$ 일 때 $W^{(100)}(0.25) = \frac{1}{10} M_{25}$ 가 가질 수 있는 값들은 $nt = 100 \cdot 0.25 = 25$ 번 동전을 던졌을 때 나타날 수 있는 값을 말한다. 앞면이 25번이면 $M_{25} = 25$, 뒷면이 25번이면 $M_{25} = -25$, 앞면이 24번 뒷면이 1번이면 $M_{25} = 23$, 앞면이 23번 뒷면이 2번이면 $M_{25} = 21, \dots$, 앞면이 13번 뒷면이 12번이면 $M_{25} = 1, \dots$, 앞면이 1번 뒷면이 24번이면 $M_{25} = -23$ 이다. 따라

서, M_{25} 은 -25 와 25 사이의 홀수 정수를 취할 수 있으므로

$W^{(100)}(0.25)$ 는

$-2.5, -2.3, -2.1, \dots, -0.3, -0.1, 0.1, 0.3, \dots, 2.1, 2.3, 2.5$

의 값들을 취할 수 있다.

$W^{(100)}(0.25) = 0.1$ 이 되기 위해서는 25번 시행중 13번의 앞면 (+13)과 12번의 뒷면 (-12)이 나와야 한다. 따라서

$$P\{W^{(100)}(0.25) = 0.1\} = 25!/13!12!(1/2)^{25} = 0.1555.$$

그리고 $W^{(100)}(0.25)$ 의 평균과 분산은 각각

$$E[W^{(100)}(0.25)] = 0, \quad \text{Var}(W^{(100)}(0.25)) = 0.25.$$

아래 그림 2.1은 $W^{(100)}(0.25)$ 의 분포를 히스토그램으로 나타낸 것으로 평균이 0, 분산이 0.25인 정규분포로 수렴함을 알 수 있다.

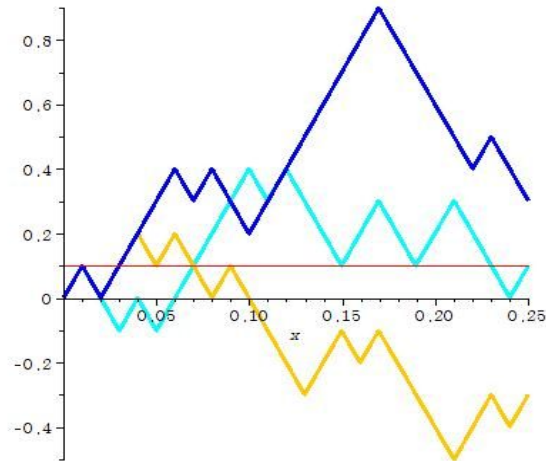


Fig. 2.1 $W^{(100)}(0.25)$ 의 그래프

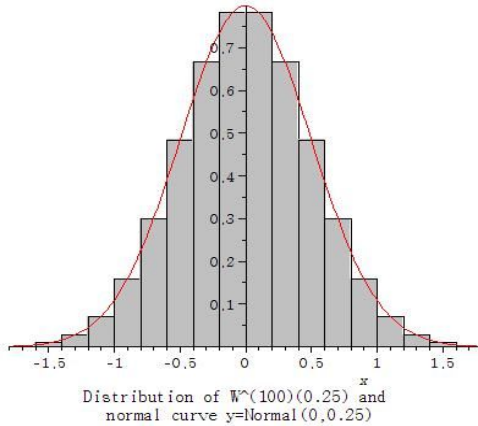


Fig. 2.2 $W^{(100)}(0.25)$ 의 분포

정의 2.1 적률함수(momemtum generating function) $M_X(t)$ 와 특성함수(characteristic function) $\varphi_X(t)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$M_X(t) = \mathbf{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x) dx,$$

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

또한, $\varphi_X(-it) = M_X(t)$ 의 관계가 있고,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt \quad (\text{Fourier Inversion Formula}).$$

예를 들어 표준정규분포 X 의 적률함수와 특성함수는 각각 $M_X(u) = e^{\frac{1}{2}u^2}$

이고 $\varphi_X(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}$.

정리 2.2 $t \geq 0$ 에 대해 n 이 커지면 $W^{(n)}(t)$ 의 분포는 평균이 0, 분산이 t 인 정규분포로 수렴한다.

증명) 표준정규분포의 확률밀도함수 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ 의 적률함수

(momentum generating function) $M(u)$ 는

$$\begin{aligned} M(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ux - \frac{x^2}{2t}\right) dx \\ &= e^{\frac{1}{2}u^2 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-ut)^2}{2t}\right) dx \\ &= e^{\frac{1}{2}u^2 t} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

또한 $M'(0) = E[X]$, $M''(0) = E[X^2]$ 임을 알고 있다. $W^{(n)}(t)$ 에 대한 적률함수 $M_n(u)$ 는

$$\begin{aligned} M_n(u) &= \mathbf{E}[e^{uW^{(n)}(t)}] = \mathbf{E}\left[\prod_{j=1}^{nt} \exp\left(\frac{u}{\sqrt{n}} X_j\right)\right] = \prod_{j=1}^{nt} \mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{u}{\sqrt{n}} X_j\right)\right] \\ &= \prod_{j=1}^{nt} \frac{1}{2} \left(e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}\right) = \left[\frac{1}{2} \left(e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}\right)\right]^{nt} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

를 취하고 극한을 취하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln M_n(u) &= t \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log[(e^{ux} + e^{-ux})/2]}{x^2} = t \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u[(e^{ux} - e^{-ux})/2]}{2x[(e^{ux} + e^{-ux})/2]} \\ &= \frac{t}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u[(e^{ux} - e^{-ux})/2]}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(e^{ux} + e^{-ux})/2} \\ &= \frac{t}{2} u^2. \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln M_n(u) = \frac{1}{2} u^2 t$ 가 된다. 즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(u) = e^{\frac{1}{2} u^2 t}$ 임을 보였다.

$\varphi_X(t) = e^{-t^2 x}$ 라 두면 푸리에 역공식에 의해서

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt$$

가 되어 $W^{(n)}(t)$ 의 분포는 평균이 0, 분산이 t 인 정규분포로 수렴한다.

(c) 이항나무 모델의 극한인 대수정규분포(Log-Normal Distribution)

시간 구간 $[0,1]$ 에서의 이항나무 모델의 극한은 블랙-숄즈 편미분방정식 유도에서 사용된 주식가격 변화의 모델인 기하학적 브라운 운동이 된다. nt 가 정수가 되게 t 와 n 을 선택한다고 가정하자. σ 는 양의 실수이다.

$u_n = 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $d_n = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 으로 잡으면 위험중립확률(risk-neutral probability)은 $r=0$ 이라 가정할 때 다음과 같다.

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d_n}{u_n-d_n} = \frac{\sigma/\sqrt{n}}{2\sigma/\sqrt{n}} = 1/2, \quad \tilde{q} = \frac{u_n-1-r}{u_n-d_n} = 1/2.$$

시간 t 에서의 주식가격(stock price)은 초기주식가격 S_0 와 nt 번의 동전을 던졌을 때 나타나는 결과들에 의해 결정된다.

H_{nt} 를 nt 번 중 앞면이 나온 횟수, T_{nt} 를 nt 번 중 뒷면이 나온 횟수라 하면

$$nt = H_{nt} + T_{nt}. \quad (2.8)$$

그러면 랜덤워크 M_{nt} 는

$$M_{nt} = \sum_{j=1}^{nt} X_j = H_{nt} - T_{nt} \text{가 된다.} \quad (2.9)$$

(2.8)와 (2.9)로 부터 $H_{nt} = \frac{1}{2}(nt + M_{nt})$, $T_{nt} = \frac{1}{2}(nt - M_{nt})$ 로 나타내어진다. 오름 요소가 u_n , 내림 요소가 d_n 인 모델에서 시간 t 에서의 주식가격(stock price)은

$$S_n(t) = S_0 u_n^{H_{nt}} d_n^{T_{nt}} = S_0 \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{(nt+M_{nt})/2} \left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{(nt-M_{nt})/2} \quad (2.10)$$

로 표현되어짐을 쉽게 알 수 있다.

정리 2.3 식(2.10)의 $S_n(t)$ 는 n 이 커짐에 따라

$$S(t) = S_0 \exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}$$

로 수렴한다. 단, $W(t)$ 는 평균이 0, 분산이 t 인 정규분포를 하는 브라운운

동이다.

증명) $f(x) = \ln(1+x)$ 를 $x_0 = 0$ 근방에서 테일러 전개하면

$$\ln(1+x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + O(x^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3).$$

따라서

$$\ln\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2}),$$

$$\ln\left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2}) \quad \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \ln S_n(t) &= \ln S_0 + \frac{1}{2}(nt + M_{nt})\ln\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}(nt - M_{nt})\ln\left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \ln S_0 + \frac{1}{2}(nt + M_{nt})\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(nt - M_{nt})\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right) \\ &= \ln S_0 + nt\left(-\frac{\sigma^2}{2n} + O(n^{-3/2})\right) + M_{nt}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + O(n^{-3/2})\right), \quad W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}M_{nt} \\ &= \ln S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + O(n^{-1/2}) + \sigma W^{(n)}(t) + O(n^{-1})W^{(n)}(t). \end{aligned}$$

따라서 n 을 무한대로 보내고 $W(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{(n)}(t)$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln S_n(t) = \ln S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W(t).$$

$$\text{그러므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = S(t) = S_0 \exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}.$$

정리 2.3은 이항나무 모델의 극한은 기하학적 브라운운동임을 나타내며 이 식은 블랙-숄즈 편미분방정식의 기초자산의 가격에 대한 [가정1]이 말하는 미래 자산가격은 대수정규분포(Log-Normal Distribution)를 따른다는 것과 일치한다.

3. 격자 모델에 대한 이해 및 구현

(1) 격자모델의 블랙-숄즈 방정식과의 관계

이항나무 모델의 자산변동은 기하학적 브라운운동의 근사(approximation)이므로 짧은 시간간격 Δt 동안 현재 자산가격이 S 가 $S_u = Su$ 로 오르고 $S_d = Sd$ 로 내리는 두 가지 경우를 가정한다. S_u 로 오를 때의 전이확률(transition probability)을 p_u 라 하면 S_d 로 내릴 때의 전이확률은 $p_d = 1 - p_u$ 가 된다. 이항나무 모델이 수렴하기 위해서 다음과 같은 조건들을 가정한다.

- (i) 점프(jump)는 자산가격의 크기와는 독립적이다.
- (ii) 이항분포의 평균은 대수정규분포의 평균과 같다.
- (iii) 이항분포의 분산은 대수정규분포의 분산과 같다.
- (iv) 확률 p_u 와 p_d 는 $0 < p_u < 1$, $0 < p_d < 1$ 이어야 한다.

자산가격이 대수정규분포(lognormal distribution)을 따른다고 가정하면 평균과 분산은 각각

$$E(S_{\Delta t}) = Se^{r\Delta t}, \quad \text{Var}(S_{\Delta t}) = S^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)$$

이므로 가정으로부터

$$S_u p_u + S_d p_d = Se^{r\Delta t} \Rightarrow up_u + dp_d = e^{r\Delta t}, \quad (3.1)$$

$$S_u^2 p_u + S_d^2 p_d - (Se^{r\Delta t})^2 = S^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)$$

$$\Rightarrow u^2 p_u + d^2 p_d = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}, \quad (3.2)$$

$$p_u + p_d = 1, \quad 0 < p_u, p_d < 1. \quad (3.3)$$

네 개의 미지수 u, d, p_u, p_d 에 세 개의 식이 존재함으로 $u=1/d$ 의 조건을 추가하면 모든 미지수를 구할 수 있다.

(3.3)식을 (3.1)식에 대입하여 p_u 에 관해 풀면

$$p_u = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (3.4)$$

이다. (3.2)식으로부터

$$e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} = u^2 p_u + d^2 p_d = (p_u u + p_d d)u + (p_u u + p_d d)d - ud. \quad (3.5)$$

(3.1)식을 (3.5)식에 대입하여 정리하면

$$u + \frac{1}{u} = e^{(r+\sigma^2)\Delta t} + e^{-r\Delta t} = 2 + \sigma^2 \Delta t + O(\Delta t^2).$$

근의 공식을 이용해 u 에 관해 풀면

$$u = 1 + \sigma \sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}(\sigma \sqrt{\Delta t})^2.$$

$\Delta t^{3/2}$ 이상인 항들을 무시하면

$$u = 1 + \sigma \sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}(\sigma \sqrt{\Delta t})^2 + O(\Delta t^{3/2}) = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}}$$

로 나타낼 수 있다. 조건 $u=1/d$ 는 자산가격이 오르고 내리든지, 내리고 오르든지 하면 본래 가격으로 되돌아오는 역할을 하며 꼭 이런 조건일 필요는 없다. 위에서 구한 p_u, u, d 를 만족하는 모델이 콕스, 로스, 루빈스타인 모델(CRR)이다[10]. 또한 $p_u = 1/2 = p_d$ 라 두고 식 (3.1), (3.2), (3.3)을 만족하는 u, d 를 구하면 $O(\Delta t^{3/2})$ 의 오차를 무시하면

$$u = e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}},$$

$$d = e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t}}$$

가 된다. 이것을 랜들만-바터(Rendleman-Bartter, RB) 모델이라 한다 [17,21]. 또한 RB모델은 위험중립세상에서 주식가격 S 가 기하학적 브라운

운동

$$\frac{dS_t}{S} = rdt + \sigma dW_t$$

을 따른다는 조건으로부터 구할 수 있다. 이또 보조정리에 의해 기하학적 브라운 운동은

$$d\ln(S_t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t$$

로 변환된다. 따라서 양변을 적분하면

$$\ln(S_t/S_0) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t.$$

그러므로 $E[\ln(S_t/S_0)] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$, $Var(\ln(S_t/S_0)) = \sigma^2 t$ 가 된다.

R 을 기간 $(0, t)$ 동안의 연속복리 수익률이라 하면

$$S_t = S_0 e^{Rt}.$$

따라서 $Rt = E[\ln(S_t/S_0)] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ 이므로 $R = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ 가 된다. $S_u/S = u$,

$S_d/S = d$ 이므로

$$p_u \ln(u) + p_d \ln(d) = E[\ln(S_{\Delta t}/S)] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t,$$

$$\begin{aligned} p_u^2 \ln(u) + p_d^2 \ln(d) - (p_u \ln(u) + p_d \ln(d))^2 &= (1 - p_u)p_u (\ln(u) - \ln(d))^2 \\ &= Var[\ln(S_{\Delta t}/S)] = \sigma^2 \Delta t. \end{aligned}$$

위의 두 식을 $p_u = 1/2 = p_d$ 라 두고 u, d 에 관해 풀면

$$u = e^{(r - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{(r - \sigma^2/2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

가 된다.

Δt 에 관해 테일러 전개를 하면 다음과 같다.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{3/2}),$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{3/2}),$$

$$\begin{aligned}
p_u &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{1}{2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} + O(\Delta t^{3/2}), \\
p_d &= 1 - p_u = \frac{1}{2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\sqrt{\Delta t}}{2\sigma} + O(\Delta t^{3/2}), \\
p_u(u-1) + p_d(d-1) &= r\Delta t + O(\Delta t^2), \\
p_u(u-1)^2 + p_d(d-1)^2 &= \sigma^2\Delta t + O(\Delta t^2).
\end{aligned}$$

정의 3.1 $Pu = f$ 가 주어진 편미분방정식(partial differential equation)이고 $P_{\Delta t, \Delta x}v = f$ 가 주어진 유한 차분식(finite difference scheme)이라 하자. 만약 $\phi(S, t)$ 가 무한번 미분이 가능한 매끄러운 함수(smooth function)에 대해

$$\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0 \text{ 이면 } P\phi - P_{\Delta t, \Delta x}\phi \rightarrow 0$$

을 만족하면 유한차분식은 편미분방정식과 일치성이 있다(consistent)라고 한다.

1단계 콕스-로스-루빈스타인(CRR) 이항나무 방법을 고려하자. $\Delta t = T/N$ 이라 하고 $V^n(S)$ 를 자산가격 S 와 시간 $n\Delta t$ 에서의 옵션가격이라 하자. 그러면

$$V^n(S) = e^{-r\Delta t} [p_u V^{n+1}(Su) + p_d V^{n+1}(Sd)]. \quad (3.6)$$

이제 $P_{\Delta t, \Delta S}\phi$, $F_{\Delta t}\phi(S, t)$, $P\phi$ 를 각각 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned}
P_{\Delta t, \Delta S}\phi &= \frac{F_{\Delta t}\phi(S, t) - \phi(S, t)}{\Delta t}, \\
F_{\Delta t}\phi(S, t) &= e^{-r\Delta t} [p_u \phi(Su, t + \Delta t) + p_d \phi(Sd, t + \Delta t)], \\
P\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial S^2} + rS \frac{\partial \phi}{\partial S} - r\phi = 0.
\end{aligned} \quad (3.7)$$

$\phi(Su, t + \Delta t)$, $F_{\Delta t}\phi(S, t)$ 를 $(S, t + \Delta t)$ 근방에서 테일러 전개하면

$$\phi(Su, t + \Delta t) = \phi(S, t + \Delta t) + \frac{\partial \phi(S, t + \Delta t)}{\partial S} (u-1)S$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(S, t + \Delta t)}{\partial S^2} (u-1)^2 S^2 + \dots \\
F_{\Delta t} \phi(S, t) &= e^{-r\Delta t} \left[(p_u + p_d) \phi(S, t + \Delta t) + S \frac{\partial \phi(S, t + \Delta t)}{\partial S} \{p_u (u-1) + p_d (d-1)\} \right. \\
& \quad \left. + \frac{S^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(S, t + \Delta t)}{\partial S^2} p_u (u-1)^2 + p_d (d-1)^2 \} + \dots \right] \\
&= (1 - r\Delta t) \left[\phi(S, t + \Delta t) + S \frac{\partial \phi(S, t + \Delta t)}{\partial S} (r\Delta t + O(\Delta t^2)) \right. \\
& \quad \left. + \frac{S^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(S, t + \Delta t)}{\partial S^2} (\sigma^2 \Delta t + O(\Delta t^2)) + \dots \right] \\
&= \left[\phi(S, t + \Delta t) + r\Delta t S \frac{\partial \phi(S, t + \Delta t)}{\partial S} + \Delta t \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(S, t + \Delta t)}{\partial S^2} + O(\Delta t^2) + \dots \right] \\
& \quad - r\Delta t \phi(S, t + \Delta t).
\end{aligned}$$

$$F_{\Delta t} \phi - \phi \approx$$

$$\begin{aligned}
F_{\Delta t} \phi - \phi &= \phi(S, t + \Delta t) - \phi(S, t) + r\Delta t S \frac{\partial \phi(S, t)}{\partial S} \\
& \quad + \Delta t \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(S, t)}{\partial S^2} - r\Delta t \phi(S, t) + O(\Delta t^2) \dots
\end{aligned}$$

와 같이 표현되므로 $P_{\Delta t, \Delta S} \phi = P\phi + O(\Delta t)$ 가 된다.

따라서 다음 정리가 성립한다.

정리 3.2 이항나무 방법 (3.6)은 그에 대응하는 포물선 편미분 방정식 (3.7)과 일치성이 있다.

$V(x, t + \Delta t)$ 를 (x, t) 근방에서 테일러 전개하면

$$V(x, t + \Delta t) = V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots \text{이므로}$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \frac{V(x, t + \Delta t) - V(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

마찬가지로 계산하면

$$V(x + \Delta x, t) = V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + O(\Delta x^3), \quad (3.8)$$

$$V(x - \Delta x, t) = V(x, t) - \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + O(\Delta x^3). \quad (3.9)$$

(3.8)식에서 (3.9)식을 빼고 정리하면

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = \frac{V(x + \Delta x, t) - V(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x).$$

(3.8)식과 (3.9)식을 더하고 정리하면

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = \frac{V(x + \Delta x, t) - 2V(x, t) + V(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x).$$

블랙-숄즈 편미분 방정식 (3.7)에서 $\phi = V$ 라 두고 변수변환 $x = \ln S$ 를 하면

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0. \quad (3.10)$$

$V_j^n = V(e^{j\Delta x}, n\Delta t)$ 라 하고 (3.10)식을 유한 차분식으로 나타내면

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{V_{j+1}^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} - rV_j^n = 0.$$

위의 식을 V_j^n 에 관해 정리하면

$$V_j^n = \frac{1}{1+r\Delta t} \left[\left(1 - \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2}\right) V_j^{n+1} + \left(\frac{\sigma^2 \Delta t}{2\Delta x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) V_{j+1}^{n+1} + \left(\frac{\sigma^2 \Delta t}{2\Delta x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) V_{j-1}^{n+1} \right]. \quad (3.11)$$

(3.11)에서 $1 - \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2} = 0$ 이라 두면 $\frac{\sigma^2 \Delta t}{2\Delta x^2} = \frac{1}{2}$ 이고 $\frac{\Delta t}{2\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}$ 이므로

$$\begin{aligned} V_j^n &= \frac{1}{1+r\Delta t} \left[\left(\frac{1}{2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}\right) V_{j+1}^{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}\right) V_{j-1}^{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{1+r\Delta t} [p_u V_{j+1}^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}] = e^{-r\Delta t} [p_u V_{j+1}^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}] + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

가 된다. 따라서 다음의 정리가 성립한다.

정리 3.3 이항나무 방법 (3.6)은 $O(\Delta t^2)$ 의 오차로 유한차분식 (3.12)와 대

등하다(equivalent).

$u: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ 인 적분가능한 함수라 하자. u 의 푸리에 변환(Fourier transform) \hat{u} 는

$$\hat{u}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} u(x) dx$$

로 정의된다. 또한 푸리에 역 변환 공식(Fourier Inversion Formula)은

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} \hat{u}(\theta) d\theta$$

로 정의된다.

격자 함수(grid function)는 격자점에서 정의된 함수를 말한다. 격자 간격이 h 인 격자점에서 정의된 격자 함수 $v = (\dots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots)$ 에 대한 푸리에 변환과 푸리에 역변환 공식은

$$\hat{v}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-imh\theta} v_m h, \quad v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\theta} \hat{v}(\theta) d\theta.$$

정의 3.4 (L^2 -노름) 격자 간격이 h 인 격자점에서 정의된 격자 함수 $v = (\dots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots)$ 와 $u: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ 인 적분가능한 함수에 대해

$$\|v\| = \left(h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m|^2 \right)^{1/2}, \quad \|u\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

로 정의된다.

$$V_j^n \text{을 유한차분식 } V_j^n = \frac{1}{1+r\Delta t} [p_u V_{j+1}^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}] \quad (3.13)$$

의 해라고 하자. 그러면 (3.13)식에 푸리에 역변환 공식

$$V_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ijh\theta} \hat{V}^n(\theta) d\theta, \quad h = \Delta x \text{을 적용하여 정리하면}$$

$$\hat{V}^n(\theta) = \frac{1}{1+r\Delta t} (p_u e^{ih\theta} + p_d e^{-ih\theta}) \hat{V}^{n+1}(\theta) \text{이 된다.}$$

또한 $g(h\theta) = \frac{1}{1+r\Delta t}(p_u e^{ih\theta} + p_d e^{-ih\theta})$ 라 두면 $\hat{V}^n(\theta) = g(h\theta)\hat{V}^{n+1}(\theta)$ 가 된다.

$\hat{V}^n(\theta) = g(h\theta)\hat{V}^{n+1}(\theta) = g(h\theta)^2\hat{V}^{n+2}(\theta) = \dots = g(h\theta)^{N-n}\hat{V}^N(\theta)$ 의 관계식을 만족한다. 일반적으로 $\hat{V}^n(\theta) = g(\Delta x\theta, \Delta t, \Delta x)^{N-n}\hat{V}^N(\theta)$ 의 관계식을 만족하며 $g(\Delta x\theta, \Delta t, \Delta x)$ 를 증폭 요소(amplification factor)라 한다.

정리 3.4 (파스발 정리(Parseval Theorem))

$$\|u(x)\| = \|\hat{u}(\theta)\|, \quad \|\hat{v}\| = \|v\|.$$

여기서 $\|\hat{v}\|^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}(\theta)|^2 d\theta$.

$$\|V^n\|^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{V}^n(\theta)|^2 d\theta = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |g(h\theta)|^{2(N-n)} |\hat{V}^N(\theta)|^2 d\theta \text{이므로 } |g(h\theta)|^2 \leq 1 \text{이}$$

면 파스발의 정리에 의해

$$\|V^n\|^2 \leq \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{V}^N(\theta)|^2 d\theta = \|\hat{V}^N\|^2 = \|V^N\|^2.$$

유한차분식의 해 V^n 의 L_2 -노름은 초기값 V^N 의 L_2 -노름보다 항상 같거나 작게 되어 V^n 의 값은 안정적이 된다.

정의 3.5 (안정성(Stability)) 다음 조건

$$|g(\Delta x\theta, \Delta t, \Delta x)| \leq 1 + K\Delta t$$

을 만족하는 θ , Δt , Δx 와 독립적인 상수 K 가 존재하면 상수 계수를 가진 1단계 유한차분식이 안정적(stable)이라고 한다.

$|g(h\theta)| \leq 1$ 인지를 알아보면

$$\begin{aligned} |g(h\theta)|^2 &= \frac{1}{(1+r\Delta t)^2} |(p_u e^{ih\theta} + p_d e^{-ih\theta})|^2 \\ &= \frac{1}{(1+r\Delta t)^2} |(p_u \cos(h\theta) + p_d \cos(h\theta)) + i(p_u \sin(h\theta) - p_d \sin(h\theta))|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1+r\Delta t)^2} \{p_u^2 + p_d^2 + 2p_u p_d (2\cos^2(h\theta) - 1)\} \\
&= \left| \frac{1 + \alpha^2 \Delta t}{4(1+r\Delta t)^2} + \frac{1 - \alpha^2 \Delta t}{2(1+r\Delta t)^2} (2\cos^2(h\theta) - 1) \right|.
\end{aligned}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ 일 때 $|g(h\theta)|^2 \rightarrow \left| \cos^2(h\theta) - \frac{1}{4} \right| \leq 1$ 이므로 Δt 가 충분히 작으면 $|g(h\theta)| \leq 1$ 이 되게 할 수 있다.

여기서 $p_u = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\Delta t}$, $p_d = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \sqrt{\Delta t}$, $\alpha = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$.

따라서 Δt 를 작게 잡으면 유한차분식 (3.12)는 안정적이다.

정의 3.6 (잘 제기된(well-posed) 문제) 편미분방정식의 초기값 $u(T, x)$ 문제가 잘 제기되었다(well-posed)란 것은 어떠한 해 $u(t, x)$ 가

$$\|u(t, x)\| \leq C_T \|u(T, x)\|, \quad 0 \leq t \leq T$$

를 만족하는 상수 C_T 가 존재하는 것이다.

정리 3.7 (락스의 대등정리(Lax's equivalence theorem)[8]) 잘 제기된 선형 초기값 편미분방정식을 근사하는 유한차분식이 안정적(stable)이고 일치성(consistent)이 있을 필요충분조건은 수렴한다(convergent)는 것이다.

락스의 대등정리에 의해 이항나무모델 (3.6)은 Δt 를 적당히 작게 잡으면 수렴한다.

(2) 삼항나무모델을 이용한 옵션 가격과 유한차분식

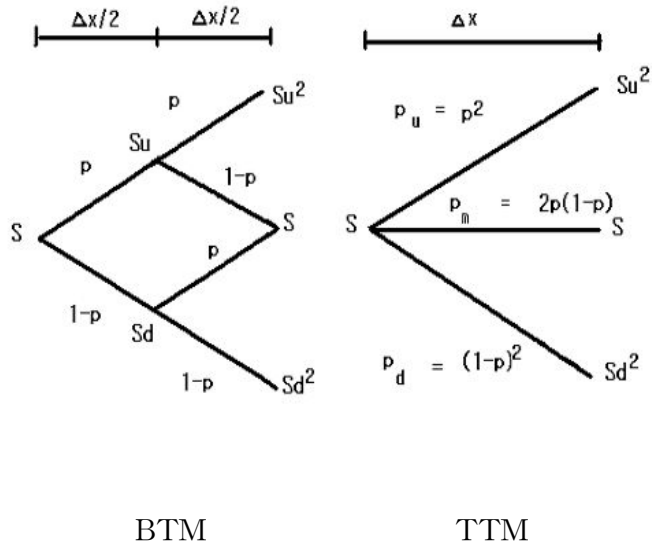
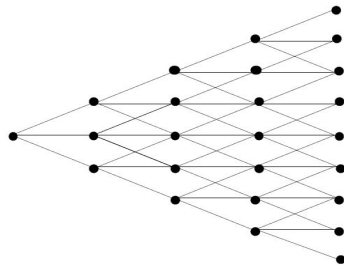


Fig. 3.1 CRR-BTM과 CRR-TTM의 관계

삼항나무 방법(TTM)은 이항나무모델(BTM)의 확장이며 개념적으로 비슷하다. 현재 자산가격이 S 일 때 Δt 기간 후의 자산가격이 S_u, S_m, S_d 라 하면 $S_u = Su, S_m = Sq, S_d = Sd$ 라 가정한다. 보통 $0 < d < q < u$ 의 조건을 만



족한다. 시간 Δt 에서의 자산가격이 S_u 일 때의 확률은 p_u , 자산가격이 S_q 일 때의 확률은 p_q , 자산가격이 S_d 일 때의 확률은 p_d 라 한다. 단지 세 가지 경우만 있기 때문에 확률들은 다음을 만족해야 한다.

$$p_u + p_m + p_d = 1, \quad 0 \leq p_u, p_m, p_d \leq 1$$

자산가격이 대수정규분포(lognormal distribution)를 따른다고 가정하면

평균과 분산은 각각

$$E(S_{\Delta t}) = Se^{r\Delta t}, \quad Var(S_{\Delta t}) = S^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1).$$

따라서

$$S_u p_u + S_m p_m + S_d p_d = Se^{r\Delta t} \quad \Rightarrow \quad u p_u + q p_m + d p_d = e^{r\Delta t}. \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} S_u^2 p_u + S_m^2 p_m + S_d^2 p_d - (Se^{r\Delta t})^2 &= S^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1) \\ \Rightarrow u^2 p_u + q^2 p_m + d^2 p_d &= e^{(2r + \sigma^2)\Delta t}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

여섯 미지수에 세 식이 존재한다. 조건 $q=1$, $u=1/d$ 를 추가하더라도 식의 개수보다 미지수의 개수가 더 많다. 이는 경제적 의미가 있는 삼항나무 방법이 많이 있을 수 있다는 것을 의미한다. 삼항나무 방법은 보일(Phelim Boyle)에 의해 처음 소개되었고 이항나무보다 빠르게 수렴한다. CRR 이항나무 모델에서 2단계 시간 단계를 적용하면 삼항나무 1단계 모델을 만들 수 있다.

그림 3.1으로부터 삼항나무방법의 오름 요소 u , 내림요소 d 는 각각

$$\begin{aligned} u &= (e^{\sigma \sqrt{\Delta t/2}})^2 = e^{\sigma \sqrt{2\Delta t}}, \quad q=1, \quad d = (e^{-\sigma \sqrt{\Delta t/2}})^2 = e^{-\sigma \sqrt{2\Delta t}} \text{이며,} \\ p &= \frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma \Delta t/2}}{e^{\sigma \Delta t/2} - e^{-\sigma \Delta t/2}}, \quad p_u = p^2, \quad p_m = 2p(1-p), \quad p_d = (1-p)^2. \end{aligned}$$

CRR 삼항나무방법의 1단계(시간 간격은 Δt)는 이항나무방법의 2단계(시간 간격은 $\Delta t/2$)와 같다. 그러므로 삼항나무방법은 이항나무방법의 시간간격의 수보다 그 반만 함으로써 같은 정밀성(accuracy)을 갖게 되고 같은 수의 시간 간격을 사용할 때는 삼항나무방법의 정밀성은 증가한다.

테일러 전개를 하면 p_u , p_d 는 각각

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{1}{4} + \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{\Delta t} + O(\Delta t), \\ p_d &= \frac{1}{4} - \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{\Delta t} + O(\Delta t) \end{aligned}$$

가 되고 $p_m = \frac{1}{2} + O(\Delta t)$ 이 된다.

(3.11)에서

$$1 - \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{2} \text{ 이라 두면 } \frac{\sigma^2 \Delta t}{2\Delta x^2} = \frac{1}{4} \text{ 이고 } \frac{\Delta t}{2\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{2}\sigma} \text{ 이므로}$$

(3.11)은

$$\begin{aligned} V_j^n &= \frac{1}{1+r\Delta t} \left[\frac{1}{2} V_j^{n+1} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4} \right) \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{2}\sigma} \right) V_{j+1}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4} \right) \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{2}\sigma} \right) V_{j-1}^{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{1+r\Delta t} [p_u V_{j+1}^{n+1} + p_m V_j^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}] \\ &= e^{-r\Delta t} [p_u V_{j+1}^{n+1} + p_m V_j^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}] + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

가 된다.

$P_{\Delta t, \Delta S} \phi$ 와 $F_{\Delta t} \phi(S, t)$ 를

$$P_{\Delta t, \Delta S} \phi = \frac{F_{\Delta t} \phi(S, t) - \phi(S, t)}{\Delta t},$$

$F_{\Delta t} \phi(S, t) = e^{-r\Delta t} [p_u \phi(Su, t + \Delta t) + p_m \phi(S, t + \Delta t) + p_d \phi(Sd, t + \Delta t)]$ 라 두고 테일러 정리를 이용해 계산하면 삼항정리 방법은 $P_{\Delta t, \Delta S} \phi = P\phi + O(\Delta t^{3/2})$ 가 된다. 따라서 삼항나무 방법 (3.16)은 $O(\Delta t^2)$ 의 오차로 유한차분식 (3.12)과 대등하고(equivalent) 또한 삼항나무 방법 (3.16)은 그에 대응하는 포물선 편미분 방정식 (3.7)과 일치성이 있다.

$u = e^{\sigma \sqrt{3\Delta t}} = 1/d$ 를 만족하는 또 다른 삼항나무 모델을 만들어 보자. 식 (3.15)과 (3.14)로부터

$$\begin{aligned} e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} &= u^2 p_u + q^2 p_m + d^2 p_d \\ &= u(up_u + dp_d) - udp_d + p_m + d(up_u + dp_d) - udp_u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (u+d)(up_u + dp_d) - ud(p_u + p_d) + p_m \\
&= (u+d)(e^{r\Delta t} - p_m) - (1-p_m) + p_m.
\end{aligned}$$

위의 식을 p_m 에 관해 풀면 $p_m = \frac{2}{3} + O(\Delta t)$ 가 된다. p_m 을 (3.14)와 (3.15)에 대입하고 p_u, p_d 에 관해 풀고 테일러 전개를 하면 p_u, p_d 는 각각

$$p_u = \frac{1}{6} + \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{3}\sigma} \sqrt{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (3.17)$$

$$p_d = \frac{1}{6} - \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{3}\sigma} \sqrt{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3.18)$$

가 된다.

(3.11)에서

$$1 - \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{2}{3} \text{ 이라 두면 } \frac{\sigma^2 \Delta t}{2\Delta x^2} = \frac{1}{6} \text{ 이고 } \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{3}\sigma} \text{ 이므로}$$

(3.11)은

$$\begin{aligned}
V_j^n &= \frac{1}{1+r\Delta t} \left[\frac{2}{3} V_j^{n+1} + \left(\frac{1}{6} + \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4} \right) \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{3}\sigma} \right) V_{j+1}^{n+1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{6} - \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4} \right) \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{3}\sigma} \right) V_{j-1}^{n+1} \right] \\
&= \frac{1}{1+r\Delta t} [p_u V_{j+1}^{n+1} + p_m V_j^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}] \\
&= e^{-r\Delta t} [p_u V_{j+1}^{n+1} + p_m V_j^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}] + O(\Delta t^2) \text{ 이 된다.}
\end{aligned} \quad (3.19)$$

이제 (3.19)의 증폭 요소(amplification factor)를 계산해 보자. (3.19)에 푸리에 역변환 공식

$$V_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ijh\theta} \widehat{V}^n(\theta) d\theta, \quad h = \Delta x$$

을 적용하면

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ijh\theta} \widehat{V}^n(\theta) d\theta = \frac{1}{1+\Delta t} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(j+1)h\theta} \widehat{V}^n(\theta) d\theta \right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ijh\theta} \widehat{V}^{n+1}(\theta) d\theta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(j-1)h\theta} \widehat{V}^{n+1}(\theta) d\theta \Big]. \quad (3.20)$$

(3.20)의 양변의 피적분함수가 같아야 하므로

$$\begin{aligned} \widehat{V}^n(\theta) &= (1 + \Delta t)^{-1} (p_u e^{ih\theta} \widehat{V}^{n+1}(\theta) + p_m \widehat{V}^{n+1}(\theta) + p_d e^{-ih\theta} \widehat{V}^{n+1}(\theta)) \\ &= (1 + \Delta t)^{-1} (p_u e^{ih\theta} + p_m + p_d e^{-ih\theta}) \widehat{V}^{n+1}(\theta). \end{aligned}$$

$g(h\theta) = (1 + \Delta t)^{-1} (p_u e^{ih\theta} + p_m + p_d e^{-ih\theta})$ 라 두고 절대값의 제곱을 계산하면

$$|g(h\theta)|^2 = (1 + \Delta t)^{-2} (p_u^2 + p_d^2 + 2p_u p_d (2\cos^2(h\theta) - 1) + 2p_m (p_u + p_d) \cos(h\theta)).$$

p_u, p_d 가 (3.17)과 (3.18)을 각각

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{\alpha \sqrt{\Delta t}}{6}, \quad p_d = \frac{1}{6} - \frac{\alpha \sqrt{\Delta t}}{6}, \quad \alpha = \frac{6}{\sqrt{3}\sigma} \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4} \right)$$

이라 두면

$$|g(h\theta)|^2 = (1 + \Delta t)^{-2} \left| \frac{1 + \alpha^2 \Delta t}{36} + \frac{2(1 + \alpha^2 \Delta t)}{36} (2\cos^2(h\theta) - 1) + \frac{4}{9} \cos(h\theta) \right|.$$

만약 $\Delta t \rightarrow 0$ 일 때

$$|g(h\theta)|^2 \rightarrow \left| \frac{1}{36} + \frac{2}{36} (2\cos^2(h\theta) - 1) + \frac{4}{9} \cos(h\theta) \right| \leq \frac{19}{36} < 1.$$

따라서 이 삼항방법은 적당히 작은 Δt 를 잡을 때 작은 가장 큰 증폭요소가 h, θ 에 관계없이 $19/36$ 이므로 안정적이다.

또한 p_u, p_d 가 각각

$$p_u = \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{4} \sqrt{\Delta t}, \quad p_d = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{4} \sqrt{\Delta t}, \quad \alpha = \frac{4}{\sqrt{2}\sigma} \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4} \right)$$

인 경우의 삼항방법은 적당히 작은 Δt 를 잡을 때 가장 큰 증폭요소가 h, θ 에 관계없이

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |g(h\theta)|^2 = \left| \frac{1}{16} + \frac{2}{16} (2\cos^2(h\theta) - 1) + \frac{1}{2} \cos(h\theta) \right| \leq \frac{11}{16}$$

이므로 안정적이다[6, 7, 11, 12, 17, 19, 24].

(3) 격자모델의 수치적해의 블랙-숄즈 방정식의 해에의 수렴성

CRR 이항나무 방법에서 유도된 CRR 삼항나무 방법의 증폭요소가 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |g(h\theta)|^2 \leq 0.6875$ 를 만족하고, 오름 요소를 $u = e^{\sigma \sqrt{3\Delta t}}$ 로 두고 유도된 삼항나무 방법의 증폭요소는 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |g(h\theta)|^2 \leq 0.527 \dots$ 이므로 Δt 값이 작아짐에 따라 뒤의 삼항방법이 더 빠르게 블랙-숄즈 방정식의 해로 수렴한다. 또한 CRR 이항나무 방법으로 유도된 CRR 삼항나무 방법은 CRR 이항나무 방법보다 시간간격의 수보다 그 반만 계산함으로써 같은 정밀성 (accuracy)을 갖게 된다. 표 3.1과 표 3.2는 블랙-숄즈 방정식의 해, 이항나무, 삼항나무 모델로 계산한 해와 헐[15]의 소프트웨어(DerivaGem)로 계산한 해를 나타낸 것으로 이항나무모델(BTM)의 값과 데리버젬(DerivaGem)으로 구한 값이 일치한다. $N/2$ 기간의 삼항나무모델(BTM-CRR)의 값은 N 기간의 이항나무모델(BTM-CRR)의 값과 같음을 알 수 있다.

N	BS	BTM-CRR	TTM-CRR	TTM-3 Δt	DerivaGem
100	4.75942	4.76182	4.76136	4.75426	4.76182
200	4.75942	4.76136	4.76040	4.75875	4.76136
300	4.75942	4.75798	4.75964	4.75980	4.75798
400	4.75942	4.76040	4.75930	4.75819	4.76040
500	4.75942	4.75934	4.75982	4.75966	4.75934

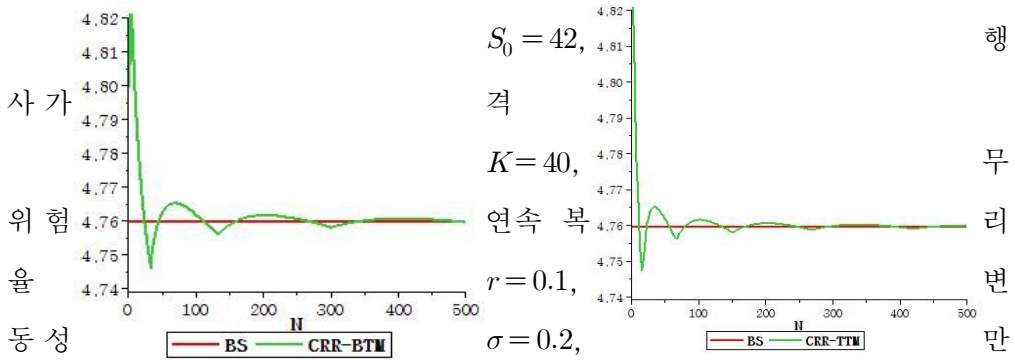
표 3.1 $S_0 = 42, K = 40, \sigma = 0.2, r = 0.1, T = 0.5$

N	BS	BTM-CRR	TTM-CRR	TTM-3 Δt	DerivaGem
100	9.93488	9.61391	9.62438	9.61418	9.61391

200	9.93488	9.62438	9.62963	9.62454	9.62438
300	9.93488	9.62438	9.63138	9.62799	9.62438
400	9.93488	9.62963	9.63225	9.62971	9.62963
500	9.93488	9.63068	9.63278	9.93075	9.63068

표 3.2 $S_0 = 100, K = 100, \sigma = 0.3, r = 0.05, T = 0.5$

다음 그림 3.2(a)와 3.2(b)는 초기 주가가



기일 $T = \frac{1}{2}$ 년 (6개월)인 유로피언 콜옵션(무배당 주식)의 가격을 앞 절에서 다루었던 이항, 삼항나무 모델을 수치적으로 계산한 것을 그래프로 나타낸 것이다. 아래의 격자 모델들의 수치적해는 블랙-숄즈 방정식의 해 4.75942239로의 수렴성을 보여준다. 이 그래프들은 Maple 13 응용프로그램으로 계산한 결과를 그린 것이다.

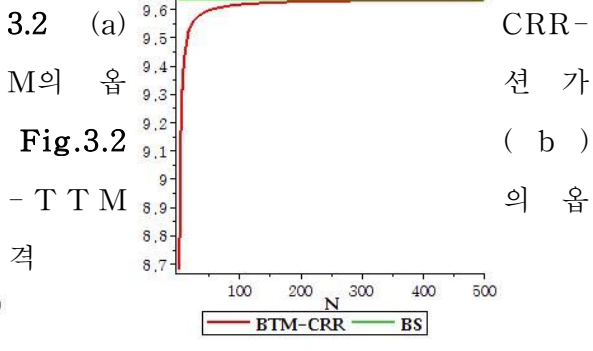
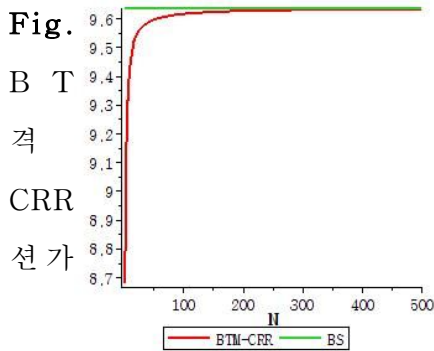


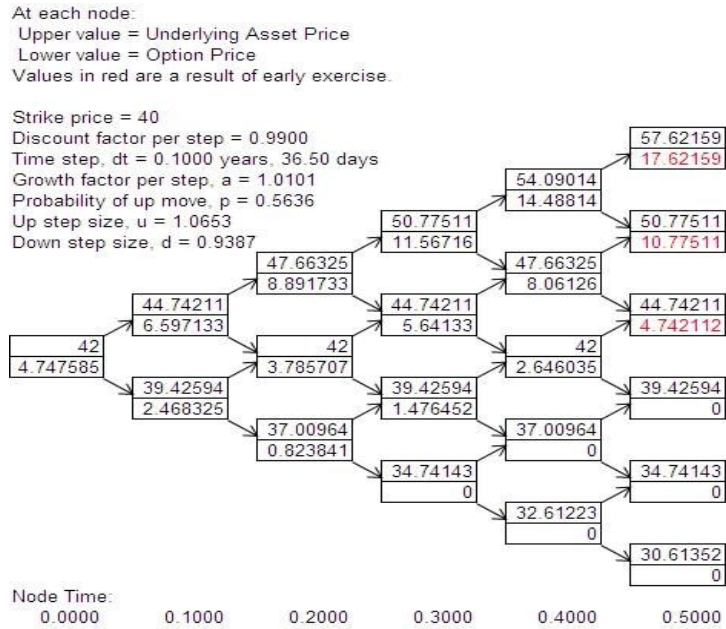
그림 3.2 (a)와 (b)는 각각 이항나무 모델 (CRR-BTM)과 삼항나무 모델(CRR-TTM)이 블랙-숄즈 방정식의 해로 수렴함을 보여주고 있다.

다음 그림 3.3(a)와 3.3(b)는 초기 주가가격 $S_0 = 100$, 행사가격 $K = 100$, 무위험 연속 복리율 $r = 0.05$, 변동성 $\sigma = 0.3$, 만기일 $T = \frac{1}{2}$ 년 (6개월)인 유로피언 콜옵션(무배당 주식)의 가격을 그래프로 나타낸 것이다.

Fig.3.3 (a) CRR-BTM의 옵션가격 Fig.3.4 (b) CRR-TTM의 옵션가격

Fig. 3.4 5기간 BTM

그림 3.4와 3.5는 주식가격 $S_0 = 42$, 행사가격 $K = 40$, 무위험 연속 복리율 $r = 0.1$, 변동성 $\sigma = 0.2$, 만기일 $T = 0.5$ 년(6개월)을 다섯 기간으로 나누어 옵션가격을 계산한 것으로 헐[15] 책의 부록인 데리버젬(DerovaGem)으로 그린 것이다. $\Delta t = 0.1$ (36.5일)이 되며 $u = e^{0.3\sqrt{0.1}} = 1.0653$, $d = e^{-0.3\sqrt{0.1}}$



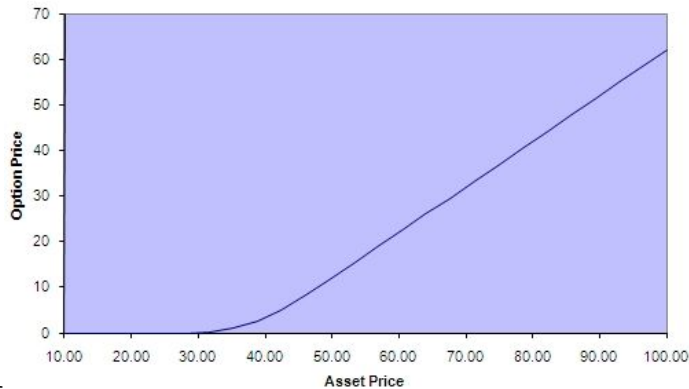
$= 0.9387$ 가 된다. 또한 $S_1 = uS_0$ 가 될 확률은 $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = 0.5636$ 가 된다.

만기일 $T = 0.5$ 에서의 주식가격은 위에서부터 $S_0 u^5 = 57.62159$,

$S_0 u^4 d = 50.77511$, $S_0 u^3 d^2 = 44.74211$, $S_0 u^2 d^3 = 39.42594$, $S_0 u^1 d^4 = 34.74143$

$S_0d^5 = 30.61352$ 가 되고 만기일의 콜옵션의 이득은 $(S_T - K)^+$ 이므로 차례로 17.62159, 10.77511, 4.742112, 0, 0, 0가 된다. 시간 0.4에서의 옵션의 가치를 하나 구해보면 $e^{-\Delta t}[p \times 57.62159 + (1-p) \times 50.77511] = 14.48814$ 가 된다. 마찬가지로 하면 나머지 격자에서 옵션의 가치가 구해진다. 시간 0에서의 옵션가치는 $e^{-\Delta t}[p \times 6.597133 + (1-p) \times 2.468325] = 4.747585$ 로 이것이 옵션 가격이다.

Fig. 3.5 6개월 전 만기일 자산가격에 따른 옵션가격



Ⅲ. 결

론

이항나무

방법 및 삼

항나무는 블랙-숄즈 편미분 방정식과 일치성이 있으며 대등함을 알 수 있었다. CRR 이항나무 방법으로 유도된 CRR 삼항나무 방법이 CRR 이항방

법보다 더 빠르게 블랙-숄즈 방정식의 해로 수렴함을 알 수 있었다. 또한 CRR 삼항나무 방법은 CRR 이항나무방법보다 시간간격의 수보다 그 반만 함으로써 같은 정밀성(accuracy)을 갖는다. $3\Delta t$ 삼항방법은 CRR 삼항나무 방법보다 이론상 약간 빠르게 블랙-숄즈 방정식의 해로 수렴하지만 계산 상 큰 차이점을 발견할 수 없었다. 안정성에서는 이항나무 방법보다 삼항 나무 방법이 안정적임을 알 수 있었다.

- 참 고 문 헌

- [1] 김정훈, 금융과 수학의 만남, 교우사 (2006년)
- [2] 이경수, 권영은, 신진호, 파생상품 Modeling I: Matlab 활용
- [3] 이승철, 수학과 현대금융사회, 교우사 (2000년)
- [4] 최건호, 금융수학의 확률적 방법론, 경문사 (2007년)
- [5] Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637 - 659.
- [6] Barone-Adesi, G. & Whaley, R. E. (1987). Efficient analytic approximation of American option values. *Journal of Finance*, 42, 301 - 320.
- [7] Barles, G., Daher, C., Romano, M., Convergence of numerical schemes for parabolic equations arising in finance theory, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 5 (1995) 125 - 143.
- [8] Boyle, P. P. (1977). Options: A Monte Carlo Approach, *Journal of Financial Economics*, 4, 323 - 328.
- [9] Boyle, P. P. (1986). Option valuation using a three-jump process. *International Options Journal*, 3, 7 - 12.

- [10] Cox, J. C., Ross, S., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7, 229-264.
- [11] Easton, S. A. (1996). A note on modified lattice approaches to option pricing. *Journal of Futures Markets*, 16, 585-594.
- [12] Gerbessiotis, A.V., Trinomial-tree based parallel option price valuations, *Parallel Algorithms Appl.* 18 (2003) 181 - 96.
- [13] Harrison, J. M., & Kreps, D., (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20, 381-408.
- [14] Harrison, J. M., & Pliska, S. R., (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11, 323-337.
- [15] Hull, J. C., *Options, Futures, & Other Derivatives*, Prentice-Hall, Inc. (2000)
- [16] Hull, J. C., & White, A. (1988). The use of control variate technique in option-pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23(2), 237 - 251.
- [17] Jarrow, R., *Volatility: New Estimation Techniques for Pricing Derivatives*, Risk Books, London, 1998.
- [18] Jarrow, R., & Rudd, A. (1983). *Option pricing*. Homewood, IL: Dow Jones - Irwin.
- [19] Jiang, L., Dai, M., Convergence of binomial tree methods for European/American path-dependent options, *J. SIAM Numer. Anal.* 42
- [20] Lax, P. D., Richtmyer, R. D., Survey of the stability of linear finite difference equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 9 (1956), 267-293
- [21] Markowitz, H., (1959), *Portfolio Selection: Efficient diversification of investment*. John Wiley www.wiley.com
- [22] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141 - 183.
- [23] Rendleman, R., & Bartter, B. (1979). Two-state option pricing.

Journal of Finance, 34, 1092 - 1110.

- [24] Richtmyer, R.D., Morton, K.W., Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience Publishers, New York, 1994.
- [25] Rubinstein, M., On the relation between binomial and trinomial option pricing models, Berkely Research Program in Finance
Working Paper RPF-292, 2000. This paper is available on-line at:
<<http://hass.berkeley.edu/finance/WP/rpflist.html>>.
- [26] Salih N. Neftci, An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Academic Press (1996)
- [27] Steven E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model, Springer (2004)
- [28] Steven E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous time Model, Springer (2004)
- [29] Wilmott, P., Dewynne, J., Howison, S., Option Pricing: Mathematical Models and Computation, Oxford Financial Press, Oxford, UK, 1993.

ABSTRACT

A Study of Option Pricing Model: Convergence of Binomial

and Trinomial Tree Models

Chang, Yu Jung

Major in Finance · insurance

The Graduate School of Education

Sungshin Women's University

Supervised By Kim, Ju Hong Ph.D.

We investigate the relationship between lattice models, i.e., binomial model, trinomial model and the Black-Scholes partial differential equation. The continuous limit of lattice model is the geometric Brownian motion which agrees with the assumption of asset price in Black-Scholes PDE derivation. We show that lattice models are consistent with the finite difference scheme discretized Black-Scholes partial differential equation. Also we investigate the stability of lattice models, and the convergence and the speed of the convergence via the Von Neumann analysis using the Fourier transform. We show that trinomial model is more stable and converges faster than binomial model.