



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

윤기현 교수 지도

석사학위 청구논문

알렉산더 다항식과 기본 아이디어로
보는 매듭의 대수적 불변량

2017

성신여자대학교 교육대학원

교육학과 수학교육전공

김예슬

알렉산더 다항식과 기본 아이디얼로 보는 매듭의 대수적 불변량

윤기현 교수 지도

이 논문을 석사학위 논문으로 제출함

2017년 5월

성신여자대학교 교육대학원

교육학과 수학교육전공

김예슬

인준서

김예슬의 석사학위 논문으로 인준함

2017년 5월

심사위원장 _____ 印

심사위원 _____ 印

심사위원 _____ 印

성신여자대학교 교육대학원

논문개요

삼차원 실수공간 또는 3차원 닫힌 구에 매장된 1차원 원을 매듭이라 한다. 이 논문에서는 매듭에 정의된 가장 고전적인 불변량인 매듭군과, 이 매듭군으로부터 대수적 과정을 통하여 정의되는 기본 아이디얼, 그리고 알렉산더 다항식에 대하여 다룬다. 특히, 어떤 성질을 만족하는 매듭들이 같은 알렉산더 다항식을 공유하는지, 그리고 이들을 기본 아이디얼로 구분할 수 있는지에 대해 다양한 매듭을 구체적으로 계산해 봄으로써 어떤 규칙성을 찾는다.

주요어: 알렉산더 다항식, 기본 아이디얼

목 차

I. 서론	1
1.1 연구의 개요	1
1.2 논문의 구성	2
II. 매듭의 정의 및 군 표시	3
2.1 매듭의 정의	3
2.2 군 표시	4
III. 매듭의 대수적 불변량	8
IV. 매듭의 대수적 불변량 계산	22
4.1 자명한 매듭의 매듭군과 알렉산더 행렬	22
4.2 Torus 매듭($T(2, 2g + 1)$)	23
4.3 Whitehead 매듭의 매듭군과 알렉산더 행렬	25
4.4 Stallings' 매듭	29
4.5 Kanenobu 매듭($K(2p, 2q)$)	35
V. 결론	49
참고 문헌	50
Abstract	52

그림 목 차

그림 1.	세잎매듭	3
그림 2.	8자형 매듭	4
그림 3.	라이데마이스터 변형	9
그림 4.	매듭군에서의 문자배열 표현	10
그림 5.	관계인자 표현	11
그림 6.	자명한 매듭	22
그림 7.	Torus 매듭	23
그림 8.	Whitehead 매듭	26
그림 9.	Stallings' 매듭	30
그림 10.	Kanenobu 매듭	35

제 1 장

서론

1.1 연구의 개요

삼차원 실공간 또는 삼차원 닫힌 구면에 매장된 1차원 원을 매듭이라 한다. 매듭에 대한 연구는 위상수학과 이론 물리학의 주된 연구 대상이었고, 그 결과 매듭에 대한 많은 성질들을 이해할 수 있게 되었다. 두 개의 3차원 실공간 사이에 정의된 향을 보존하는 위상동형사상이 존재해서 이 위상동형사상에 의해 한 매듭의 상이 다른 매듭이 될 때, 이 두 매듭을 동형(equivalent)이라 한다. 매듭이론(knot theorem)은 이러한 매듭의 동형여부를 판단할 수 있는 불변량(invariant)을 정의하고 이를 이용하여 매듭들을 분류하는 위상수학의 한 분야이다.

이러한 매듭 불변량 중에서 가장 고전적인 불변량은 매듭군이고 매듭군은 매듭들을 분류하는 완전한 불변량(complete invariant)이다. 다시 말하면 두 매듭이 군 동형이 매듭군을 가지면 두 매듭은 서로 동형임이 알려져 있다[1]. 주어진 매듭의 다이어그램은 일반적으로 유일하지 않고 여러 다른 형태의 다이어그램이 가능하다. 또한 주어진 매듭 다이어그램으로부터 매듭군을 구하는 일반적인 방법인 Wirtinger 표현방법도 잘 알려져 있다[2]. 따라서 주어진 매듭으로부터 Wirtinger 표현을 통해 얻어지는 서로 다른 군표현들이 어떻게 서로 연관되어 있는지를 파악하는 것은 흥미있는 문제이다. 그리고 주어진 두 군 표현이 동형이면 서로 특정한 형태의 변환(Tietze transform)을 유한번 적용함으로써 한 군 표현에서 다

른 군 표현으로 옮겨갈 수 있다는 것이 알려져 있지만[3], 실제적으로 두 군 표현이 주어졌을 때 이 두 군이 서로 동형인지를 판단하는 것은 매우 어려운 문제이다. 따라서 두 매듭이 서로 동형인지를 판단하려면 보다 더 쉽게 계산할 수 있는 불변량을 정의하는 것이 필요하다. 우리는 이 연구를 통하여 그러한 대수적 불변량을 주어진 매듭군으로부터 어떻게 얻을 수 있는지에 대해 살펴보고, 이렇게 정의된 불변량이 매듭들을 잘 구분해 주는지에 대해 살펴 볼 것이다.

유한군표현으로 부터 불변량을 얻는 방법에 대해서는 Fox의 연구에 의해 그 결과가 대수적으로 알려져있고[4, 5, 6, 7, 8, 9] 이를 매듭군의 유한군표현에 적용하면 알렉산더 행렬(Alexander matrix) 및 이 행렬로부터 정의되는 기본 아이디얼(elementary ideal), 그리고 알렉산더 다항식을 정의할 수 있다.

이 연구에선 서로 동형이 아닌 매듭이지만 같은 알렉산더 다항식을 공유하는 매듭은 어떤것이 있는지 살펴보고, 이들이 기본 아이디얼에 의해 구분되는 경우가 있는지 알아보고자 한다. 또한 같은 알렉산더 다항식과 같은 기본 아이디얼을 갖지만 서로 동형이 아닌 매듭들을 어떻게 구성할 수 있는지에 대해 살펴본다.

1.2 논문의 구성

본 논문의 구성은 다음과 같다.

제 2장에서는 매듭과 매듭군에 대해 정의한다. 제 3장에서는 매듭의 대수적 불변량인 알렉산더 다항식과 기본 아이디얼에 대해 기술한다. 마지막으로, 제 4장에서는 매듭의 알렉산더 다항식과 기본 아이디얼을 구하고 비교한다.

제 2 장

매듭의 정의 및 군 표시

이 장에서는 매듭에 대해 정의하고 매듭군을 정의하기 위해 필요한 용어들을 정의하고자 한다.

2.1 매듭의 정의

3차원 공간에서의 매듭의 정의는 다음과 같다.

정의 1. 단위원이 3차원 공간 \mathbb{R}^3 에 매장될 때 그 폐곡선 이미지를 **매듭(knot)**이라고 한다.

매듭 K 을 평면에 사영시킬 때 나타나는 이미지를 매듭 K 의 다이어그램(knot diagram)이라고 하며, 매듭 K 를 자르지 않고 변형시켜 K' 이 만들어질때 매듭 K' 은 K 와 동치(equivalence)라고 한다.

다음 두 그림(그림 1, 그림 2)은 세잎매듭(trefoil knot)과 8자형 매듭 (figure eight knot)의 다이어그램을 나타낸다.

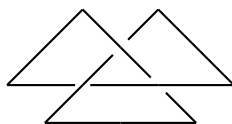


그림 1: 세잎매듭

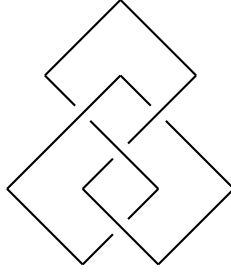


그림 2: 8자형 매듭

2.2 군 표시

집합 $S = \{x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} x_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}} \mid x_{i_j} \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \varepsilon_{i_j} \in \mathbb{Z}\}$ 에 대하여 집합 S 의 원소를 문자 x_1, x_2, \dots, x_n 의 문자배열이라 하고, 집합 S 에는 임의의 두 원소 $a = x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} x_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}}, b = x_{m_1}^{\varepsilon_{m_1}} x_{m_2}^{\varepsilon_{m_2}} \dots x_{m_l}^{\varepsilon_{m_l}}$ 에 대하여

$$ab = x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} x_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}} x_{m_1}^{\varepsilon_{m_1}} x_{m_2}^{\varepsilon_{m_2}} \dots x_{m_l}^{\varepsilon_{m_l}}$$

로 정의된 연산이 주어져 있다고 하자. 이 연산에서 $a, b \in S$ 일 때 $ax_i^0 b$ 를 ab 로, $ax_i^p x_i^q b$ 를 $ax_i^{p+q} b$ 로 각각 축소시킬 수 있다. 이와 같은 방법으로 축소시킨 가장 작은 문자 배열을 기약문자열이라 한다.

정의 2. 문자 x_1, x_2, \dots, x_n 에 대하여 모든 기약문자열로 생성되는 군을 **자유군**(free group)이라 하고 그 문자들을 **자유기저**(free basis)라고 한다.

군 (G, \cdot) 에 대하여 군 G 의 부분집합 H 이 다음을 성립하면 집합 H 는 군 G 의 부분군(subgroup)이다.

1. 임의의 $a, b, c \in H$ 에 대하여 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ 이 성립한다.
2. 항등원 e 가 H 에 있다.

3. 모든 $a \in H$ 에 대하여 역원 a^{-1} 이 H 에 있다.

정의 3. 군 G 의 부분군 N 이 임의의 $a \in G$ 에 대하여 $aN = Na$ 일 때 부분군 N 을 정규부분군(normal subgroup)이라 한다. 잉여류(coset, $\{aN | a \in G\}$)들의 집합을 몫군(factor group)이라 하고 G/N 으로 표현한다.

기저 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 로 생성되는 자유군 $F(\mathbf{x})$ 와 군 G 에 대하여 전사인 군 준동형사상 $\psi : F(\mathbf{x}) \rightarrow G$ 가 정의될 때 사상 ψ 의 핵(kernel) $\ker(\psi)$ 의 원소 r_i 를 생각하자. $R = \{\prod ar_i a^{-1} | a \in F(\mathbf{x}), r_i \in \mathbf{r} \subseteq \ker(\psi)\}$ 이 $\ker(\psi)$ 가 되는 $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ 를 선택하면 집합 R 의 원소들을 \mathbf{r} 의 consequence라 한다.

정의 4. \mathbf{x} 와 \mathbf{r} 로 구성된 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})_\psi$ 을 군 표시(group presentation)라 하고, 이 때 \mathbf{x} 를 생성원(generator), \mathbf{r} 를 관계인자(relator)라고 한다.

군 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})_\psi$ 에 대하여 \mathbf{x} 와 \mathbf{r} 의 원소의 개수가 유한개이면 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})_\psi$ 를 유한이라고 한다.

두 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 와 $(\mathbf{y} : \mathbf{s})$ 에 대하여 각각 \mathbf{r} 과 \mathbf{s} 의 consequence들의 집합을 R, S 라 하자. 군 준동형사상 $\gamma : F(\mathbf{x}) \rightarrow F(\mathbf{x})/R = |\mathbf{x} : \mathbf{r}|, \gamma(a) = [a], a \in F(\mathbf{x})$ 와 군 준동형사상 $\gamma' : F(\mathbf{y}) \rightarrow F(\mathbf{y})/S = |\mathbf{y} : \mathbf{s}|, \gamma'(b) = [b], b \in F(\mathbf{y})$ 이 정의되고, 군 준동형사상 $f : F(\mathbf{x}) \rightarrow F(\mathbf{y}), f(r_j)$ 는 \mathbf{s} 의 consequence ($r_j \in \mathbf{r}$)에 의하여 정의된 모든 표시 사상 $f : (\mathbf{x} : \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{y} : \mathbf{s})$ 은 $f_*\gamma = \gamma'f$ 를 만족하는 군 준동형사상 $f_* : |\mathbf{x} : \mathbf{r}| \rightarrow |\mathbf{y} : \mathbf{s}|$ 이 존재한다.(밑 다이어그램 참고)

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{x} : \mathbf{y}) & \xrightarrow{f} & (\mathbf{y} : \mathbf{s}) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \gamma' \\ |\mathbf{x} : \mathbf{r}| & \xrightarrow{f_*} & |\mathbf{y} : \mathbf{s}| \end{array}$$

정의 5. 두 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 와 $(\mathbf{y} : \mathbf{s})$ 에 대하여 표시 사상 $f : (\mathbf{x} : \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{y} : \mathbf{s})$, $g : (\mathbf{y} : \mathbf{s}) \rightarrow (\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 이 $(fg)_*$ 와 $(gf)_*$ 가 항등사상이면 두 표시사상 f, g 은 **표시 동치**(*presentation equivalence*)라 한다.

표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 에 대하여 다음과 같은 방법으로 뭇군 $|\mathbf{x} : \mathbf{r}|$ 과 동형인 표시를 생성할 수 있다.

T-1. \mathbf{r} 의 consequence s 를 관계인자에 첨가한다.

$$(\mathbf{x} : \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{x} : \mathbf{r} \cup \{s\})$$

T-2. \mathbf{r} 의 원소 r 이 $\mathbf{r} - \{r\}$ 의 consequence이면 r 을 관계인자에서 제거한다.

$$(\mathbf{x} : \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{x} : \mathbf{r} - \{r\})$$

T-3. \mathbf{x} 의 원소가 아닌 $F(\mathbf{x})$ 의 원소 y 를 생성원에 첨가하고 관련된 문자배열 $y^{-1}\zeta$ 를 관계인자에 첨가한다. ($y = \zeta$ (ζ 는 $F(\mathbf{x})$ 의 문자배열 원소))

$$(\mathbf{x} : \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{x} \cup \{y\} : \mathbf{r} \cup \{y^{-1}\zeta\})$$

T-4. \mathbf{x} 의 원소 x 가 $\mathbf{x} - \{x\}$ 의 원소로 이루어진 문자배열 $x = \xi$ 이면 x 를 생성원에서 제거하고 관련된 관계인자 $x^{-1}\xi$ 도 제거한다.

$$(\mathbf{x} : \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{x} - \{x\} : \mathbf{r} - \{x^{-1}\xi\})$$

위의 네가지 방법을 Tietze 변환(Tietze move)이라 하고 Tietze 변환으로 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 에 의하여 표시 $(\mathbf{y} : \mathbf{s})$ 를 생성할 때 두 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 와 $(\mathbf{y} : \mathbf{s})$ 를

Tietze 동치(Tietze equivalent)라고 한다.

정리 1 (Tietze 정리[10]). 두 표시 $(\mathbf{x}:\mathbf{r})$, $(\mathbf{y}:\mathbf{s})$ 가 유한이고 $f:(\mathbf{x}:\mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{y}:\mathbf{s})$, $g:(\mathbf{y}:\mathbf{s}) \rightarrow (\mathbf{x}:\mathbf{r})$ 가 표시 동치이면 $(\mathbf{x}:\mathbf{r})$ 와 $(\mathbf{y}:\mathbf{s})$ 는 *Tietze* 동치이다.

제 3 장

매듭의 대수적 불변량

이 장에서는 매듭을 분류하는 가장 고전적인 불변량인 매듭군에 대하여 정의하고 이를 이용하여 알렉산더 행렬(Alexander matrix)를 구하는 방법을 기술하고자 한다. 또한 알렉산더 행렬로부터 얻어지는 기본 아이디얼(elementary ideal)과 알렉산더 다항식(Alexander polynomial)에 대하여 정의하고자 한다.

정의 6. 3차원 공간 \mathbb{R}^3 에 있는 매듭 K 과 $\mathbb{R}^3 - K$ 의 임의의 기점(base point) p_0 에 대하여 $\mathbb{R}^3 - K$ 의 기본군 $\pi(\mathbb{R}^3 - K, p_0)$ 을 매듭 K 의 **매듭군(knot group)**이라 한다.

$\mathbb{R}^3 - K$ 은 연결공간이므로 $\mathbb{R}^3 - K$ 의 또 다른 점 p'_0 에 대하여 기본군 $\pi(\mathbb{R}^3 - K, p_0)$ 와 $\pi(\mathbb{R}^3 - K, p'_0)$ 는 군 동형(group isomorphic)이다. 이러한 이유로 기점(base point)을 생략하여 $\pi(\mathbb{R}^3 - K)$ 로 간단히 표현된다.

라이테마이스터 변형(reidmeister move)은 그림 3와 같이 세가지로 정의한다. 매듭 다이어그램이 라이트마이스터 변형에 의해 달라질지라도 변형되기 전 매듭과 동치임은 변함이 없다. 따라서 매듭군이 라이트마이스터 변형에 의해 불변이란 것을 보이면 매듭군이 매듭의 동치류에 잘 정의된 불변량이 됨을 알 수 있다.

다각형 매듭(polygonal knot)은 유한개의 선분으로 이루어진 매듭이다. 사영사상 $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}(x, y, z) = (x, y, 0)$ 에 의하여 다각형 매듭을 사영시켰을 때 나타나는 이미지를 매듭 다이어그램이라 한다. 매듭 다이

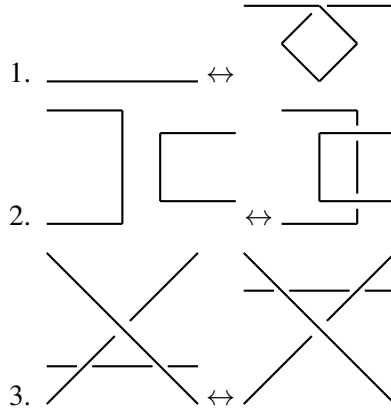
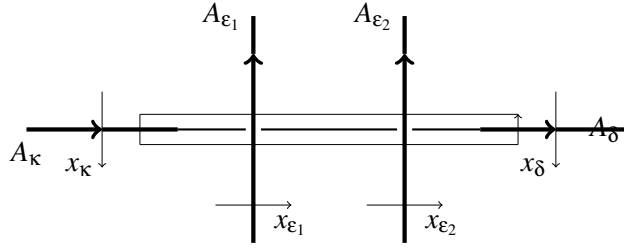


그림 3: 라이데마이스터 변형

어그램이 세 개 이상의 선분이 같은 점에서 교차하지 않고, 전체 교차 횟수는 유한개뿐이고 매듭의 선분의 끝점에서는 교차하지 않을 때 *정위치 (regular position)*라 한다.

사영사상 $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}(x, y, z) = (x, y, 0)$ 에 의하여 사영된 정위치 다각형 매듭 다이어그램의 향이 정해질 때, 향을 따라 매듭 다이어그램의 연속적으로 위로 교차한 후 아래로 교차하는 두 교차지점, 또는 아래로 교차한 후 위로 교차하는 두 교차지점 사이에 교차지점이 아닌 한 점을 표시하자. 그 표시한 점들은 매듭 다이어그램을 $2n$ 개의 조각으로 나눈다. 이 $2n$ 개의 조각들 중 위로 교차하는 조각을 오버패스(overpass), 아래로 교차하는 조각을 언더패스(underpass)라고 한다.

$F(\mathbf{x})$ 가 자유군이고 B 가 매듭의 모든 언더패스들의 집합일 때, 준동형사상 $\phi : F(\mathbf{x}) \rightarrow \pi(\mathbb{R}^3 - K, p_0)$ 는 a 가 $\mathbb{R}^2 - \mathcal{P}(B)$ 에 있는 단순경로(simple path)라 하면 $\phi(\hat{a}) = [\bar{a}]$ 로 정의한다. \bar{a} 은 p_0 에서 \mathbb{R}^2 와 평행하게 경로 a 의 시작점 위까지 이동한 후 a 의 시작점으로 내려오고 a 를 따라서 이동하고 a 의 끝점에서 수직으로 \mathbb{R}^2 와 평행하고 p_0 을 포함하는 평면까지 올라간



$$\hat{v}_j = x_K x_{\epsilon_1} x_{\epsilon_2} x_{\delta}^{-1} x_{\epsilon_2}^{-1} x_{\epsilon_1}^{-1}$$

그림 5: 관계인자 표현

이므로

$$\hat{v}_i = (\hat{v}_1 \dots \hat{v}_{i-1})^{-1} (\hat{v}_{i+1} \dots \hat{v}_n)^{-1}$$

이다. 즉, 한 관계인자는 나머지 $(n-1)$ 개의 관계인자들의 연산으로 표현된다. 따라서 Wirtinger 표시는

$$(x_1, x_2, \dots, x_n : \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{i-1}, \hat{v}_{i+1}, \dots, \hat{v}_n)_\phi$$

로 표현되고, 매듭 K 의 매듭군 $\pi(\mathbb{R}^3 - K)$ 은

$$\pi(\mathbb{R}^3 - K) = |x_1, x_2, \dots, x_n : \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{i-1}, \hat{v}_{i+1}, \dots, \hat{v}_n|_\phi$$

이다.

예제 1. 세잎 매듭 K (그림 1)의 생성원은 x_1, x_2, x_3 이고 관계인자는 $\hat{v}_1 = x_2^{-1} x_1 x_3 x_1^{-1}$, $\hat{v}_2 = x_1^{-1} x_3 x_2 x_3^{-1}$, $\hat{v}_3 = x_3^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1}$ 이다. 따라서 K 의 매듭군의 유한군표현은

$$\pi(\mathbb{R}^3 - K) = |x_1, x_2, x_3 : x_2^{-1} x_1 x_3 x_1^{-1}, x_3^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1}|$$

이다.

Tietze 동치에 따라 $x_3 = x_1^{-1}x_2x_1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}\pi(\mathbb{R}^3 - K) &= |x_1, x_2 : x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1x_2^{-1}| \\ &= |x_1, x_2 : x_1x_2x_1 = x_2x_1x_2|\end{aligned}$$

이다.

정의 8. 정수환 \mathbb{Z} 와 군 G 에 대하여 집합 $\mathbb{Z}G = \{a \mid a = \sum_{k=1}^p n_k g_k, n_k \in \mathbb{Z}, g_k \in G\}$ 이 정의되고 집합 $\mathbb{Z}G$ 에 대하여 다음 연산이 주어질 때, $(\mathbb{Z}G, +, \cdot)$ 을 **군환(group ring)**이라고 한다.

1. $\sum m_k g_k + \sum n_k g_k = \sum (m_k + n_k) g_k$
2. $(\sum m_k g_k) \cdot (\sum n_l g_l) = \sum (m_k n_l) g_k \cdot g_l$

정의 9. 자유군 F 와 이를 생성하는 각각의 자유 생성원 x_j 에 대하여 군환에서 미분(derivative)

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}F \rightarrow \mathbb{Z}F$$

은 임의의 $a, b \in \mathbb{Z}F$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}(a+b) &= \frac{\partial a}{\partial x_j} + \frac{\partial b}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(ab) &= \frac{\partial a}{\partial x_j} + a \frac{\partial b}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

으로 정의한다.

참고 1. 각각의 자유 생성원 x_j 에 대하여 군환에서 미분(derivative) $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 은 다음과 같은 성질이 있다.

$$1. \frac{\partial}{\partial x_j}(n) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$2. \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$3. \frac{\partial(kx_i)}{\partial x_j} = k \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$$

$$4. \frac{\partial x_i^n}{\partial x_j} = \frac{x_i^{n-1}}{x_i-1} \delta_{ij}$$

$$5. \frac{\partial x_i^{-1}}{\partial x_j} = -x_i^{-1} \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$$

예제 2. 위에 정의한 군환에서의 미분은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3x_1^2x_3^{-3}x_2^2x_1^{-1}x_3^{-1} - x_2^2x_3^3x_1x_2^{-2}x_3) \\ &= (1 - x_3x_1^2x_3^{-3} \frac{x_3^3-1}{x_3-1} - x_3x_1^2x_3^{-3}x_2^2x_1^{-1}x_3^{-1}) - (x_2^2 \frac{x_3^3-1}{x_3-1} + x_2^2x_3^3x_1x_2^{-2}) \\ &= (1 - x_3x_1^2x_3^{-3}(x_3^2+x_3+1) - x_3x_1^2x_3^{-3}x_2^2x_1^{-1}x_3^{-1}) \\ &\quad - (x_2^2(x_3^2+x_3+1) + x_2^2x_3^3x_1x_2^{-2}) \\ &= (1 - x_3x_1^2(x_3^{-1}+x_3^{-2}+x_3^{-3}) - x_3x_1^2x_3^{-3}x_2^2x_1^{-1}x_3^{-1}) \\ &\quad - (x_2^2(x_3^2+x_3+1) + x_2^2x_3^3x_1x_2^{-2}) \end{aligned}$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 가 자유군 F 의 자유기저이고 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ 인 군 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 을 고려하자. 준동형사상 $\gamma : F \rightarrow F/R = |\mathbf{x} : \mathbf{r}|$ 와 아벨화 사상(abelianizer) $\alpha : F/R \rightarrow F/(R \cup \{[x_i, x_j] : i, j = 1, 2, \dots, n\})$ 는 군환으로 유일하게 확장할 수 있고 아벨화 사상 α 에 의해 생긴 아벨화된 군을 $H = F/(R \cup \{[x_i, x_j] : i, j = 1, 2, \dots, n\})$ 이라 하자. $([x_i, x_j] = x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1})$.

정의 10. 행렬 $\|a_{ij}\|_{m \times n}$ 을 성분

$$a_{ij} = \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)$$

에 의하여 정의할 때 이 행렬을 군 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 의 알렉산더 행렬(Alexander matrix)이라 한다.

$$\mathbb{Z}F \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} \mathbb{Z}F \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}|\mathbf{x} : \mathbf{r}| \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}H$$

정리 2. 매듭군의 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r}) = (x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_n)$ 에서 준동형 사상 $\gamma : F \rightarrow F/R = |\mathbf{x} : \mathbf{r}|$, 여기서 R 은 \mathbf{r} 의 consequence와 아벨화 사상 (abelianizer) $\alpha : F/R \rightarrow F/(R \cup \{[x_i, x_j] : i, j = 1, 2, \dots, n\})$ 이라 하자. 이 때 다음 식이 성립한다.

$$\alpha\gamma(x_i) = \alpha\gamma(x_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

증명 매듭군의 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r}) = (x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_n)$ 에서 관계인자 r_i 는 $x_{\kappa} x_{j_1}^{\varepsilon_1} x_{j_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{j_k}^{\varepsilon_k} x_{\delta}^{-1} x_{j_k}^{-\varepsilon_k} \dots x_{j_2}^{-\varepsilon_2} x_{j_1}^{-\varepsilon_1} (\varepsilon_i = \pm 1)$ 꼴로 표현된다.

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha\gamma(r_i) \\ &= \alpha\gamma(x_{\kappa} x_{j_1}^{\varepsilon_1} x_{j_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{j_k}^{\varepsilon_k} x_{\delta}^{-1} x_{j_k}^{-\varepsilon_k} \dots x_{j_2}^{-\varepsilon_2} x_{j_1}^{-\varepsilon_1}) \\ &= \alpha\gamma(x_{\kappa} x_{\delta}^{-1}) \\ &= \alpha\gamma(x_{\kappa}) \alpha\gamma(x_{\delta}^{-1}) \\ &= \alpha\gamma(x_{\kappa}) \alpha\gamma(x_{\delta})^{-1} \end{aligned}$$

따라서 $\alpha\gamma(x_k) = \alpha\gamma(x_8)$ 이다. □

매듭군의 아벨 준동형 이미지는 $\alpha\gamma(x_j) = t, j = 1, 2, \dots, n$ 를 생성원으로 하는 무한 순환군이다.

예제 3. 세잎 매듭의 군 표시 $(x, y : xyx = yxy)$ 의 알렉산더 행렬을 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \alpha\gamma \frac{\partial}{\partial x} (xyx - yxy) = \alpha\gamma(1 + xy - y) \\ &= 1 - t + t^2 \\ a_{1,2} &= \alpha\gamma \frac{\partial}{\partial y} (xyx - yxy) = \alpha\gamma(x - 1 - yx) \\ &= -1 + t - t^2 \end{aligned}$$

따라서 알렉산더 행렬은 $A = \begin{vmatrix} 1 - t + t^2 & -1 + t - t^2 \end{vmatrix}$ 이다.

정의 11. 군 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 의 알렉산더 행렬 $A_{m \times n} = \|a_{ij}\|$ 과 음이 아닌 정수 k 에 대하여 A 의 $(n-k) \times (n-k)$ 부분행렬의 행렬식에 의해 생성되는 아이디얼을 k 번째 기본 아이디얼(k -th elementary ideal)이라 하고 $E_k(A)$ 로 표현한다. $(n-k) > m$ 인 경우에 $E_k(A) = 0$, $(n-k) \leq 0$ 인 경우에 $E_k(A)$ 은 1로 생성되는 아이디얼로 정의한다.

$(n-k) \times (n-k)$ 행렬의 행렬식은 $(n-k) \times (n-k)$ 행렬의 $(n-(k+1)) \times (n-(k+1))$ 부분행렬의 행렬식의 선형 결합으로 이루어져 있으므로 $E_k \subseteq E_{k+1}$ 이다.

정리 3. 무한 순환군의 군환은 오로지 $\pm t^n$ 형태의 단위(unit)만을 가지고 있다.

증명 준동형사상 $\rho: \mathbb{Z}H \rightarrow \mathbb{Z}[t], \rho(\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i) = t^{-n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i$ (n 은 $a_i \neq 0$ 인 i 중 가장 작은 수)에 대하여 a 가 $\mathbb{Z}H$ 의 단위이면 $ab = ba = 1$ 인 a 의 역원 $b (\in \mathbb{Z}H)$ 가 존재한다. $1 = \rho(1) = \rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ 이므로 $\rho(a)$ 는 $\mathbb{Z}[t]$ 의 단위이다. $\mathbb{Z}[t]$ 의 단위는 ± 1 뿐이므로 $\rho(a) = t^{-n}a = \pm 1$ 이다. 따라서 $a = \pm t^n$ 이다. \square

예제 4. 세잎 매듭의 알렉산더 행렬 $A = \begin{vmatrix} 1-t+t^2 & -1+t-t^2 \\ -1+t-t^2 & 1-t+t^2 \end{vmatrix}$ 의 $E_1(A)$ 은 $(1-t+t^2)$ 로 생성되는 아이디얼이고 $k \geq 2$ 이면 $E_k(A)$ 는 1로 생성되는 아이디얼이다.

두 행렬 A 와 A' 에 대하여 행렬 A 가 다음 과정에 따라 A' 이 될 때 $A \sim A'$ 이라 한다.

1. 행(또는 열)을 재배치한다.

2. $A \leftrightarrow \begin{vmatrix} A \\ 0 \end{vmatrix}$

3. 한 행에 정수배를 한 다른 행을 더한다.

4. 한 열에 정수배를 한 다른 열을 더한다.

5. $A \leftrightarrow \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

위에 정의한 이항관계는 알렉산더 행렬들의 집합에 정의된 동치관계이다. 이제 기본 아이디얼이 이 동치류에 정의된 불변량이 됨을 보이자.

정리 4 ([10]). 두 행렬 A 와 A' 에 대하여 $A \sim A'$ 이면 $E_k(A) = E_k(A')$ 이다.

증명 알렉산더 행렬들의 집합에 정의된 동치관계 5가지에 대하여 증명하면 된다.

1. 행렬 A 의 행(또는 열)이 재배치되어 행렬 A' 을 얻는다. 행렬 A 와 A' 의 $(n-k) \times (n-k)$ 의 부분행렬의 행렬식은 각각 일대일 대응하므로 $E_k(A) = E_k(A')$ 이다.

2. 행렬 A 의 i 번째 행(또는 열)에 정수배를 한 다른 행(또는 열)을 더하여 행렬 A' 를 얻는다. 행렬 A 와 A' 의 $(n-k) \times (n-k)$ 부분행렬의 행렬식에 대하여 행렬 A' 의 i 번째 행(또는 열)이 포함되지 않을 경우 각각의 행렬식이 일대일 대응하고, i 번째 행(또는 열)이 포함될 경우 행렬 A 의 $(n-k) \times (n-k)$ 부분행렬의 행렬식 선형 결합으로 표현됨으로 $E_k(A) = E_k(A')$ 이다.

- 3 ~ 4. 행렬 A 의 마지막 행에 제로 행을 추가하여 행렬 A' 을 얻는다. 행렬 A 와 A' 의 $(n-k) \times (n-k)$ 부분행렬의 행렬식에 대하여 행렬 A' 의 제로 행이 포함되지 않을 경우 행렬 A 와 A' 의 $(n-k) \times (n-k)$ 의 부분행렬의 행렬식은 각각 일대일 대응하고 제로 행이 포함될 경우 행렬 A' 의 $(n-k) \times (n-k)$ 의 부분행렬의 행렬식은 0이므로 $E_k(A) = E_k(A')$ 이다.

5. 행렬 A 의 마지막 행과 열에 행과 열이 만나는 성분을 1로, 나머지 성분에 0으로 추가하여 행렬 A' 을 얻는다. 행렬 A 의 $(n-k) \times (n-k)$ 부분행렬과 행렬 A' 의 $(n-k+1) \times (n-k+1)$ 부분행렬의 행렬식에 대하여 추가된 행과 열이 포함되지 않을 경우 행렬 A' 의 $(n-k+1) \times (n-k+1)$ 부분행렬의 행렬식은 행렬 A 의 $(n-k+1) \times (n-k+1)$ 부분행렬의 행렬식과 같으므로 $E_k(A) \subseteq E_{k+1}(A) = E_k(A')$ 이고 추가된

행이 포함될 경우 행렬 A' 의 $(n-k+1) \times (n-k+1)$ 의 부분행렬의 행렬식은 0와 행렬 A 의 $(n-k) \times (n-k)$ 부분행렬의 행렬식이므로 $E_k(A') \subseteq E_k(A)$ 이다. 따라서 $E_k(A) = E_k(A')$ 이다.

□

정리 5 (기본 아이디얼의 불변량). 두 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 과 $(\mathbf{y} : \mathbf{s})$ 가 유한이고 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 과 $(\mathbf{y} : \mathbf{s})$ 로 생성되는 알렉산더 행렬을 A 와 A' 이라 할 때, $f : (\mathbf{x} : \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{y} : \mathbf{s})$ 가 표시 동치이면 $E_k(A) = E_k(A')$ 이다.

증명 우리는 이 정리의 증명을 각각의 Tietze move에 대하여 위의 명제가 성립함을 보임으로써 할 것이다.

Tietze move 1: 생성원 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 과 관계인자 $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ 으로 이루어진 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$, \mathbf{r} 의 consequence s 가 추가된 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r} \cup s)$ 에 대하여 $(\mathbf{x} : \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{x} : \mathbf{r} \cup s)$ 이 되는 Tietze 변환이다. s 가 \mathbf{r} 의 consequence 이므로 $s = \prod_{k=1}^l (a_k r_{i_k}^{p_k} a_k^{-1})$ 로 표현된다.

$$\begin{aligned} \alpha\gamma\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) &= \alpha\gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(a_1 r_{i_1}^{p_1} a_1^{-1}) + a_1 r_{i_1}^{p_1} a_1^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_2 r_{i_2}^{p_2} a_2^{-1}) + \dots\right. \\ &\quad \left. + \prod_{k=1}^{l-1} (a_k r_{i_k}^{p_k} a_k^{-1}) \frac{\partial}{\partial x_j}(a_l r_{i_l}^{p_l} a_l^{-1})\right) \end{aligned}$$

이고 이 식을 정리하면

$$\begin{aligned}
\alpha\gamma\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) &= \alpha\left(\gamma\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_j}\right) + \gamma\left(a_1 \frac{r_{i_1}^{p_1} - 1}{r_{i_1} - 1}\right)\gamma\left(\frac{\partial r_{i_1}}{\partial x_j}\right) - \gamma\left(a_1 r_{i_1}^{p_1} a_1^{-1}\right)\alpha\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_j}\right)\right) \\
&\quad + \gamma\left(a_1 r_{i_1}^{p_1} a_1^{-1}\right)\gamma\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_j}\right) + \gamma\left(a_1 r_{i_1}^{p_1} a_1^{-1} a_2 \frac{r_{i_2}^{p_2} - 1}{r_{i_2} - 1}\right)\gamma\left(\frac{\partial r_{i_2}}{\partial x_j}\right) \\
&\quad - \gamma\left(a_1 r_{i_1}^{p_1} a_1^{-1} a_2 r_{i_2}^{p_2} a_2^{-1}\right)\gamma\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_j}\right) + \cdots + \gamma\left(\prod_{k=1}^{l-1} (a_k r_{i_k}^{p_k} a_k^{-1})\right)\gamma\left(\frac{\partial a_l}{\partial x_j}\right) \\
&\quad + \gamma\left(\prod_{k=1}^{l-1} (a_k r_{i_k}^{p_k} a_k^{-1}) a_l \frac{r_{i_l}^{p_l} - 1}{r_{i_l} - 1}\right)\gamma\left(\frac{\partial r_{i_l}}{\partial x_j}\right) - \gamma\left(\prod_{k=1}^l (a_k r_{i_k}^{p_k} a_k^{-1})\right)\gamma\left(\frac{\partial a_l}{\partial x_j}\right) \\
&= \alpha\left(\gamma\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_j}\right) + \gamma\left(a_1 (r_{i_1}^{p_1-1} + \cdots + r_{i_1} + 1)\right)\gamma\left(\frac{\partial r_{i_1}}{\partial x_j}\right) - \gamma\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_j}\right)\right) \\
&\quad + \gamma\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_j}\right) + \gamma\left(a_2 (r_{i_2}^{p_2-1} + \cdots + r_{i_2} + 1)\right)\gamma\left(\frac{\partial r_{i_2}}{\partial x_j}\right) - \gamma\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_j}\right) \\
&\quad + \cdots + \gamma\left(\frac{\partial a_l}{\partial x_j}\right) + \gamma\left(a_l (r_{i_l}^{p_l-1} + \cdots + r_{i_l} + 1)\right)\gamma\left(\frac{\partial r_{i_l}}{\partial x_j}\right) - \gamma\left(\frac{\partial a_l}{\partial x_j}\right) \\
&= \alpha\left(\gamma(a_1 p_1)\right)\gamma\left(\frac{\partial r_{i_1}}{\partial x_j}\right) + \gamma(a_2 p_2)\gamma\left(\frac{\partial r_{i_2}}{\partial x_j}\right) + \cdots + \gamma(a_l p_l)\gamma\left(\frac{\partial r_{i_l}}{\partial x_j}\right) \\
&= \sum_{k=1}^l ((p_k \alpha(a_k)) \alpha \gamma\left(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\right))
\end{aligned}$$

가 된다.

표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 과 $(\mathbf{x} : \mathbf{r} \cup s)$ 로 생성되는 알렉산더 행렬 A, A' 은 알렉산더 행렬의 동치관계 2, 3에 의하여 동치이므로 $E_k(A) = E_k(A')$ 이다.

Tietze move 2: 생성원 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 과 관계인자 $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ 으로 이루어진 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$, \mathbf{x} 의 원소가 아닌 생성원 y 를 추가(관계인자 $y = \zeta$ (ζ 는 $F(\mathbf{x})$ 의 문자배열 원소))한 표시 $(\mathbf{x} \cup \{y\} : \mathbf{r} \cup \{\zeta\})$ 에 대하여 $(\mathbf{x} : \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{x} \cup \{y\} : \mathbf{r} \cup \{y\zeta^{-1}\})$ 이 되는 Tietze 변환이다.

$$\alpha\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial y}\right) = 0, \alpha\gamma\left(\frac{\partial y\zeta^{-1}}{\partial x_j}\right) = a, \alpha\gamma\left(\frac{\partial y\zeta^{-1}}{\partial y}\right) = 1$$

이고, 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 과 $(\mathbf{x} : \mathbf{r} \cup s)$ 로 생성되는 알렉산더 행렬 A, A' 에 대하여

$$A' = \left\| \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline a & 1 \end{array} \right\|$$

이므로 $A \sim A'$ 이다. 따라서 $E_k(A) = E_k(A')$ 이다. □

즉, 매듭의 매듭군으로부터 기본 아이디얼을 얻고자 할 때, 매듭군을 Tietze 동치를 이용하여 간단한 군 표시로 표현하고 이로부터 알렉산더 행렬을 구한 후 기본 아이디얼을 구하면 되는데 알렉산더 행렬 또한 행렬의 동치관계를 이용하여 더욱 간단히 표현하고 기본 아이디얼을 구할 수 있다.

정의 12. 매듭군의 유한 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r}) = (x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_m)$ 의 알렉산더 행렬 A 와 음이 아닌 정수 k 에 대하여 A 의 모든 $(n-k) \times (n-k)$ 부분행렬의 행렬식의 최대공약수를 k 번째 매듭 다항식(k -th knot polynomial)이라 하고 Δ_k 로 표현한다. $(n-k) > m$ 인 경우에 $\Delta_k = 0$, $(n-k) \leq 0$ 인 경우에 $\Delta_k = 1$ 로 정의한다.

k -번째 매듭다항식 Δ_k 는 단위 $\pm t^n$ 만큼 차이가 나더라도 동치이므로 $\pm t^n$ 를 곱하여

$$\Delta_k = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k, a_0 > 0$$

로 표현한다.

Δ_k 은 알렉산더 행렬 A 의 모든 $(n-k) \times (n-k)$ 부분행렬의 행렬식의 최대공약수이므로 다음 정리가 성립한다.

정리 6. Δ_k 으로 생성되는 아이디얼은 E_k 를 포함한다.

매듭의 Wirtinger 표시 $(\mathbf{x} : \mathbf{r})$ 은 n 개의 생성원과 $(n-1)$ 개의 관계인자로 표현된다. 이 표시의 알렉산더 행렬 A 와 $A' = \begin{vmatrix} A \\ 0 \end{vmatrix}$ 는 동치이므로 $E_1(A) = E_1(A')$ 이다. 행렬 A' 의 모든 $(n-1) \times (n-1)$ 부분행렬 중 오로지 하나의 부분행렬의 행렬식만 0이 아니므로 $E_1(A)$ 은 Δ_1 로 생성되는 아이디얼이다.

정의 13. 1번째 매듭 다항식 Δ_1 을 **알렉산더 다항식**(Alexander polynomial)이라 하고 1 을 생략하여 Δ 으로 표현한다.

예제 5. 세잎 매듭의 알렉산더 행렬 $A = \begin{vmatrix} 1-t+t^2 & -1+t-t^2 \end{vmatrix}$ 에 대하여 알렉산더 다항식은 $\Delta(t) = 1-t+t^2$ 이다.

제 4 장

매듭의 대수적 불변량 계산

이 장에서는 매듭군과 알렉산더 다항식, 기본 아이디얼을 다양한 예를 통하여 구하고자 한다. 특정한 매듭의 일정 부분을 왼쪽으로 n 번 half-twist로 꼬았을 때 나타나는 알렉산더 다항식과 기본 아이디얼의 규칙이 어떻게 변화하는지, n 번 꼬았어도 알렉산더 다항식과 기본 아이디얼이 변하지 않는 매듭은 어떤 것이 존재하는지에 대하여 살펴보고자 한다.

4.1 자명한 매듭의 매듭군과 알렉산더 행렬

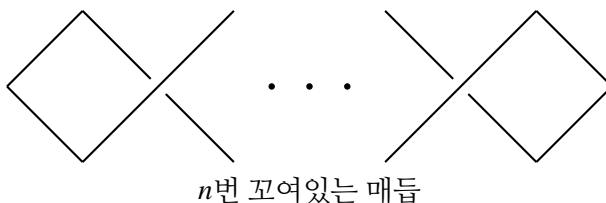


그림 6: 자명한 매듭

그림 6에 표시된 매듭 다이어그램을 사용하여 자명한 매듭의 매듭군을 구하면

$$\pi(\mathbb{R}^3 - K) = |x_1, x_2 : x_1 x_2^{-1}|$$

가 된다. 이로 부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$a_{1,1} = \alpha\gamma \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1x_2^{-1}) = \alpha\gamma(1) = 1,$$

$$a_{1,2} = \alpha\gamma \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1x_2^{-1}) = \alpha\gamma(x_1x_2^{-1}) = 1$$

이고, 따라서

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}$$

가 된다. 그러므로 $\Delta = 1$ 이고 E_k 는 1로 생성되는 아이디얼이다. ($k \geq 1$)

4.2 Torus 매듭($T(2, 2g + 1)$)

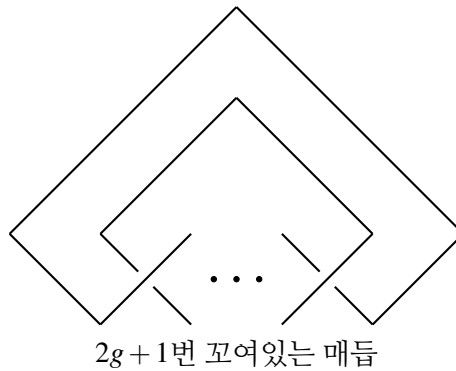


그림 7: Torus 매듭

그림 7에 표시된 매듭 다이어그램을 사용하여 Torus 매듭의 매듭군을 구하면

$$\pi(\mathbb{R}^3 - K) = |x_1, x_2 : (x_1x_2)^g x_1 = (x_2x_1)^g x_2|$$

이 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= \alpha\gamma \frac{\partial}{\partial x_1} ((x_1x_2)^g x_1 - (x_2x_1)^g x_2) \\
&= \alpha\gamma \left(\sum_{i=1}^{g+1} (x_1x_2)^{i-1} - x_2 \sum_{i=1}^g (x_1x_2)^{i-1} \right) \\
&= 1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{2g} - (t + t^3 + \dots + t^{2g-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,2} &= \alpha\gamma \frac{\partial}{\partial x_2} ((x_1x_2)^g x_1 - (x_2x_1)^g x_2) \\
&= \alpha\gamma \left(x_1 \sum_{i=1}^g (x_1x_2)^{i-1} - \sum_{i=1}^{g+1} (x_1x_2)^{i-1} \right) \\
&= -(1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{2g}) + (t + t^3 + \dots + t^{2g-1})
\end{aligned}$$

이고, 따라서

$$\left\| \begin{array}{cc} r_1 & r_2 \end{array} \right\|$$

$$r_1 = 1 + t^2 + \dots + t^{2g} - (t + t^3 + \dots + t^{2g-1})$$

$$r_2 = -(1 + t^2 + \dots + t^{2g}) + (t + t^3 + \dots + t^{2g-1})$$

가 된다.

그러므로 $\Delta = 1 + t^2 + \dots + t^{2g} - (t + t^3 + \dots + t^{2g-1})$ 이고 E_1 은 $1 + t^2 + \dots + t^{2g} - (t + t^3 + \dots + t^{2g-1})$ 로 생성되는 아이디얼, E_k 는 1로 생성되는 아이디얼이다.

다음부터 나오는 매듭들은 sagemath라는 프로그램을 사용하여 일정 부분이 half-twist로 꼬인 매듭의 매듭군과 알렉산더 다항식을 계산하고

특정 규칙을 찾고자 한다. `sagemath`를 통해 매듭의 매듭군과 알렉산더 다항식을 찾는 방법[11]은 다음과 같다.

1. $L = \text{Link}([A_1], [A_2], \dots, [A_n])$ 을 셸 안에 입력하는데, A_i 는 오버패스와 언더패스의 교차점과 인접하는 4개의 패스를 들어가는 방향의 언더패스를 시작으로 반시계방향의 순서대로 표시한다.
2. `L.fundamental_group()`을 셸 안에 입력하여 `shift+enter`를 누르면 매듭의 매듭군에 대한 결과가 나온다.
3. `L.alexander_polynomial()`을 셸 안에 입력하여 `shift+enter`를 누르면 매듭의 알렉산더 다항식의 결과가 나온다.
4. 2에서 나온 매듭군에 대하여 먼저 $GA = L.fundamental_group()$ 을 셸 안에 입력한 후 `shift+enter`를 누르고, `GA.simplified()`을 셸 안에 입력한 후 `shift+enter`를 누르면 더욱 간단한 결과를 볼 수 있다.
5. 매듭 다이어그램을 보고자 한다면 `L.plot()`을 셸 안에 입력하여 `shift+enter`를 누르면 결과가 나타난다.

4.3 Whitehead 매듭의 매듭군과 알렉산더 행렬

그림 8에 표시된 매듭 다이어그램을 `sagemath`를 사용하여 알렉산더 다항식을 구하면 다음과 같다.

1. 1번 꼬여있는 매듭의 매듭군은

$$|x_0, x_1 : x_0 x_1 x_0^{-1} x_1^{-1} x_0^{-1} x_1|$$

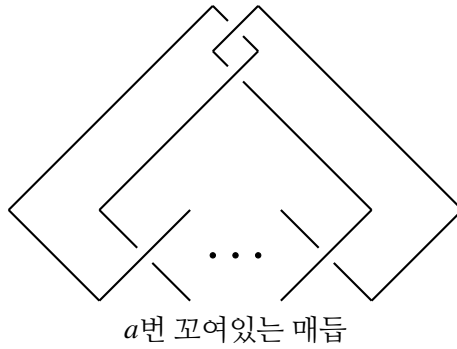


그림 8: Whitehead 매듭

이고 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면

$$\begin{vmatrix} -t+1-t^{-1} & t-1+t^{-1} \end{vmatrix}$$

가 된다. 그러므로 $\Delta = t^2 - t + 1$ 이고 E_1 은 $t^2 - t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 2)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

2. 2번 꼬여있는 매듭의 매듭군은

$$|x_1, x_3 : x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_3x_1^{-1}|$$

이고 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면

$$\begin{vmatrix} t-3+t^{-1} & -t+3-t^{-1} \end{vmatrix}$$

가 된다. 그러므로 $\Delta = t^2 - 3t + 1$ 이고 E_1 은 $t^2 - 3t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 2)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

3. 3번 꼬여있는 매듭의 매듭군은

$$|x_0, x_2 : (x_0 x_2^{-1})^2 x_0^{-1} x_2 x_0^{-1} (x_2^{-1} x_0)^2 x_2 x_0^{-1} x_2|$$

이고 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면

$$\left\| \begin{array}{cc} 2 - 3t^{-1} + 2t^{-2} & -2 + 3t^{-1} - 2t^{-2} \end{array} \right\|$$

가 된다. 그러므로 $\Delta = 2t^2 - 3t + 2$ 이고 E_1 은 $2t^2 - 3t + 2$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 2)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

4. 4번 꼬여있는 매듭의 매듭군은

$$|x_2, x_4 : (x_4^{-1} x_2)^2 (x_4 x_2^{-1})^2 x_4 (x_2 x_4^{-1})^2 (x_2^{-1} x_4)^2 x_2^{-1}|$$

이고 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면

$$\left\| \begin{array}{cc} 2t - 5 + 2t^{-1} & -2t + 5 - 2t^{-1} \end{array} \right\|$$

가 된다. 그러므로 $\Delta = 2t^2 - 5t + 2$ 이고 E_1 은 $2t^2 - 5t + 2$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 2)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

5. 5번 꼬여있는 매듭의 매듭군은

$$|x_1, x_2 : (x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1)^2 x_2^{-1} (x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2)^3 x_1|$$

이고 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면

$$\left\| \begin{array}{cc} 3t^{-1} - 5t^{-2} + 3t^{-3} & -3t^{-1} + 5t^{-2} - 3t^{-3} \end{array} \right\|$$

가 된다. 그러므로 $\Delta = 3t^2 - 5t + 3$ 이고 E_1 은 $3t^2 - 5t + 3$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 2)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

6. 6번 꼬여있는 매듭의 매듭군은

$$|x_2, x_4 : (x_4^{-1}x_2)^3(x_4x_2^{-1})^3x_4(x_2x_4^{-1})^3(x_2^{-1}x_4)^3x_2^{-1}|$$

이고 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면

$$\left\| \begin{array}{cc} 3t - 7 + 3t^{-1} & -3t + 7 - 3t^{-1} \end{array} \right\|$$

가 된다. 그러므로 $\Delta = 3t^2 - 7t + 3$ 이고 E_1 은 $3t^2 - 7t + 3$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 2)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

점점 꼬는 횃수를 늘려가면 $a = 2n - 1$ 일 때, $\Delta = nt^2 - (2n - 1)t + n$ 이고 E_1 은 $nt^2 - (2n - 1)t + n$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 2)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이 되고, $a = 2n$ 일 때 $\Delta = nt^2 - (2n + 1)t + n$ 이고 E_1 은 $nt^2 - (2n + 1)t + n$ 로 생성되는 아이디얼, E_k 은 1로 생성되는 아이디얼로 추정된다.

정리 7. *Whitehead* 매듭은 알렉산더 다항식과 기본 아이디얼로 꼬인 횃수를 구분할 수 있다.

증명 $a = 2n - 1$ 일 때 Whitehead 매듭의 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2 : x_1^{-1}x_2(x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1})^n(x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1})^{n-1}|$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$A = \left\| \begin{array}{cc} -nt + (2n - 1) - nt^{-1} & nt - (2n - 1) + nt^{-1} \end{array} \right\|$$

가 된다. 그러므로 $\Delta = nt^2 - (2n - 1)t + n$ 이고 E_1 은 $nt^2 - (2n - 1)t + n$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 2)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다. $a = 2n$ 일 때 Whitehead 매듭의 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2 : (x_2^{-1}x_2)^n(x_2x_1^{-1})^n x_2(x_1x_2^{-1})^n(x_1^{-1}x_2)^n x_1^{-1}|$$

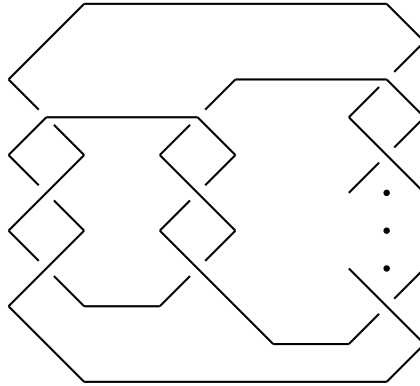
가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$A = \left\| \begin{array}{cc} -nt + (2n + 1) - nt^{-1} & nt - (2n + 1) + nt^{-1} \end{array} \right\|$$

가 된다. 그러므로 $\Delta = nt^2 - (2n + 1)t + n$ 이고 E_1 은 $nt^2 - (2n + 1)t + n$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 2)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다. \square

4.4 Stallings' 매듭

그림 9에 표시된 매듭 다이어그램을 sagemath를 사용하여 알렉산더 다항식을 구하면 다음과 같다.



2n번 꼬여있는 매듭

그림 9: Stallings' 매듭

1. 2번 꼬여있는 매듭의 매듭군은

$$|x_1, x_2, x_6 : x_6 x_1 x_6^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} x_6^{-1} x_2 x_1, x_2^{-1} x_6 x_2 x_6^{-1} x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1}|$$

이고 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면

$$\begin{vmatrix} t-1+t^{-1} & -t^{-1}+t^{-2} & -t+1-t^{-2} \\ -t^2+t-1 & t^2-t+2-t^{-1} & -1+t^{-1} \end{vmatrix}$$

가 된다. 그러므로 $\Delta = t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - t + 1$ 과 $t - 1$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 3)$ 는 1로 생성되는 아이디얼이다.

2. 4번 꼬여있는 매듭의 매듭군은

$$|x_1, x_3, x_8 : x_8 x_1 x_8^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_8^{-1} x_3 x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1}, x_8^{-1} x_3 x_1 x_8 x_1^{-1} x_8^{-1} x_1^{-1} (x_3^{-1} x_8) x_3|$$

이고 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & t-1+t^{-1} & -t+1-t^{-1} \\ -t+1-t^{-1} & 2t^{-1}-2t^{-2} & t-1-t^{-1}+2t^{-2} \end{array} \right\|$$

가 된다. 그러므로 $\Delta = t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - t + 1$ 과 $2t - 2$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 3)$ 는 1로 생성되는 아이디얼이다.

3. 6번 꼬여있는 매듭의 매듭군은

$$|x_1, x_3, x_{10} : x_{10}x_1x_{10}^{-1}x_1^{-1}x_{10}^{-1}x_3x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}, x_1x_{10}x_1x_{10}^{-1}x_1^{-1}(x_3^{-1}x_{10})^2x_3^{-1}(x_{10}^{-1}x_3)^3|$$

이고 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & t-1+t^{-1} & -t+1-t^{-1} \\ t^2-t+1 & -3+3t^{-1} & -t^2+t+2-3t^{-1} \end{array} \right\|$$

가 된다. 그러므로 $\Delta = t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - t + 1$ 과 $3t - 3$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 3)$ 는 1로 생성되는 아이디얼이다.

점점 꼬는 횟수를 늘려가면 $2n$ 번 꼬였을 때 $\Delta = t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - t + 1$ 과 $nt - n$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 3)$ 는 1로 생성되는 아이디얼로 추정된다.

정리 8 ([12]). *Stallings' 매듭의 알렉산더 다항식은 $t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ 이고 기본 아이디얼 E_1 은 $t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2*

는 $t^2 - t + 1$ 과 $nt - n$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k(k \geq 3)$ 는 1로 생성되는 아이디얼이다.

증명 Stalling's 매듭의 불변량을 각각의 경우로 나누어 구하고자 한다.

1. $n = 0$ 일 때 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1, x_3^{-1} x_1 x_3 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1}|$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$A = \begin{vmatrix} -1 + t^{-1} - t^{-2} & 1 - t^{-1} + t^{-2} & 0 \\ t - 1 + t^{-1} & 0 & -t + 1 - t^{-1} \end{vmatrix} \\ \sim \begin{vmatrix} t^2 - t + 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 - t + 1 & 0 \end{vmatrix}$$

가 된다.

2. $n = 1$ 일 때 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : x_3 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 x_1, x_2^{-1} x_3 x_2 x_3^{-1} x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1}|$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$A = \begin{vmatrix} t - 1 + t^{-1} & -t^{-1} + t^{-2} & -t + 1 - t^{-2} \\ -t^2 + t - 1 & t^2 - t + 2 - t^{-1} & -1 + t^{-1} \end{vmatrix} \\ \sim \begin{vmatrix} t^2 - t + 1 & t - 1 & 0 \\ 0 & t^2 - t + 1 & 0 \end{vmatrix}$$

가 된다.

3. $n = -1$ 일 때 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : x_2^{-1}x_3x_2x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1^{-1}, x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_2^{-1}x_3^{-1}x_2x_1|$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$A = \begin{vmatrix} -t^2+t-1 & 1-t^{-1} & t-1+t^{-1} \\ t-1+t^{-1} & -t+1-2t^{-1}+t^{-2} & t^{-1}-t^{-2} \end{vmatrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} t^2-t+1 & -(t-1) & 0 \\ 0 & t^2-t+1 & 0 \end{vmatrix}$$

가 된다.

4. $n > 1$ 일 때, 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2|$$

$$r_1 = x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1}x_2x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1},$$

$$r_2 = x_1x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1}(x_2^{-1}x_3)^{n-1}x_2^{-1}(x_3^{-1}x_2)^n$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & t-1+t^{-1} & -t+1-t^{-1} \\ t^2-t+1 & -n+nt^{-1} & -t^2+t+(n-1)-nt^{-1} \end{vmatrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} 0 & t^2-t+1 & 0 \\ t^2-t+1 & n(t-1) & 0 \end{vmatrix}$$

가 된다.

5. $n < -1$ 일 때, 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2|$$

$$r_1 = x_3 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_2 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1},$$

$$r_2 = (x_3 x_2^{-1})^{-n-1} x_3 (x_2 x_3^{-1})^{-n-1} x_2 x_1 x_3 x_1^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1}$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -t+1-t^{-1} & t-1+t^{-1} \\ -t^3+t^2-t & -nt+n & t^3-t^2+(n+1)t-n \end{vmatrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} 0 & t^2-t+1 & 0 \\ t^2-t+1 & n(t-1) & 0 \end{vmatrix}$$

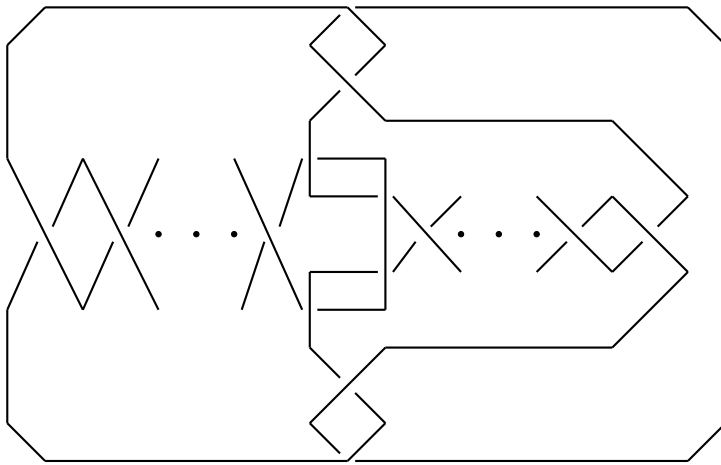
가 된다.

그러므로 $\Delta = t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - t + 1$ 과 $nt - n$ 로 생성되는 아이디얼, E_k ($k \geq$

3)는 1로 생성되는 아이디얼이다. □

즉, Stallings' 매듭의 알렉산더 다항식은 꼬인 횃수와 상관없이 같은 값을 갖지만 E_2 은 값이 달라진다.

4.5 Kanenobu 매듭($K(2p, 2q)$)



2p번 꼬여있는 매듭, 2q번 꼬여있는 매듭

그림 10: Kanenobu 매듭

그림 10에 표시된 매듭 다이어그램을 sagemath를 사용하여 $K(2p, 2q)$ 인 경우에 나타나는 알렉산더 다항식을 구하면 다음과 같다.

1. $K(2, -4)$ 의 알렉산더 행렬은

$$\begin{vmatrix} 1 - 3t^{-1} + t^{-2} & -3 + 6t^{-1} - 3t^{-2} & 2 - 3t^{-1} + 2t^{-2} \\ -t^{-1} + 3t^{-2} - t^{-3} & 1 - 5t^{-2} + 3t^{-3} & -1 + t^{-1} + 2t^{-2} - 2t^{-3} \end{vmatrix}$$

이다. 그러므로 $\Delta = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 6t^3 +$

$11t^2 - 6t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - 3t + 1$ 와 3으로 생성되는 아이디얼, $E_k(k \geq 3)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

2. $K(2, -2)$ 의 알렉산더 행렬은

$$\begin{vmatrix} t-1+t^{-1} & 1-3t^{-1}+t^{-2} & -t+2t^{-1}-t^{-2} \\ t^2+t-1 & t^2-4t-4-t^{-1} & -2t^2+3t-3+t^{-1} \end{vmatrix}$$

이다. 그러므로 $\Delta = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - 3t + 1$ 와 2으로 생성되는 아이디얼, $E_k(k \geq 3)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

3. $K(2, 2)$ 의 알렉산더 행렬은

$$\begin{vmatrix} -t^2+3t-1 & 0 & t^2-3t+1 \\ 0 & t^{-1}-3t^{-2}+t^{-3} & -t+3t^{-2}+t^{-3} \end{vmatrix}$$

이다. 그러므로 $\Delta = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - 3t + 1$ 으로 생성되는 아이디얼, $E_k(k \geq 3)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

4. $K(2, 4)$ 의 알렉산더 행렬은

$$\begin{vmatrix} 0 & -t^2+3t-1 & t^2-3t+1 \\ t-3+t^{-1} & -2t+5-2t^{-1} & t-2+t^{-1} \end{vmatrix}$$

이다. 그러므로 $\Delta = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - 3t + 1$ 와 1으로 생성되는 아이디얼, $E_k(k \geq 3)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

5. $K(4, -4)$ 의 알렉산더 행렬은

$$\left\| \begin{array}{ccc} -t^2 + 3t - 1 & 0 & t^2 - 3t + 1 \\ -4t + 9 - 7t^{-1} + t^{-2} & -1 + 3t^{-1} - t^{-2} & 4t - 8 + 4t^{-1} \end{array} \right\|$$

이다. 그러므로 $\Delta = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - 3t + 1$ 와 4으로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 3)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

6. $K(4, -2)$ 의 알렉산더 행렬은

$$\left\| \begin{array}{ccc} -t + 3 - t^{-1} & 0 & t - 3 + t^{-1} \\ -2t^2 + 3t - 2 & -t + 3 - t^{-1} & 2t^2 - 2t - 1 + t^{-1} \end{array} \right\|$$

이다. 그러므로 $\Delta = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - 3t + 1$ 와 3으로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 3)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

7. $K(4, 2)$ 의 알렉산더 행렬은

$$\left\| \begin{array}{ccc} -t + 3 - t^{-1} & -t^2 + 4t - 4 + t^{-1} & t^2 - 3t + 1 \\ 1 - 2t^{-1} + t - 2 & t - 2 & -t + 1 + 2t^{-1} - t - 2 \end{array} \right\|$$

이다. 그러므로 $\Delta = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - 3t + 1$ 와 1으로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 3)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

8. $K(4,4)$ 의 알렉산더 행렬은

$$\left\| \begin{array}{cccc} 2t-2 & 2t^2-3t+1 & -2t^2+3t+1-t^{-1} & -2t+t^{-1} \\ -t^2+3t-1 & -t^3+4t^2-4t+1 & t^3-4t^2+4t-1 & t^2-3t+1 \\ -2t+4-2t^{-1} & -2t^2+6t-7+2t^{-1} & 2t^2-6t+6-2t^{-1} & 2t-3+2t^{-1} \end{array} \right\|$$

이다. 그러므로 $\Delta = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - 3t + 1$ 으로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 3)$ 은 1로 생성되는 아이디얼이다.

점점 꼬는 횟수를 늘려가면 왼쪽이 $2p$ 번, 오른쪽이 $2q$ 꼬였을 때 $\Delta = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - 3t + 1$ 과 $|p - q|$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 3)$ 는 1로 생성되는 아이디얼로 추정된다.

정리 9 ([13],[14]). *Kanabou* 매듭 $K(2p, 2q)$ 의 알렉산더 다항식은 $t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 이고 기본 아이디얼 E_1 은 $t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - 3t + 1$ 과 $|p - q|$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 3)$ 는 1로 생성되는 아이디얼이다.

증명 $K(2p, 2q)$ 의 불변량을 각각의 경우로 나누어 구하고자 한다.

1. $p = 0, q = 0$ 일 때, 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2|$$

$$r_1 = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1^{-1} x_2^{-1},$$

$$r_2 = x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} x_3 x_1^{-1} x_3^{-1} x_1$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$A = \begin{vmatrix} t^2 - 3t + 1 & -t^2 + 3t - 1 & 0 \\ t - 3 + t^{-1} & 0 & -t + 3 - t^{-1} \end{vmatrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} t^2 - 3t + 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 - 3t + 1 & 0 \end{vmatrix}$$

가 된다.

2. $p > 0, q = 0$ 일 때, 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2|$$

$$r_1 = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$$

$$x_1 x_2 x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_1^{-1} x_3 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_1 x_3,$$

$$r_2 = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1})^p$$

$$(x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_3)^p$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} t^2 - 3t + 1 & pt - p & 0 \\ 0 & t^2 - 3t + 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$a_{1,1} = -t + 5 - 8t^{-1} + 5t^{-2} - t^{-3},$$

$$a_{1,2} = t - 5 + 7t^{-1} - 2t^{-2},$$

$$a_{1,3} = t^{-1} - 3t^{-2} + t^{-3},$$

$$a_{2,1} = pt^2 - (3p+1)t + (3p+3) - (p+1)t^{-1},$$

$$a_{2,2} = -pt^2 + (3p+1)t - (2p+3) + t^{-1},$$

$$a_{2,3} = -p + pt^{-1}$$

가 된다.

3. $p < 0, q = 0$ 일 때, 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2|$$

$$r_1 = x_1 x_2 x_3 x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 x_3^{-1} x_2^{-1} x_3 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_3 x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 x_3$$

$$x_2^{-1} x_3 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 x_3 x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 x_3 x_2^{-1} x_3 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2,$$

$$r_2 = (x_1 x_2 x_3 x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 x_3^{-1} x_2^{-1})^{-p-1} x_1 (x_2 x_3 x_2^{-1} x_3 x_2 x_3^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1})^{-p} x_3 x_2^{-1} x_3^{-1}$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\ \sim \begin{vmatrix} t^2 - 3t + 1 & -pt + p & 0 \\ 0 & t^2 - 3t + 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$a_{1,1} = 1 - 3t^{-1} + t^{-2},$$

$$a_{1,2} = -t^2 + 5t - 8 + 5t^{-1} - t^{-2},$$

$$a_{1,3} = t^2 - 5t + 7 - 2t^{-1},$$

$$a_{2,1} = pt - p,$$

$$a_{2,2} = -pt^3 + (3p+1)t^2 - (3p+3)t + (p+1),$$

$$a_{2,3} = pt^3 - (3p+1)t^2 + (2p+3)t - 1$$

가 된다.

4. $p = 0, q > 0$ 일 때, 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2|$$

$$r_1 = x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1(x_2^{-1}x_3)^q(x_2x_3^{-1})^{q-1}x_2x_1^{-1}x_3^{-1}x_1(x_2^{-1}x_3)^{q-1}x_2^{-1}(x_3^{-1}x_2)^q,$$

$$r_2 = (x_2^{-1}x_3)^q(x_2x_3^{-1})^qx_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1(x_2^{-1}x_3)^qx_2^{-1}(x_3^{-1}x_2)^qx_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_1$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\ \sim \begin{vmatrix} t^2 - 3t + 1 & -q & 0 \\ 0 & t^2 - 3t + 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$a_{1,1} = 1 - 3t^{-1} + t^{-2},$$

$$a_{1,2} = qt - 2q + qt^{-1},$$

$$a_{1,3} = -(q-1)t + (2q-3) + (-q+1)t^{-1},$$

$$a_{2,1} = -1 + 3t^{-1} - t^{-2},$$

$$a_{2,2} = (q+1) - (2q+3)t^{-1} + (q+1)t^{-2},$$

$$a_{2,3} = -q + 2qt^{-1} - qt^{-2}$$

가 된다.

5. $p = 0, q < 0$ 일 때, 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3, x_4 : r_1, r_2, r_3|$$

$$r_1 = x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_4 x_1^{-1} x_4^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_4,$$

$$r_2 = x_2^{-1} x_3 x_2 x_3^{-1} x_2 x_4 x_2^{-1} x_3 x_2^{-1} (x_3^{-1} x_2)^2 x_4^{-1},$$

$$r_3 = (x_1 x_3^{-1} x_2 x_3^{-1})^{-q-1} x_1 x_3^{-1} (x_1^{-1} x_4 x_2^{-1} x_3)^{-q}$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix}$$

$$\sim \begin{vmatrix} t^2 - 3t + 1 & 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & t^2 - 3t + 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$a_{1,1} = 1 - 2t^{-1} + t^{-2},$$

$$a_{1,2} = -1 + t^{-1},$$

$$a_{1,3} = 0,$$

$$a_{1,4} = 2t^{-1} - t^{-2},$$

$$a_{2,1} = 0,$$

$$a_{2,2} = -2t + 4 - t^{-1},$$

$$a_{2,3} = t - 3 + t^{-1},$$

$$a_{2,4} = t - 1,$$

$$a_{3,1} = -(q+1) + 1 + qt^{-1},$$

$$a_{3,2} = -(q+1) + qt^{-1},$$

$$a_{3,3} = (q+1) - 1 - qt^{-1},$$

$$a_{3,4} = (q+1) - qt^{-1}$$

가 된다.

6. $p > 0, q > 0$ 일 때, 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2|$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_2x_3x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}x_2(x_1x_3^{-1})^{p-1}x_1(x_3x_1^{-1})^p \\
&\quad x_2^{-1}x_3x_2x_1x_3^{-1}x_2^{-1}x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_2(x_1x_3^{-1})^{p-1}(x_1^{-1}x_3)^{p-1}, \\
r_2 &= (x_2x_1x_3^{-1}x_2^{-1}x_3x_1^{-1})^{q-1}x_3^{-1}x_2(x_1x_3^{-1})^{p-1}x_1(x_3x_1^{-1})^p x_2^{-1}x_3x_2 \\
&\quad (x_1x_3^{-1})^p(x_1^{-1}x_3)^{p-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3(x_1x_3^{-1}x_2x_3x_1^{-1}x_2^{-1})^q x_1x_3^{-1}x_2^{-1}x_3x_1^{-1}
\end{aligned}$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$\begin{aligned}
A &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\
&\sim \begin{vmatrix} t^2 - 3t + 1 & |p - q| & 0 \\ 0 & t^2 - 3t + 1 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$a_{1,1} = t - 3 + t^{-1},$$

$$a_{1,2} = 0,$$

$$a_{1,3} = -t + 3 - t^{-1},$$

$$a_{2,1} = (p - q)t^2 + (-2p + 2q)t + (p - q),$$

$$a_{2,2} = t - 3 + t^{-1},$$

$$a_{2,3} = (-p + q)t^2 + (2p - 2q - 1)t + (-p + q + 3) - t^{-1}$$

가 된다.

7. $p < 0, q < 0$ 일 때, 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2|$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_2x_3x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}x_2(x_1x_3^{-1})^{-p-1}x_1(x_3x_1^{-1})^{-p} \\
&\quad x_2^{-1}x_3x_2x_1x_3^{-1}x_2^{-1}x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_2(x_1x_3^{-1})^{-p-1}(x_1^{-1}x_3)^{-p-1}, \\
r_2 &= (x_2x_1x_3^{-1}x_2^{-1}x_3x_1^{-1})^{-q-1}x_3^{-1}x_2(x_1x_3^{-1})^{-p-1}x_1(x_3x_1^{-1})^{-p}x_2^{-1}x_3^{-1}x_2 \\
&\quad (x_1x_3^{-1})^{-p}(x_1^{-1}x_3)^{-p-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3(x_1x_3^{-1}x_2x_3x_1^{-1}x_2^{-1})^{-q-1}x_1x_3^{-1}x_2x_3x_1^{-1}
\end{aligned}$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$\begin{aligned}
A &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\
&\sim \begin{vmatrix} t^2 - 3t + 1 & |p - q| & 0 \\ 0 & t^2 - 3t + 1 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$a_{1,1} = t - 3 + t^{-1},$$

$$a_{1,2} = 0,$$

$$a_{1,3} = -t + 3 - t^{-1},$$

$$a_{2,1} = (p - q)t + (-2p + 2q) + (p - q)t^{-1},$$

$$a_{2,2} = -1 + 3t^{-1} - t^{-2},$$

$$a_{2,3} = (-p + q)t + (2p - 2q + 1) + (-p + q - 3)t^{-1} + t^{-2}$$

가 된다.

8. $p > 0, q < 0$ 일 때, 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2|$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_2x_1x_3^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2(x_1x_3^{-1})^p x_1(x_3x_1^{-1})^p \\
&\quad x_2^{-1}x_1x_2x_3x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_2(x_1x_3^{-1})^{p+1}(x_1^{-1}x_3)^p, \\
r_2 &= (x_2x_3x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_3^{-1})^{-q}x_1^{-1}x_2(x_1x_3^{-1})^p x_1(x_3x_1^{-1})^p x_2^{-1}x_1^{-1}x_2 \\
&\quad (x_1x_3^{-1})^p (x_1^{-1}x_3)^p x_1^{-1}x_2^{-1}x_1(x_3x_1^{-1}x_2x_1x_3^{-1}x_2^{-1})^{-q-1}x_3x_1^{-1}x_2x_1x_3^{-1}
\end{aligned}$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$\begin{aligned}
A &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\
&\sim \begin{vmatrix} t^2 - 3t + 1 & |p - q| & 0 \\ 0 & t^2 - 3t + 1 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$a_{1,1} = -t + 3 - t^{-1},$$

$$a_{1,2} = 0,$$

$$a_{1,3} = t - 3 + t^{-1},$$

$$a_{2,1} = (-p + q)t + (2p - 2q + 1) + (-p + q - 3)t^{-1} + t^{-2},$$

$$a_{2,2} = -1 + 3t^{-1} - t^{-2},$$

$$a_{2,3} = (p - q)t + (-2p - 2q) + (p - q)t^{-1}$$

가 된다.

9. $p < 0, q > 0$ 일 때, 매듭군을 구하면

$$|x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2|$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_2x_1x_3^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2(x_1x_3^{-1})^{-p}x_1(x_3x_1^{-1})^{-p} \\
&\quad x_2^{-1}x_1x_2x_3x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_2(x_1x_3^{-1})^{-p+1}(x_1^{-1}x_3)^{-p}, \\
r_2 &= (x_2x_3x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_3^{-1})^{q-1}x_1^{-1}x_2(x_1x_3^{-1})^{-p}x_1(x_3x_1^{-1})^{-p}x_2^{-1}x_1x_2 \\
&\quad (x_1x_3^{-1})^{-p}(x_1^{-1}x_3)^{-p}x_1^{-1}x_2^{-1}x_1(x_3x_1^{-1}x_2x_1x_3^{-1}x_2^{-1})^qx_3x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_3^{-1}
\end{aligned}$$

가 된다. 이로부터 알렉산더 행렬을 구하면,

$$\begin{aligned}
A &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \\
&\sim \begin{vmatrix} t^2 - 3t + 1 & |p - q| & 0 \\ 0 & t^2 - 3t + 1 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$a_{1,1} = -t + 3 - t^{-1},$$

$$a_{1,2} = 0,$$

$$a_{1,3} = t - 3 + t^{-1},$$

$$a_{2,1} = (-p + q)t^2 + (2p - 2q - 1)t + (-p + q + 3) - t^{-1},$$

$$a_{2,2} = t - 3 + t^{-1},$$

$$a_{2,3} = (p - q)t^2 + (-2p - 2q)t + (p - q)$$

가 된다.

그러므로 $\Delta = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 이고 E_1 은 $t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t + 1$ 로 생성되는 아이디얼, E_2 는 $t^2 - 3t + 1$ 과 $|p - q|$ 로 생성되는 아이디얼, $E_k (k \geq 3)$ 는 1로 생성되는 아이디얼이다. \square

즉, $K(2p, 2q)$ 의 알렉산더 다항식은 꼬인 횃수와 상관없이 같은 값을 갖지만 기본 아이디얼은 양쪽의 꼬인 횃수의 차이가 같은 경우에만 같은 값을 갖는다.

제 5 장

결론

\mathbb{R}^3 에 단위원이 매장되어 생성된 매듭은 매듭 다이어그램으로부터 완전한 불변량인 매듭군을 구하였다. 이렇게 구해진 매듭군은 Tietze 동치에 의하여 동형인 매듭을 찾을 수 있는데 두 매듭이 주어졌을 때 매듭이 동형인지 매듭군으로 판단하기는 쉽지 않다. 이에 더욱 쉽게 분류하기 위하여 매듭군으로부터 매듭의 불변량 알렉산더 다항식과 기본 아이디얼을 구하였다. 여러 매듭 중 일정하게 꼬여있는 매듭의 알렉산더 다항식과 기본 아이디얼이 일정한 규칙을 가지고 있는 매듭에 대하여 살펴보고, 꼬인 횟수가 달라지더라도 알렉산더 다항식이 달라지지 않는 Stallings' 매듭과 Kanenobu 매듭에 대하여 보았다. 특히 Kanenobu 매듭은 꼬인 횟수에 따라 알렉산더 다항식 뿐만 아니라 기본 아이디얼도 같은 값을 가질 수 있었다. 즉, 두 매듭의 알렉산더 다항식과 기본아이디얼의 같다면 동형인지 판단하기 어렵기 때문에 다른 불변량을 이용하여 확인해야 할 것이다.

참고 문헌

- [1] C. M. Gordon and J. Luecke, “Knots are determined by their complement,” *Bull. of the AMS*, vol. 20, pp. 83–88, 1989.
- [2] D. Rolfsen, *Knots and links*. Berkeley, CA, Publish or Perish, Inc., 1976.
- [3] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*. Classics in Mathematics, Springer, 2001.
- [4] R. H. Fox, “Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring,” *Ann. of Math. (2)*, vol. 57, pp. 547–560, 1953.
- [5] R. H. Fox, “Free differential calculus. II. The isomorphism problem of groups,” *Ann. of Math. (2)*, vol. 59, pp. 196–210, 1954.
- [6] G. Torres and R. H. Fox, “Dual presentations of the group of a knot,” *Ann. of Math. (2)*, vol. 59, pp. 211–218, 1954.
- [7] R. H. Fox, “Free differential calculus. III. Subgroups,” *Ann. of Math. (2)*, vol. 64, pp. 407–419, 1956.
- [8] K.-T. Chen, R. H. Fox, and R. C. Lyndon, “Free differential calculus. IV. The quotient groups of the lower central series,” *Ann. of Math. (2)*, vol. 68, pp. 81–95, 1958.
- [9] R. H. Fox, “Free differential calculus. V. The Alexander matrices re-examined,” *Ann. of Math. (2)*, vol. 71, pp. 408–422, 1960.
- [10] R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to knot theory*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Reprint of the 1963 original, Graduate Texts in Mathematics, No. 57.
- [11] T. S. D. Team, *Sage Reference Manual: Knot Theory Release 7.6*, Mar. 2017.

- [12] L. R. Hitt and D. S. Silver, “Ribbon knot families via Stallings’ twists,” *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, vol. 50, no. 3, pp. 356–372, 1991.
- [13] T. Kanenobu, “Infinitely many knots with the same polynomial invariant,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 97, no. 1, pp. 158–162, 1986.
- [14] T. Kanenobu, “Examples on polynomial invariants of knots and links,” *Math. Ann.*, vol. 275, no. 4, pp. 555–572, 1986.

Abstract

Algebraic invariants of knot based on elementary ideal and Alexander polynomoial

Yeseul Kim

Mathematics Education Major

Graduate School of Education

Sungshin University

Knot is an embedded circle in a real 3-space \mathbb{R}^3 or a closed 3-dimensional sphere S^3 . In the article we studied knot group, a well known classical invariant of knot, Alexander matrix which is obtained from a finite group presentation of knot group via Fox's free differential calculus and its elementary ideals and Alexander polynomial. Especially, we studied some conditions when two knots share the same Alexander polynomial or elementary ideals. Finally, we give several explicit computation of knot group, Alexander matrix, elementary ideals and Alexander polynomial for various family of knots.

Keywords : Alexander polynomial, elementary ideal