



저작자표시 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#) 

윤 기 현教授指導

碩士學位 請求論文

모스 이론을 이용한 4차원
다양체에 관한 연구

2013

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

황지영

모스 이론을 이용한 4차원 다양체에 관한 연구

윤 기 현教授指導

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

2012년 11월

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

황지영

認 准 書

황지영의 碩士學位 論文으로 認准함

審査委員 강 병 개 印

審査委員 윤 기 현 印

審査委員 정 해 남 印

2012년 11월

誠信女子大學校 教育大學院

논문개요

모스 이론을 통하여 다양체의 핸들바디 구성에 대하여 연구한다. 즉, 모스함수를 통해 매끄러운 다양체의 핸들바디를 구성하고, 같은 매끄러운 다양체에 주어지는 서로 다른 핸들바디를 통해 미분동형인 다양체에서 성립하는 핸들바디들 간의 관계들에 대하여 살펴본다. 이 결과는 두 다양체가 미분동형인가를 판단하는 좋은 수단이 된다.

먼저 일반적인 차원의 모스함수와 기본 용어를 정리하고 다양체에서 모스함수가 존재하는가에 대해 살펴볼 것이다. 그리고 모스함수를 이용하여 핸들바디를 어떻게 구성하는지 알아보고 모스함수를 변형하여 서로 다른 임계점들에 대한 임계값을 다르게 줄 수 있음을 확인한다. 그리고 핸들바디를 다룰 수 있는 도구인 핸들 슬라이딩과 상쇄에 대해 알아본다.

마지막으로 모스이론을 이용하여 구성한 핸들바디의 예를 2차원, 3차원과 4차원에서 찾아보고 핸들바디의 구조가 유일하게 존재하지 않음을 확인한다.

주요어 : 다양체, 모스함수, 핸들바디

목 차

I.	서론	1
II.	모스함수를 이용한 m 차원 다양체의 핸들바디들	2
2.1	m 차원 다양체의 모스함수	2
2.2	모스함수의 존재성	6
2.3	임계점의 위치	14
2.4	다양체의 핸들분할	19
2.5	핸들 슬라이딩과 상쇄	27
III.	핸들분할의 예	44
3.1	2차원 다양체의 예	44
3.2	3차원 다양체의 예	49
3.3	4차원 다양체의 예	54
	참고 문헌	62
	Abstract	64

그림 목 차

그림 1.	D^2 에 붙은 1핸들 [3]	49
그림 2.	P^3 의 히가드 다이어그램 [5]	52
그림 3.	링크 다이어그램에서 겹치지는 부분의 부호 [3]	55
그림 4.	히가드 분할 [3]	57
그림 5.	$S^2 \times S^2$ 커비 다이어그램 [3]	57
그림 6.	\mathbf{CP}^2 커비 다이어그램 [5]	59
그림 7.	F 의 커비 다이어그램 [2]	59
그림 8.	C 의 커비 다이어그램 [2]	60
그림 9.	함수 f [2]	60
그림 10.	S^4 의 커비 다이어그램 [2]	61
그림 11.	$S^2 \times S^2$ 의 커비 다이어그램 [2]	61

제 1 장

서론

유한차원의 모스이론은 매끄러운 위상적 다양체를 미분동형으로 분류하는 강력한 도구가 되고 다양체를 잘 묘사할 수 있도록 도와준다. 그러므로 이 논문에서는 유한차원의 모스이론에 대해 살펴보기로 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다.

제 2장에서는 일반적인 차원에서의 모스함수, 임계점 그리고 헤세 행렬에 대해 정의하고 이 모스함수의 존재성에 대해 살펴보았다. 모스함수를 이용한 핸들바디를 정의하고 모스함수를 변형하여 서로 다른 임계점에 다른 임계값을 줄 수 있다는 것을 보였다. 콤팩트 다양체들의 핸들바디들의 일반적인 이론에 대해 알아보았다. 그리고 이를 이용하여 핸들바디를 다룰 수 있는 도구인 핸들 슬라이딩과 상쇄에 대해 알아보았다.

제 3장에서는 제 2장에서 다룬 내용을 바탕으로 2차원 다양체의 임계점과 헤세행렬을 구체적으로 계산하여 핸들바디를 구성하였다. 또한 3차원과 4차원 다양체들의 핸들바디 구조를 몇몇 예제를 통하여 확인하였다.

제 2 장

모스함수를 이용한 m 차원 다양체의 핸들바디들

일반적인 m 차원 다양체에 대한 모스이론에 대해 알아볼 것이다. 1절에서는 m 차원 다양체와 모스함수에 대해 정의하고 2절에서는 다양체에서 모스함수의 존재성을 증명할 것이다. 3절에서는 그래디언트형 벡터장에 대해 논의하고, 모스함수를 약간 변형하여 서로 다른 임계점에서 다른 임계값을 갖게 할 수 있음을 증명할 것이다. 4절에서는 콤팩트 다양체들의 핸들바디들의 일반적인 이론을 제공하고 5절에서는 핸들 슬라이딩(sliding)과 상쇄(canceling)를 이용하여 핸들바디들을 재구성 할 것이다.

2.1 m 차원 다양체의 모스함수

m 차원 다양체의 모스함수를 이해하기 위하여 m 차원 다양체의 개념에 대하여 알아보자.

정의 2.1.1. [4] 위상공간 M 이 가산기저를 갖는 하우스도르프 공간(Hausdorff space)으로 각 점에 대하여 그 점을 포함하는 근방 중 \mathbb{R}^m 또는

$$\mathbb{H}^m := \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$$

과 위상동형인 것이 있으면 M 를 m 차원 다양체(manifold)라 한다.

정의 2.1.2. [4] M 이 m 차원 다양체이고 $U \cap V \neq \emptyset$ 인 임의의 두 좌표계 (coordinate chart) $\phi_u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\phi_v : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ 에 대하여 $\phi_v \circ \phi_u^{-1}$ 사상이 미분가능하면 M 을 m 차원 매끄러운 다양체(smooth manifold)라고 한다.

이 때, $\phi_v \circ \phi_u^{-1}$ 을 추이사상(transition map)이라 한다.

위 정의에서 알 수 있듯이 M 이 m 차원 다양체이면 각 점 $p \in M$ 에서 매끄러운 좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 가 존재함을 알 수 있다.

정의 2.1.3. [4] 각 점 $p \in M$ 과 점 p 근처의 임의의 좌표계 ϕ 에 대하여 $f \circ \phi^{-1}$ 가 미분가능할 때, 함수 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 를 매끄럽다(smooth)고 한다.

이제부터 M 을 m 차원 매끄러운 다양체라 하고, 함수 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 를 매끄러운 함수라고 하자. 이를 이용하여 임계점과 헤세행렬을 정의하고 모스함수를 정의할 것이다.

정의 2.1.4. [5] 점 $p_0 \in M$ 과 국소좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 에 대해

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_m}(p_0) = 0$$

을 만족하면 점 p_0 를 함수 f 의 임계점(critical point)라 한다.

이 정의는 좌표계 선택에는 무관하다. 즉 좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 에서 만족되면 임의의 다른 좌표계 (y_1, y_2, \dots, y_m) 에 대해서도 만족된다.

정리 2.1.5. [5] 임계점은 좌표계 선택에 무관하다.

증명

$$\begin{aligned}
 \nabla(f \circ \phi_u^{-1}) &= \nabla(f \circ \phi_v^{-1} \circ \phi_v \circ \phi_u^{-1}) \\
 &= \left(\frac{\partial(f \circ \phi_v^{-1} \circ \phi_v \circ \phi_u^{-1})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f \circ \phi_v^{-1} \circ \phi_v \circ \phi_u^{-1})}{\partial x_m} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial(f \circ \phi_v^{-1})}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial(f \circ \phi_v^{-1})}{\partial y_m} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \\
 &= \nabla(f \circ \phi_v^{-1}) \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

역함수가 존재하므로 $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \neq 0$ 이다.

그러므로 $\nabla(f \circ \phi_u^{-1}) \neq 0 \Leftrightarrow \nabla(f \circ \phi_v^{-1}) \neq 0$ 가 된다. □

정의 2.1.6. [5] 점 p_0 가 함수 f 의 임계점일 때, $f(p_0) = c$ 가 되는 함수값 $c \in \mathbb{R}$ 를 함수 f 의 임계값(critical value)이라고 한다.

정의 2.1.7. [5] 점 p_0 가 함수 f 의 임계점이라 하자. 그러면 다음에 정의된 $m \times m$ 행렬을 임계점 p_0 에 대한 함수 f 의 헤세행렬(Hessian)이라고

한다.

$$H_f(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(p_0) \end{pmatrix}$$

함수 f 의 헤세행렬의 (i, j) 성분은 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)$ 이고, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p_0)$ 이므로 대칭행렬이다.

새로운 좌표계 (y_1, y_2, \dots, y_m) 에서 f 를 두 번 편미분 한 것과 원래 좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 에서 두 번 편미분 한 것을 비교하면

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_h \partial y_k}(p_0) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial y_h}(p_0) \frac{\partial x_j}{\partial y_k}(p_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)$$

을 얻는다.

그러므로 두 좌표계의 헤세행렬을 비교해보면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$H_f(p_0) = J(p_0)^t H_f(p_0) J(p_0)$$

여기서, $H_f(p_0)$ 는 좌표계 (y_1, y_2, \dots, y_m) 에 대한 헤세행렬이고 $H_f(p_0)$ 은 좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 에 대한 헤세행렬이고 $J(p_0)$ 는 (y_1, y_2, \dots, y_m)

에서 (x_1, x_2, \dots, x_m) 으로 좌표변환의 야코비안(jacobian)이다.

$$J(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

이제 정상적인 임계점과 퇴화하는 임계점에 대해 정의하자.

정의 2.1.8. [5] 임계점 $p_0 \in M$ 에 대해 $\det H_f(p_0) \neq 0$ 이면 정상적인 임계점(non-degenerate critical point)이라 하고, $\det H_f(p_0) = 0$ 퇴화하는 임계점(degenerate critical point)이라 한다.

정리 2.1.9. [5] 임계점이 정상적인 임계점인지 퇴화하는 임계점인지는 좌표계 선택에 무관하다.

증명 $\det H_f(p_0) = \det J'(p_0) \det H_f(p_0) \det J(p_0)$ 이고, $\det J(p_0) \neq 0$

그러므로 $\det H_f(p_0) \neq 0 \Leftrightarrow \det H_f(p_0) \neq 0$ □

이제 마지막으로 모스함수에 대해 정의하자.

정의 2.1.10. [5] 함수 f 의 모든 임계점이 정상적인 임계점일 때, 함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 를 모스함수(morse function)라고 한다.

2.2 모스함수의 존재성

앞 절에서 정의한 모스함수의 존재성을 증명하고자 한다. 존재성을 증명하기 전에 다음 정리를 통해서 정상적인 임계점 근처에서 간단한 표준형태의 함수로 볼 수 있음을 알 수 있다. 그리고 표준형태의 함수들을 통해 정상적인 임계점 근처에서는 다른 임계점을 가지지

않는다는 사실을 알 수 있다. 그러므로 정상적인 임계점은 고립점이 된다.

정리 2.2.1. [5] 점 p_0 를 f 의 정상적인 임계점이라고 하자. 그러면 p_0 에 대한 적절한 국소좌표계 (X_1, X_2, \dots, X_m) 을 선택해서 f 를 다음과 같은 표준형태로 표현할 수 있다.

$$f = -X_1^2 - X_2^2 - \dots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_m^2 + c$$

여기서, p_0 는 원점과 대응되고 $c = f(p_0)$ 인 상수이다.

증명 원점에서 대응된 임계점 p_0 에서 국소좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 를 선택하자. 그리고 $f(p_0) = 0$ 이라고 가정하자.

그러면 $f(0, \dots, 0) = 0$ 이라는 가정 아래 원점 근처에 정의된 m 개의 매끄러운 함수 $g_1(x_1, \dots, x_m)$, $g_2(x_1, \dots, x_m)$, \dots , $g_m(x_1, \dots, x_m)$ 를 얻을 수 있다. 즉, $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1, \dots, x_m)$ 이고 $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(0, \dots, 0) = g_i(0, \dots, 0)$ 의 값을 갖게 된다. 그러므로 $g_i(x_1, \dots, x_m)$ 에도 미적분학의 기본적인 사실을 적용하여 원점 근처에 정의된 m 개의 매끄러운 함수 $h_{i1}(x_1, \dots, x_m)$, $h_{i2}(x_1, \dots, x_m)$, \dots , $h_{im}(x_1, \dots, x_m)$ 를 얻을 수 있다. 즉, $g_i(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^m x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m)$ 이고

$$f = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_m)$$

이다. $H_{ij} = \frac{h_{ij} + h_{ji}}{2}$ 라 두면, $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j H_{ij}(x_1, \dots, x_m)$ 이고, $H_{ij}(x_1, \dots, x_m) = H_{ji}(x_1, \dots, x_m)$ 이다.

$$\text{그러므로 } f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m) \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{m1} & \cdots & H_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{가}$$

된다.

함수 f 의 표준형태는 이차식의 특별한 형태로 되어 있다. 그러므로 귀납법에 의해 표준형태의 이차식으로 f 를 바꿀 것이다. 원점에서 $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j H_{ij}(x_1, \dots, x_m)$ 을 두 번 편미분하자.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0, \dots, 0) = 2H_{ij}(0, \dots, 0)$$

점 p_0 는 정상적인 임계점이므로 $\det H_{ij}(0, \dots, 0) \neq 0$ 이다. 그러므로 국소좌표계 (x_1, \dots, x_m) 의 적절한 선형변형 후에 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \dots, 0) \neq 0$ 이라 가정할 수 있다. 그러므로 $H_{11}(0, \dots, 0) \neq 0$ 이다. H_{11} 은 연속이므로 원점 근방에서 H_{11} 은 0이 아니다. 이제 $X_1 = \sqrt{|H_{11}|}(X_1 + \sum_{i=2}^m x_i \frac{H_{1i}}{H_{11}})$ 으로 정의된 좌표계 (X_1, x_2, \dots, x_m) 을 소개하자. 원점에서 (X_1, x_2, \dots, x_m) 에서 (x_1, x_2, \dots, x_m) 으로 변하는 야코비안의 행렬식은 0이 아니다. 그러므로 (X_1, x_2, \dots, x_m) 은 국소좌표계가 된다.

$$\begin{aligned} X_1^2 &= |H_{11}| \left(X_1 + \sum_{i=2}^m x_i \frac{H_{1i}}{H_{11}} \right)^2 \\ &= \begin{cases} H_{11} X_1^2 + 2 \sum_{i=2}^m x_i x_j H_{1i} + \frac{\sum_{i=2}^m x_i H_{1i}^2}{H_{11}}, & (H_{11} > 0) \\ -H_{11} X_1^2 - 2 \sum_{i=2}^m x_i x_j H_{1i} - \frac{\sum_{i=2}^m x_i H_{1i}^2}{H_{11}}, & (H_{11} < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

그러므로 f 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f = \begin{cases} X_1^2 + \sum_{i,j=2}^m x_i x_j H_{ij} - \frac{\sum_{i=2}^m x_i H_{i1}^2}{H_{11}}, & (H_{11} > 0) \\ -X_1^2 + 2 \sum_{i,j=2}^m x_i x_j H_{ij} - \frac{\sum_{i=2}^m x_i H_{i1}^2}{H_{11}}, & (H_{11} < 0) \end{cases}$$

이와 같은 방법으로 X_2^2 을 만들어 나가서 더하면 간단하게 이차식 형태로 나타낼 수 있다. 그러므로 표준형태로 f 를 나타낼 수 있다는 것은 귀납법에 의해 증명할 수 있다 \square

표준형태 함수의 음수 부호의 개수 λ 는 대각화한 $H_f(p_0)$ 의 주대각선 원소의 음수 개수이다. 실베스터의 법칙(Sylvester's law)에 따르면 λ 는 헤세행렬의 대각화 방법에 의존하지 않기 때문에 λ 는 함수 f 와 임계점 p_0 에 의해 결정된다.

정의 2.2.2. [5] λ 를 정상적인 임계점 p_0 의 지표(index)라고 부른다.

따라서 임계점 p_0 의 지표는 0과 m 사이의 정수이다.

이제부터 우리의 관심대상은 매끄러운 다양체에서도 경계없는 콤팩트 다양체인 닫힌 다양체(closed manifold)이다. 다음 정리를 통해 닫힌 다양체에서 모스함수의 존재성에 대해서 알아볼 것이다.

정리 2.2.3. [5] M 이 m 차원 닫힌 다양체이고 함수 $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 M 에서 정의된 매끄러운 함수라고 하자. 그러면 함수 $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ 에 임의로 가까운(arbitrarily close) 모스함수 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 존재한다.

즉, 닫힌 다양체에 정의된 매끄러운 함수가 있으면 임의로 가까운(arbitrarily close) 모스함수가 존재한다는 뜻이다. 모스함수의 존재성을 증명하기 위해 먼저 임의로 가까운(arbitrarily close)에 대해 알아야 한다. 그러므로 증명하기 전에 몇 개의 정리에 대해 살펴보자.

보조정리 2.2.4. [5] $\mathbb{R}^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m)\}$ 을 m 차원 유클리드 공간이라 하고, \mathbb{R}^m 의 개집합(open set) U 와 U 에서 정의된 매끄러운 함수 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ 가 존재한다고 하자. 그러면 U 에서

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) - (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m)$$

가 모스함수가 될 수 있는 실수 a_1, a_2, \dots, a_m 가 존재한다.

더욱, 실수 a_1, a_2, \dots, a_m 들의 절댓값들을 원하는 만큼 작게 만들 수 있다.

보조정리 2.2.5. (사드(Sard) 정리) [6] 매끄러운 함수 $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 의 임계값의 집합은 \mathbb{R}^m 에서 측도가 0이다.

모스함수의 존재성을 증명하기 이전에 두 함수가 임의로 가까운(arbitrarily close)이라는 것이 무엇인지 용어를 명확히 해야 한다. 두 함수가 임의로 가까운(arbitrarily close)이라는 것은 매끄러운 함수 $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 C^2 -근사(close)라는 것이다.

U 는 U 에서 정의된 국소좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 을 가질 때, 개집합 U 를 좌표근방(coordinate neighborhood)이라고 한다. 즉, 좌표근방을 말할 때 U 에 국소좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 가 정의되어 있다고 가정한다. 먼저 좌표근방을 포함하는 콤팩트 집합 K 위에서 f 와 g 가 C^2 -근사(close)라는 것을 정의하자.

정의 2.2.6. [5] $\varepsilon > 0$ 이고, 다음과 같은 세가지 조건을 K 의 모든 점 p

에서 만족하면 f 는 K 에서 g 와 (C^2, ε) -근사(approximation)한다고 한다.

$$\begin{cases} |f(p) - g(p)| < \varepsilon \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \right| < \varepsilon, & \forall i = 1, \dots, m \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right| < \varepsilon, & \forall i, j = 1, \dots, m \end{cases}$$

다양체 M 이 콤팩트하다면 콤팩트 정의에 의하여 M 을 덮는 유한 개의 좌표근방을 찾을 수 있다. 먼저 M 안의 좌표근방 U 와 U 안에 있는 m 차원 원판(disk) D 를 생각할 것이다. 여기서 D 는 $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq 1\}$ 이다. $\text{int}(D)$ 는 개집합이므로 $\text{int}(D)$ 으로 M 을 덮는 개피복이 존재할 것이다. M 이 콤팩트이므로 개피복의 유한부분피복이 존재할 것이다. 그러므로 M 을 덮는 유한부분피복을 $\text{int}(D_1), \dots, \text{int}(D_k)$ 이라고 하자. 그러면 D_i 를 덮는 좌표근방 U_i 들의 쌍으로 M 을 덮을 수 있다. $D_i = K_i$ 이라고 하면, M 을 덮는 U_1, \dots, U_k 안에 포함된 콤팩트 집합 K_1, \dots, K_k 를 볼 수 있다.

지금부터 (C^2, ε) -근사(approximation)에 대해 언급할 때마다 M 의 유한 덮개 $M = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k$ 와 유한 콤팩트 덮개 $M = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_k$, $K_i \subset U_i$ 을 고정되게 선택할 수 있음을 가정한다.

정의 2.2.7. [5] 만일 각 $l = 1, 2, \dots, k$ 에 대해 K_l 위에서 f 가 g 와 (C^2, ε) -근사(approximation)일 때, 함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 는 함수 $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ 와 (C^2, ε) -근사(approximation)이다.

보조정리 2.2.8. [5] C 를 M 안의 콤팩트 집합이라고 하자. $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 C 에서 퇴화하는 임계점이 없으면 충분히 작은 $\varepsilon > 0$ 에 대해 g 의 임의의 (C^2, ε) -근사 f 도 C 에서 퇴화하는 임계점이 없다.

보조정리 2.2.9. [5] U 를 좌표근방이라 하고, K 를 U 안의 콤팩트 집합이라 하자. 그러면 다음 조건을 만족하는 U 에서 정의된 매끄러운 함수 $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 존재한다.

$$(1) 0 \leq h \leq 1$$

$$(2) x \in V \text{ 일 때, } h(x) = 1 \text{ (} V \text{는 } K \text{를 포함하는 개집합)}$$

$$(3) x \notin L \text{ 일 때, } h(x) = 0 \text{ (} L \text{은 } V \text{를 포함하고 } U \text{안에 포함되는 개집합 즉, } K \subset V \subset L \subset U \text{)}$$

이런 함수 h 를 (U, K) 에 대한 계단함수(step function)라고 한다.

정리 2.2.3의 증명 함수의 (C^2, ε) -근사가 필요하기 때문에 M 을 덮는 고정된 좌표근방 $U_l (l = 1, 2, \dots, k)$ 과 그 안의 콤팩트 집합 K_l 을 선택하자. 주어진 함수 $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ 을 f_0 라고 택하자.

$C_l = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_l$ 로 정의하자. 그러면 C_l 은 콤팩트 집합이 된다. $C_0 = \emptyset$ 이라고 하자. 그러면 귀납 가정으로 함수 $f_{l-1}: M \rightarrow \mathbb{R}$ 이 C_{l-1} 에서 퇴화하는 임계점이 없는 함수를 가진다고 가정하자. 그래서 f_{l-1} 을 사용하여 f_l 을 만들 것이다. 좌표근방 U_l 과 그 안에 있는 콤팩트 집합 K_l 을 보자. (x_1, x_2, \dots, x_m) 을 U_l 에서 선택된 좌표계라고 하자. 보조정리 2.2.4.에 의해 실수 a_1, a_2, \dots, a_m 가 존재하여 U_l 에서 모스함수인 $f_{l-1}(x_1, x_2, \dots, x_m) - (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m)$ 을 만들수 있다. 우리는 이 함수를 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$ 의 표현이 좌표근방 U_l 밖의 부분에서도 적용되도록 변경해야 한다. 그러므로 보조정리 2.2.9.을 이용하여 다음과 같은 함수 f_l 을 만들 수 있다. L_l 은 U_l 에서 콤팩트 집합이고 h_l 은 L_l 의 밖에서 함수값을 0을 갖는다.

$$f_l = \begin{cases} f_{l-1}(x_1, \dots, x_m) - (a_1x_1 + \dots + a_mx_m)h_l(x_1, \dots, x_m), & U_l \text{ 안에서} \\ f_{l-1}(x_1, \dots, x_m), & L_l \text{ 밖에서} \end{cases}$$

위의 방정식에서 두 집합의 교집합에는 $h_l(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ 이므로 M 위에서 잘 정의된 매끄러운 함수를 정의할 수 있다. $h_l(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$ 을 가지는 콤팩트 집합 K_l 의 근방안에는 f_l 과 매끄러운 함수

$$f_{l-1}(x_1, x_2, \dots, x_m) - (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m)$$

과 일치한다. 그러므로 f_l 은 K_l 에서 모스함수가 되므로 퇴화하는 임계점을 가지지 않는다.

다음으로 f_l 이 f_{l-1} 과 (C^2, ϵ) -근사를 가지는지 확인해야 한다. U_l 안의 점 p 에서 계산하면 $|f_{l-1}(p) - f_l(p)| = |a_1x_1 + \dots + a_mx_m| h_l(p)$ 이고, $\left| \frac{\partial f_{l-1}}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(p) \right| = \left| a_i h_l(p) + (a_1x_1 + \dots + a_mx_m) \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(p) \right|, \forall i = 1, \dots, m$ 이고, 이계미분을 계산하면 $\left| \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right| = \left| a_i \frac{\partial h_l}{\partial x_j}(p) + a_j \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(p) + (a_1x_1 + \dots + a_mx_m) \frac{\partial^2 h_l}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right|, \forall i, j = 1, \dots, m$ 이다. 계단함수인 h_l 은 $0 \leq h_l(x) \leq 1$ 이고 콤팩트 집합 L_l 의 밖의 부분에서의 함숫값은 0을 가지므로 일계미분과 이계미분의 절댓값은 특정 함숫값을 넘지 않는다. 그리고 a_1, a_2, \dots, a_m 의 절댓값은 충분히 작게 선택할 수 있었으므로 위의 식의 우변을 임의로 작게 할 수 있다. 그러므로 부분적으로 f_l 은 콤팩트 집합 K_l 에서 함수 f_{l-1} 와 (C^2, ϵ) -근사하게 만들 수 있다. f_l 이 K_l 이 아닌 다른 K_j 에서도 근사하기 위해 K_j 의 좌표근방 U_j 의 좌표계 (y_1, y_2, \dots, y_m) 를 선택하고 f_l 과 f_{l-1} 의 일계미분과 이계미분 사이의 차이를 계산한다. 콤팩트 집합 L_l 의 밖의 부분이 $f_l = f_{l-1}$ 이므로 우리가 필요한 계산은 좌표근방 U_j 와 U_l 의 교집합 $U_j \cap U_l$ 을 포함하는 $K_j \cap L_l$ 에서의 차이이다. $U_j \cap U_l$ 에서의 차이는 국소좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 와 (y_1, y_2, \dots, y_m) 사이의 적절한 야코비안 변환으로 위 식의 우변을 표현할 수 있다. 그리고 최댓값정리에 의해 콤팩트 집합 $K_j \cap L_l$ 에서 야코

비안의 각 성분의 절댓값은 특정한 값을 넘지 않는다. 그러므로 만일 a_1, a_2, \dots, a_m 의 절댓값을 충분히 작게 가지면 $K_j \cap L_l$ 에서 위의 식 우변을 우리가 원하는 만큼 작게 만들 수 있다. 그리고 L_l 밖에서도 f_l 와 f_{l-1} 의 차이는 없도록 만들 수 있다. 그러므로 f_l 와 f_{l-1} 는 (C^2, ε) -근사이다.

$j = 1, 2, \dots, k$ 일 때 위 과정을 반복하여 $\varepsilon > 0$ 에 대해 f_{l-1} 와 (C^2, ε) -근사인 f_l 을 정의할 수 있다. 귀납법 가정에 의해 f_{l-1} 은 C_{l-1} 에서 퇴화하는 임계점을 가지지 않으므로 보조정리 2.2.8.에 의해 $\varepsilon > 0$ 에 대해 f_{l-1} 와 (C^2, ε) -근사인 f_l 에서도 C_l 에서 임의의 퇴화하는 임계점을 가지지 않는다. 더욱 f_l 은 K_l 에서 퇴화하는 임계점을 가지지 않도록 만들었으므로 f_l 은 $C_L = C_{l-1} \cup K_l$ 에서 퇴화하는 임계점을 가지지 않는다.

그러므로 $l = 1, 2, \dots, k$ 에 귀납법에 의해 f_k 는 $C_k = M$ 에서 퇴화하는 임계점을 가지지 않는다. 즉, f_k 는 M 위의 모스함수가 된다. 더욱 각 단계에서 충분히 작은 $\varepsilon > 0$ 을 잡았으므로 f_k 는 주어진 함수 g 와 임의의 특별한 ε' 에 대해 (C^2, ε') -근사로 만들 수 있다. 여기서 $\varepsilon' = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l)$ 이다. \square

2.3 임계점의 위치

모스함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 주어지면 f 의 임계점들이 어떻게 관련되어 있는지와 M 의 핸들분할(handle decomposition)을 조사할 때에 중요한 역할을 하는 그래디언트형 벡터장(gradient-like vector field)를 고려해야 한다.

이제부터 f 는 m 차원 닫힌 다양체 위에 정의된 모스함수이고, X 는 M 에서의 매끄러운 벡터장(smooth vector field)라고 가정하자.

정의 2.3.1. [5] 다음 두 조건을 만족하면 X 는 모스함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 에

대한 그래디언트형 벡터장(*gradient-like vector field*)이다.

(1) 함수 f 가 임계점이 아닐 때, $X \cdot f > 0$ 이다.

(2) 만일 p_0 가 지표가 λ 인 f 의 임계점이면 적절한 좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 을 가진 충분히 작은 근방 V 를 가져서 f 를 표준형태

$$f = -X_1^2 - X_2^2 - \dots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_m^2 + f(p_0)$$

으로 표현할 수 있고 X 는 이 함수의 그래디언트 벡터장(*gradient vector field*)으로서

$$X = -2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \dots - 2x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + 2x_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda+1}} + \dots + 2x_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

으로 나타낼 수 있다.

조건 (1)에 의해 함수 f 의 임계점이 아닌 부분에서는 X 는 f 의 함숫값이 증가하는 방향으로 향한다. 즉, 만일 함수 f 가 높이함수(*height function*)이면 X 는 위로 향하게(*upward*) 된다.

정리 2.3.2. [5] 함수 f 가 M 에서 모스함수 일 때, 함수 f 에 대한 그래디언트형 벡터장 X 가 존재한다.

증명 다양체 M 은 유한개의 좌표근방 U_1, U_2, \dots, U_m 으로 덮히고 $K_j \subset U_j$ 인 $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_k \subset M$ 을 만족하는 콤팩트 집합 K_j 이 존재한다. 더욱, 각 임계점 p_0 이 정확히 하나의 좌표근방 U_i 에 포함되고 f 가 U_i 에서 표준적인 형태를 가질 수 있다고 가정할 수 있다. (먼저 f 의 각 임계점의 좌표근방을 선택하고 나서 M 을 덮는 U_j 들을 더하여 얻을 수 있다.) 이제 각 $j = 1, 2, \dots, k$ 에 대해 U_j 위에 있는 f 의 그래디언트 벡터장 X_j 를 만들자. U_j 에 대한 특별한 좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 를 이용하여 만들 수

있다.

$$X_j = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m}$$

에 대하여 $X_j \cdot f > 0$ 를 계산하면

$$\begin{aligned} X_j \cdot f &= \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot f \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

가 된다. 그러므로 f 의 임계점이 아닌 점에서 $X_j \cdot f > 0$ 이다. 특별한 좌표계를 사용하여 그래디언트 벡터장을 각각 정의한 것이므로 $i \neq j$ 일 때 U_i 와 U_j 의 교집합 $U_i \cap U_j$ 에서 X_i 와 X_j 가 같다는 것을 보장하지 못하는 문제가 있다. 이를 위해 M 전체 위에 있는 매끄러운 벡터장 X 를 정의하기 위해 X_j 들과 보조정리 2.2.9의 계단함수를 이용하면 된다.

함수 $h_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}$ 를 (U_j, \mathbb{R}) 에 대응되는 계단함수라고 하자. 그러면 h_j 는 $0 \leq h_j \leq 1$ 인 계단함수이고 $p \in V_j$ 일 때 $h_j(p) = 1$ 이고 $p \notin L_j$ 일 때, $h_j(p) = 0$ 이다. ($K_j \subset V_j \subset L_j \subset U$) 위 함수를 U_j 의 밖의 부분을 $h_j = 0$ 으로 두어 $h_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ 인 매끄러운 함수로 확장할 수 있다.

좌표근방 U_j 안에 있는 각 점 p 에 대하여 스칼라(scalar) $h_j(p)$ 배가 되는 벡터 $(h_j X_j)(p)$ 가 대응되는

$$h_j X_j$$

인 벡터장을 고려하자. U_j 밖의 모든 점에서 영벡터를 갖도록 하여 이 벡터장을 M 위의 매끄러운 벡터장으로 확장할 수 있다.

다양체 M 에서 각 $j = 1, 2, \dots, k$ 에 대한 벡터장 $h_j X_j$ 들로 구성할 것이고 그들의 합 $X = \sum_{j=1}^k h_j X_j$ 들을 고려해보자. 이 X 가 그래디언트형 벡터장이다. 그 이유로 먼저 보일 것은 임계점이 아닌 점에서 $X \cdot f > 0$ 이어야 한다는 것이다. 만일 $p \in U_j$ 이면 $(X_j \cdot f)(p) > 0$ 이고 $p \notin U_j$ 이면 $h_j X_j = \mathbf{0}$ 이다. 그러므로 $(h_j X_j \cdot f)(p) \geq 0$ 이다. 그러나 콤팩트 집합 K_1, K_2, \dots, K_k 는 M 을 덮으므로 p 는 K_1, K_2, \dots, K_k 중의 하나에 속한다. $p \in K_j$ 라고 하면 $h_j = 1$ 이고 $(X_j \cdot f)(p) > 0$ 이다. 그러므로 $\sum_{j=1}^k h_j X_j$ 에서 최소 하나의 항에서 f 의 미분이 양수이므로 $X \cdot f > 0$ 가 된다.

그 다음은 오직 U_i 에만 포함되고 임계점 p_0 하나를 포함하는 작은 근방 V 를 선택한다. 근방 V 에서 $H_j = 1$ 을 갖는다. 더욱 U_i 에서 f 는 표준형태이므로 V 에서 $h_j X_j$ 는

$$X = -2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \dots - 2x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + 2x_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda+1}} + \dots + 2x_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

형태의 벡터장이다. X 의 $h_j X_j$ 부분의 나머지는 V 에서 0이기 때문에 정의의 조건을 모두 만족한다. \square

다음으로는 임계값들을 올리고 내릴 수 있는 가장 간단한 경우에 대해 살펴볼 것이다.

정리 2.3.3. [5] 함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 모스함수이고 p_1, p_2, \dots, p_r 이 f 의 임계점들이라고 하면, 임의의 $i, j = 1, 2, \dots, r$ 에 대해 $p_i \neq p_j$ 일 때 $f'(p_i) \neq f'(p_j)$ 을 만족하는 임계점 p_1, p_2, \dots, p_r 을 갖는 모스함수 $f': M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 존재한다.

증명 임계점 p_1, p_2 에서 f 의 임계값이 c 로 같다고 가정하고 f 를 조금 수정하자. p_1 에 대한 국소좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 를 선택하여 f 를 표준

형태 $f = -X_1^2 - X_2^2 - \cdots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \cdots + X_m^2 + c$ 로 쓸 수 있다.

X_f 를 (x_1, x_2, \dots, x_m) 에 대한 f 의 그래디언트형 벡터장이라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} X_f \cdot f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \\ &= 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2) \end{aligned}$$

가 된다. 충분히 작은 $\varepsilon > 0$ 에 대해 반경 ε 인 D_ε 와 반경 2ε 인 $D_{2\varepsilon}$ 인 m 차원 원판을 각각 고려하자. 그러면 $D_{2\varepsilon} - \text{int}(D_\varepsilon)$ 의 영역 안에서 위의 방정식은 $4\varepsilon \leq X_f \cdot f \leq 4(2\varepsilon)^2$ 을 만족하고 콤팩트 집합을 $D_\varepsilon := K$ 이고 개집합을 $\text{int}(D_{2\varepsilon}) := U$ 라 정의하면 U 는 콤팩트 집합 K 을 포함하는 개집합이 된다. (U, K) 에 대한 계단함수 $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ 를 고려해보자. U 밖의 부분에서는 $h = 0$ 이 되는 매끄러운 함수 $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ 으로 확장할 수 있다. 이를 이용하여

$$\tilde{f} := f + ah$$

로 정의하자. 여기에서 a 는 0이 아닌 충분히 작은 실수이다. U 밖의 부분에서 $h = 0$ 이므로 $f = \tilde{f}$ 가 된다. 그러므로 f 와 \tilde{f} 는 같은 임계점을 갖는다. $\text{int}(D_\varepsilon)$ 에서 $h = 1$ 이므로 이 영역에서는 p_1 이 f 와 \tilde{f} 의 유일한 임계점이 된다. 그러므로 D_ε 와 $D_{2\varepsilon}$ 사이의 영역에서 f 와 \tilde{f} 는 다른 임계점을 갖는다. f 와 \tilde{f} 의 일계미분 차이를 계산해보자.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \right| = \left| a \frac{\partial h}{\partial x_i} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

그러므로 $|a|$ 를 충분히 작게 하면 $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2$ 와 $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}\right)^2$ 의 차이를 임의대로 작게 만들 수 있다. 그러므로 $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (= X_f \cdot f)$ 는 D_ε 와

$D_{2\varepsilon}$ 사이의 최솟값 $4\varepsilon^2 (> 0)$ 을 가지고 만일 a 가 충분히 작으면 $\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}\right)^2$ 도 D_ε 와 $D_{2\varepsilon}$ 사이에서 0이 아닌 최솟값을 가진다. 즉, 이 영역에서는 임계점을 가지지 않게 된다. 그러므로 f 와 \tilde{f} 는 같은 임계점의 집합을 가지고 f 의 정상적인 임계점은 \tilde{f} 에서도 정상적인 임계점이다. 그러므로 \tilde{f} 는 모스함수가 된다.

$$\tilde{f}(P_1) = f(p_1) + a, \quad \tilde{f}(P_2) = f(p_2)$$

그러므로 $f(p_1) = f(p_2)$ 이지만 $\tilde{f}(P_1) \neq \tilde{f}(P_2)$ 임을 알 수 있다.

이 과정을 계속해 나가면 다른 임계점들에 대해 다른 임계값을 주는 함수를 만들 수 있다. □

2.4 다양체의 핸들분할

M 을 닫힌 다양체라 하고 함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 를 모스함수라고 하자. $M_t = \{p \in M \mid f(p) \leq t\}$ 라고 놓자. 이 때, t 가 변할 때마다 M_t 가 어떻게 변하는지 살펴볼 것이다. 그 전에 먼저 미분동형사상에 대해 알아보자.

정의 2.4.1. [5] 위상공간 X, Y 에 대해 함수 $h: X \rightarrow Y$ 가 일대일 대응 함수이고 h 와 h^{-1} 가 연속이고 $h, h^{-1} \in C^\infty$ 일 때, h 를 미분동형사상(diffeomorphism)이라 한다. 이 때, X 와 Y 가 미분동형(diffeomorphic)이라 하고, $X \cong Y$ 로 나타낸다.

정리 2.4.2. [5] 함수 f 가 구간 $[a, b]$ 에서 임계값을 갖지 않을 때 M_a 와 M_b 는 미분동형이다.

자세한 증명은 생략하고 기하적으로 보면 다양체 M_a 를 그래디언트형 벡터장 X 를 따라 흐르게 하면 특정 시간 후에 M_a 를 변형하여 M_b

와 만나고 일치하게 할 수 있다.

그러므로 변수 t 가 임계점을 지날 때 M_t 의 모양이 어떻게 변하는지가 문제이다. 정리 2.3.3.에 의해 다른 임계점에서 f 가 다른 임계값을 가진다고 가정할 수 있다. 또한 f 는 오직 유한개 $n+1$ 개의 임계점을 갖는다고 할 수 있다. 그러므로 f 의 임계값을 오름차순으로 정렬하고 대응되는 임계점들을

$$p_0, p_1, \dots, p_n$$

이라 하고, $c_i = f(p_i)$ 라 하자. 그러면

$$c_0 < c_1 < \dots < c_n$$

이 된다. 여기서, c_0 는 최솟값이고 c_n 은 최댓값이 된다.

그러므로 $f(p) < c_0$ 인 점 p 는 존재하지 않는다. 그래서 $t < c_0$ 일 때, $M_t = \emptyset$ 이 된다. 그리고 임의의 $p \in M$ 에 대해 $f(p) \leq c_n$ 이므로 $t \geq c_n$ 일 때, $M_t = M$ 이다.

먼저 최솟값부터 살펴보자. p_0 가 최솟값인 임계점이면 f 의 표준형태는

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 + c_0$$

이 되고 p_0 의 지표는 0이다. $\varepsilon > 0$ 에 대해 c_0 는 최솟값이므로 $M_{c_0-\varepsilon} = \emptyset$ 이 되고 $M_{c_0+\varepsilon} = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \leq \varepsilon\}$ 이 되므로 $M_{c_0+\varepsilon}$ 는 m 차원 원판 D^m 과 미분동형이다. f 의 표준형태는 원판의 중심에서 최솟값 c_0 을 가짐을 알려준다. f 는 원판으로 다가갈 때 f 가 증가하는 값을 가지고 원판의 경계에서 $c_0 + \varepsilon$ 값에 도달한다.

최솟값 주변에서만 보았지만 c_i 가 최솟값이 아니더라도 t 가 지표

가 0인 임계점을 지날 때마다 위로 향하는 m 차원 원판이 생긴다. 즉, $M_{c_i+\varepsilon}$ 와 $M_{c_i-\varepsilon} \sqcup D^m$ 가 미분동형이다. 지표가 0인 임계점에서 나타나는 (위로 향하는) m 차원 원판을 0핸들(handle) 또는 m 차원 0핸들(handle)이라고 한다.

이제 최댓값 c_n 주변에 대해 생각해보자. f 의 최댓값에 도달하는 유일한 점 p_n 이 있다고 가정하자. 그러면 f 는 표준형태

$$f = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_m^2 + c_n$$

로 표현할 수 있다. p_n 의 지표는 m 이다. c_n 이 최댓값이므로 $c_n < t$ 이면 $M_t = M$ 가 되고 $M_{c_n-\varepsilon} = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \geq \varepsilon\}$ 가 된다. $M_{c_n-\varepsilon}$ 은 반경 $\sqrt{\varepsilon}$ 인 m 차원 원판의 여집합에 대응되고 경계는 S^{m-1} 가 된다. t 가 $c_n - \varepsilon$ 에서 증가하여 c_n 을 지날 때는 $M_{c_n-\varepsilon}$ 의 경계에서부터 원판의 중심으로 채워진다. 그러므로 닫힌 다양체가 완성이 되는 것을 볼 수 있다. 즉, f 는 원판의 중심에서 최댓값을 가지고 원판의 경계쪽으로 가면 함숫값이 줄어든다. 이러한 (아래로 향하는) m 차원 원판을 m 핸들(handle) 또는 m 차원 m 핸들(handle)이라고 한다.

지표가 0과 m 인 임계점 주변의 모습을 살펴보았다. 다음은 일반적인 지표 λ ($0 \leq \lambda \leq m$)인 임계점 p_i 근처에서 임계값 c_i 에 대응하는 t 를 지날 때 M_t 의 변화를 살펴보자.

지표가 λ 인 임계점 p_i 의 표준형태는

$$f = -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 + c_i$$

이다. $M_{c_i-\varepsilon} = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_1^2 + \cdots + x_\lambda^2 - x_{\lambda+1}^2 - \cdots - x_m^2 \geq \varepsilon\}$ 이 되고

지표가 λ 인 m 차원 원판을 λ 핸들(handle) 또는 m 차원 λ 핸들(handle)에 대응되는 것은

$$\begin{cases} x_1^2 + \cdots + x_\lambda^2 - x_{\lambda+1}^2 - \cdots - x_m^2 \leq \varepsilon \\ x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 \leq \delta \end{cases}$$

이다. 여기서, $0 < \varepsilon < \delta$ 이다. 그러므로 λ 핸들(handle)은 $D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ 와 미분동형이다. λ -원판

$$D^\lambda \times \mathbf{0} = \{(x_1, \dots, x_\lambda, 0, \dots, 0) \mid x_1^2 + \cdots + x_\lambda^2 \leq \varepsilon\}$$

은 λ 핸들(handle)의 코어(core)라 하고, $M - \lambda$ -원판

$$\mathbf{0} \times D^{m-\lambda} = \{(0, \dots, 0, x_{\lambda+1}, \dots, x_m) \mid x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 \leq \delta\}$$

을 코코어(co-core)라고 한다.

정리 2.4.3. [5] 집합 $M_{c_i+\varepsilon}$ 은 집합 $M_{c_i-\varepsilon}$ 에 λ 핸들(handle)이 붙어져 얻은 다양체와 미분동형이다.

$$M_{c_i+\varepsilon} \cong M_{c_i-\varepsilon} \cup D^\lambda \times D^{m-\lambda}$$

이제 함수 f 의 표준형태로 돌아가보면 λ 핸들의 코어 $D^\lambda \times \mathbf{0}$ 에서 f 의 함숫값 변화를 알 수 있다. 코어의 중심에서 f 의 임계값 c_i 를 가지고, 코어의 경계에서 f 의 함숫값 $c_i - \varepsilon$ 를 갖는다. 즉, 코어 $D^\lambda \times \mathbf{0}$ 는 (아래 쪽으로 향하는) 뒤집힌(upside-down) λ -원판이다. 코코어는 중심에서 f 의 임계값 c_i 를 가지고, 코코어의 경계에서 f 의 함숫값 $c_i + \varepsilon$ 를 갖는다.

즉, 코코어 $\mathbf{0} \times D^{m-\lambda}$ 는 (위쪽으로 향하는) 똑바른(upright) $m-\lambda$ -원판이다. 코어는 아래쪽으로 향하고 코코어는 위쪽으로 향하여 마치 말안장 같아 보인다.

0핸들의 코어는 0차원이고 코코어는 m 차원이므로 아래쪽방향은 없고 모든 방향은 위로 향한다. m 핸들은 코어는 m 차원이고 코코어는 0차원이므로 모든 방향은 아래로 향한다.

$M_{c_i-\varepsilon}$ 에 λ 핸들 $D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ 를 붙이는 것은 $M_{c_i-\varepsilon}$ 의 경계 $\partial M_{c_i-\varepsilon}$ 를 따라 $\partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ 을 붙이는 것을 말한다. 이렇게 핸들을 붙이는 것을 좀 더 자세히 묘사하기 위해 $\partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ 의 각 점이 $\partial M_{c_i-\varepsilon}$ 에 대응되는 사상을 정하자.

$$\varphi : \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \rightarrow \partial M_{c_i-\varepsilon}$$

각 점 $p \in \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ 는 $\varphi(p) \in \partial M_{c_i-\varepsilon}$ 에 대응된다. φ 은 λ 핸들의 붙이는 사상(attaching map)이라 불리는 매끄러운 매장함수(smooth embedding map)이다. 코어의 경계 ∂D^λ 는 $S^{\lambda-1}$ 이고, 붙이는 구(attaching sphere)라고 한다. 즉, 붙이는 사상(attaching map)은 $m-\lambda$ 차원의 두께를 가진 $\lambda-1$ -구 $S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda}$ 에서 경계 $\partial M_{c_i-\varepsilon}$ 로 가는 매장함수(embedding)이다.

$$\varphi : S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \rightarrow \partial M_{c_i-\varepsilon}$$

정의 2.4.4. [5] D^m 에 다양한 지표들의 핸들을 붙여 얻어진 다양체를 m 차원 핸들바디(handlebody)라 부른다.

$$D^m \cup D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1} \cup \dots \cup D^{\lambda_m} \times D^{m-\lambda_m}$$

더욱 자세히 핸들바디는 다음 세 단계로 정의한다.

(1) 원판 D^m 은 m 차원 핸들바디이다.

(2) λ_1 핸들에 C^∞ 인 붙이는 사상(attaching map) $\varphi_1 : \partial D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1} \rightarrow \partial D^m$ 으로 D^m 에 붙여 얻어진 다양체

$$D^m \cup D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1}$$

를 m 차원 핸들바디라고 하고, $H(D^m; \varphi_1)$ 라고 나타낸다.

(3) 만일 $H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ 이 m 차원 핸들바디라고 하면 λ_i 핸들에 C^∞ 인 붙이는 사상(attaching map) $\varphi_i : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial N$ 으로 N 에 붙여 얻어진 다양체

$$N \cup D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$$

를 m 차원 핸들바디라고 하고, $H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_i)$ 라고 나타낸다

사실 다양체에 핸들이 붙여질 때마다 매끄럽게 만들수 있으므로 결과로 얻어진 핸들바디는 매끄러운 다양체이다.

0 핸들이 붙여진 것은 교집합이 없이 생기는 것이므로 $\lambda_i = 0$ 인 경우 붙이는 사상이 필요없다. $\lambda_i = 0$ 인 경우에 $H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_i)$ 에서 φ_i 는 의미가 없지만 형식적으로 φ_i 의 개념을 유지한다. 또한 정의에서 (1)과 (2)의 조건만 있으면 논리상 충분하지만 (3)조건은 핸들바디의 기하학적인 이미지를 보여주는 데 도움이 된다.

정리 2.4.5. [5] 닫힌 다양체 M 위에 모스함수 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 있을 때 M 의 핸들바디 구조가 f 에 의해 결정된다. 핸들바디의 핸들은 f 의 임계점에 대응되고 핸들의 지표는 임계점의 지표와 일치한다.

즉, M 은 핸들바디(handlebody)로서 표현할 수 있다는 말이다. 다양체를 핸들바디로서 표현하는 것을 핸들분할(handle decomposition)

이라고 부른다.

증명 모스함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 에 주어진 모든 임계점들은 다른 임계값을 갖는다고 가정할 수 있다, 그러므로 임계값의 오름차순으로 임계점을 배열하여

$$p_0, p_1, \dots, p_n$$

이라고 하고 임계점 p_i 의 지표를 λ_i 라고 하자. 그리고 M 위의 f 에 대한 그래디언트형 벡터장 X 를 고정하자.

임계점 p_i 의 i 에 대한 귀납법으로 증명할 것이다. p_i 의 임계값을 c_i 라 하고 $M_{c_i+\varepsilon}$ 이 핸들바디임을 보이자.

먼저 $i = 0$ 이면, 임계점 p_0 의 지표는 0이고 p_0 는 f 의 최솟값이다. 그러므로 $M_{c_0+\varepsilon}$ 이 D^m 과 미분동형이다. D^m 은 정의에 의해 m 차원 핸들바디이다. 이 경우에 $M_{c_0+\varepsilon}$ 은 0핸들이다.

다음은 $M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 가 핸들바디 $H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ 라고 가정하자. 정리 2.4.3.에서 $M_{c_i+\varepsilon}$ 는 $M_{c_i-\varepsilon}$ 에 λ_i 핸들이 붙어 얻어진 다양체로 자연스럽게 붙이는 사상 $\varphi: \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial M_{c_i-\varepsilon}$ 이 존재하여

$$M_{c_i+\varepsilon} \cong M_{c_i-\varepsilon} \cup_{\varphi} D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$$

임을 보였다. 또한 구간 $[c_{i-1} + \varepsilon, c_i - \varepsilon]$ 에는 임계점들을 포함하지 않으므로 정리 2.4.2.에 의해

$$M_{c_{i-1}+\varepsilon} \cong M_{c_i-\varepsilon}$$

임을 알 수 있다. 이 미분동형사상은 $M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 이 $M_{c_i-\varepsilon}$ 을 만날 때까지 그

래디언트형 벡터장 X 를 따라 흐르도록 주어진다. 이 미분동형사상을

$$\Phi : M_{C_{i-1}+\varepsilon} \rightarrow M_{C_i-\varepsilon}$$

이라고 하자.

귀납가정에 의해 $M_{C_{i-1}+\varepsilon} = H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ 이므로 $M_{C_i-\varepsilon}$ 도 같은 핸들바디와 미분동형이다. 그러므로 $M_{C_i-\varepsilon}$ 에 λ_i 핸들이 붙여 얻어진 $M_{C_i+\varepsilon}$ 도 역시 핸들바디 $H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_i)$ 와 미분동형이다.

이것으로 증명이 완성되었지만 새로운 λ_i 핸들의 붙이는 사상을 자세히 소개하자면 귀납법 가정으로부터 $M_{C_{i-1}+\varepsilon} = H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ 이므로 $M_{C_i-\varepsilon} \cong H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ 으로 생각할 수 있다. (λ_i 핸들을 핸들바디 $H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ 에 바로 붙일 순 없지만 $M_{C_i-\varepsilon}$ 에 붙이고 붙이는 사상 φ 으로 자연스럽게 붙이면 된다.) 그러므로 미분동형사상 Φ 에 의해 $M_{C_i-\varepsilon}$ 과 핸들바디 $H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})$ 이 일치할 때, λ_i 핸들은 합성함수

$$\Phi^{-1} \circ \varphi : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial\{H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1})\}$$

에 의해 붙여진 것이다. 여기서 Φ^{-1} 는 Φ 의 역함수이다. 만일 붙이는 사상 $\Phi^{-1} \circ \varphi$ 을 φ_i 로 대체하면 $M_{C_i+\varepsilon}$ 의 핸들바디는 다음과 같다.

$$H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}) \cup_{\varphi_i} D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} = H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_i)$$

□

위 증명을 통해 M 의 핸들분할은 모스함수 f 에 의해 얻어지고 핸

들의 수와 지표들은 f 의 임계점에 의해 결정된다는 사실을 알 수 있었다. 또한 핸들의 붙이는 사상 $\varphi_i (= \Phi^{-1} \circ \varphi)$ 들은 f 의 그래디언트형 벡터장에 의해 결정된다. 그러므로 f 가 같아도 핸들분할의 구조는 f 의 그래디언트형 벡터장 X 의 선택과 붙이는 사상에 의해 다양하게 나타날 수 있다.

2.5 핸들 슬라이딩과 상쇄

핸들 슬라이딩(sliding)에 대해 먼저 알아보자. 핸들 슬라이딩을 사용하여 핸들바디의 미분동형 타입을 변하지 않도록 핸들의 붙이는 사상을 잘 바꿀 수 있다.

M 을 m 차원 닫힌 다양체라 하고 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 를 모스함수라고 하자. 필요하다면 f 를 변형시켜서 다른 임계점에서 다른 임계값을 갖도록 한다. 그리고 그들의 임계값의 오름차순으로 배열된 $n+1$ 개의 임계점

$$p_0, p_1, \dots, p_n$$

이 있다고 가정하자. 그리고 f 에 대한 그래디언트형 벡터장 X 를 고정하고 선택하자.

그러면 M 을 핸들바디로 표현할 수 있다.

$$M = D^m \cup_{\varphi_1} D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1} \cup_{\varphi_2} \dots \cup_{\varphi_i} D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \cup_{\varphi_{i+1}} \dots \cup_{\varphi_n} D^m$$

여기서 λ_i 는 임계점 p_i 의 지표이다. 위의 핸들분할에서 i 핸들 $D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$ 를 자세히 보자. 0핸들부터 j 핸들까지 붙여 얻어진 부분핸들바디(sub-handlebody) $H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_j)$ 를 N_j 라고 정의하자. 그러면 붙이는 사상

$\varphi_i : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial N_{i-1}$ 에 의해 i 핸들은 N_{i-1} 에 붙는다. 핸들 $D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i}$ 을 슬라이딩(sliding)하는 것은 ∂N_{i-1} 의 동위사상(isotopy)에 의해 붙이는 사상을 바꿀 수 있다는 것이다.

정의 2.5.1. [5] K 를 k 차원 다양체라고 하고 J 를 열린구간이라고 하자. 열린구간 J 에 속하는 모든 실수 t 에 대해 미분동형사상 $h_t : K \rightarrow K$ 이 정의되어 있으면 집합 $\{h_t\}_{t \in J}$ 을 미분동형사상 집합족이라고 한다. 다음 두 조건을 만족하면 집합족 $\{h_t\}_{t \in J}$ 을 동위사상(isotopy)이라 한다.

(1) 닫힌 구간 $[0, 1]$ 이 열린구간 J 에 속하고 변수 t 가 $t \leq 0$ 일 때, h_t 는 K 에서 연속적으로 항등사상이 된다. 즉, $h_t = h_0 = id_k$ 이다. 또한, 임의의 t 가 $t \geq 1$ 일 때, h_t 는 항상 h_1 과 같다. 즉, $h_t = h_1 = h$ 이다. 여기서 h 는 K 에서 미분동형사상이다.

(2) $H(x, t) = (h_t(x), t)$ 로 정의된 사상 $H : K \times J \rightarrow K \times J$ 가 미분동형사상이다. 여기서 h_t 는 변수 t 의 매끄러움에 의존한다.

모스함수 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 와 f 에 대한 그래디언트형 벡터장 X 가 주어질 때 다양체 M 을 f 와 X 에 의해 결정된 핸들분할로 표현한다.

정리 2.5.2. [5] 임계점의 아래첨자 i 를 고정하자. ($0 \leq i \leq n$) 부분핸들바디 N_{i-1} 의 경계 ∂N_{i-1} 의 동위사상 $\{h_t\}_{t \in J}$ 이 주어지면 그래디언트형 벡터장 X 는 다른 그래디언트형 벡터장 Y 로 바뀔 수 있다. 이러한 방식으로 f 와 Y 에 의해 결정되는 새로운 핸들분할은 다음 조건을 만족한다.

$$M = D^m \cup_{\psi_1} D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1} \cup_{\psi_2} \cdots \cup_{\psi_i} D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \cup_{\psi_{i+1}} \cdots \cup_{\psi_n} D^m$$

(1) 붙이는 사상을 포함하여 $i-1$ 핸들까지 핸들분할의 구조는 변

하지 않는다. 즉, 새로운 핸들분할에서 0 핸들부터 j 핸들까지 핸들의 부분핸들바디를 N_j' 로 정의하면 $j \leq i-1$ 일 때 $N_j' = N_j$ 이고 $\psi_i = \varphi_i$ 이다.

(2) i 번째 붙이는 사상은 다음 ψ_i 로 대체할 수 있다.

$$\psi_i = h \circ \varphi_i$$

여기서, $h : \partial N_{i-1} \rightarrow \partial N_{i-1}$ 는 동위 사상 $\{h_t\}_{t \in J}$ 가 주어졌을 때, $t = 1$ 에 대응하는 미분동형사상이다.

(3) 임의의 j ($0 \leq j \leq n$)에 대해 N_j' 의 미분동형사상 유형은 N_j 와 같다.

$$N_j' \cong N_j$$

증명 c_j 를 임계점 p_j 에서 f 의 함숫값이라고 하고 핸들바디 $M = D^m \cup_{\varphi_1} D^{\lambda_1} \times D^{m-\lambda_1} \cup_{\varphi_2} \dots \cup_{\varphi_i} D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \cup_{\varphi_{i+1}} \dots \cup_{\varphi_n} D^m$ 이라고 하자. 그러면 모든 j ($0 \leq j \leq n$)에 대해 $M_{c_j+\varepsilon} = N_j (= H(D^m; \varphi_1, \dots, \varphi_j))$ 이다. 여기서 ε 은 충분히 작은 양수이다. i 핸들을 자세히 보자. $M_{c_i-\varepsilon}$ 에 i 핸들을 붙이는 사상을 다음과 같이 정의하자.

$$\varphi_i : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial M_{c_i-\varepsilon}$$

또한 다음 미분동형사상을 고려해보자.

$$\Phi : M_{c_{i-1}+\varepsilon} \rightarrow M_{c_i-\varepsilon}$$

N_{i-1} 과 $M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 을 일치시킬 때 i 행들이 N_{i-1} 에 붙는 붙이는 사상 φ_i 은

$$\varphi_i = \Phi^{-1} \circ \varphi : \partial D^{\lambda_i} \times D^{m-\lambda_i} \rightarrow \partial N_{i-1}$$

에 의해 주어진다. 이 미분동형사상 Φ 을 자세히 보자. 그러면 f 가 구간 $[c_{i-1} + \varepsilon, c_i - \varepsilon]$ 에서 임계값을 가지지 않으므로

$$f^{-1}([c_{i-1} + \varepsilon, c_i - \varepsilon]) \cong \partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times [0, 1]$$

이다. 더욱 위의 미분동형사상에 의해 일치시키면 $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 의 각 점 p 에서 우변의 구간 $\{p\} \times [0, 1]$ 과 좌변의 점 p 를 지나는 그래디언트형 벡터장 X 의 적분곡선과 대응된다. 조금 더 큰 영역으로 확장시키면 구간 $[c_{i-1} + \frac{\varepsilon}{2}, c_i - \frac{\varepsilon}{2}]$ 에서도 f 의 임계값은 존재하지 않는다. 그러므로 충분히 작은 양수 δ 에 대해

$$f^{-1}([c_{i-1} + \frac{\varepsilon}{2}, c_i - \frac{\varepsilon}{2}]) \cong \partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times [-\delta, 1 + \delta]$$

으로 확장할 수 있다. 양변을 일치시키면 우변의 구간 $\{p\} \times [-\delta, 1 + \delta]$ 과 좌변의 X 의 적분곡선이 대응된다. 그러므로 미분동형사상 Φ 는 $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times [-\delta, 0]$ 에서 $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times [-\delta, 1]$ 으로 늘리는 미분동형사상으로 설명할 수 있다. 이 미분동형사상은

$$\Phi : (p, t) \mapsto (p, \frac{1+\delta}{\delta}t + 1), \quad \forall (p, t) \in \partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times [-\delta, 0]$$

으로 정의할 수 있고, 경계 $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 에서 Φ 은 $(p, 0)$ 에서 $(p, 1)$ 로 대응시키는 사상이다.

N_{i-1} 와 $M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 을 일치시킬 수 있으므로 Φ 를 $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 에 주어진 동위사상 $\{h_t\}_{t \in J}$ 으로 여길 수 있다. 그러면 동위사상 정의에 의하여 다음 미분동형 사상 $H: \partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times J \rightarrow \partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times J$ 을

$$H(x, t) = (h_t(x), t)$$

으로 정의하자. 동위사상 정의의 조건 (1)에 의해 H 는 $t \leq 0$ 과 $t \geq 1$ 에서 t 는 독립적으로 상수이다. 편의를 위해 H 를 반대로 둔

$$\tilde{H}(x, t) = (h_{1-t}(x), t)$$

을 고려할 수 있다. 이 $\tilde{H}: \partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times J \rightarrow \partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times J$ 도 또한 미분동형 사상이고, $t \leq 0$ 과 $t \geq 1$ 일 때 상수이다.

J 는 구간 $[0, 1]$ 을 포함하는 개집합이므로 길이를 조정하여 구간 $(-\delta, 1 + \delta)$ 와 J 를 동일시 할 수 있다, 그러므로 $f^{-1}([c_{i-1} + \frac{\varepsilon}{2}, c_i - \frac{\varepsilon}{2}]) \cong \partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times [-\delta, 1 + \delta]$ 일 때, 개집합 $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times (-\delta, 1 + \delta)$ 에서 그래디언트형 벡터장 X 가 있고 그들의 적분곡선들은 $\{p\} \times (-\delta, 1 + \delta)$ 이다. 여기서 X 는 이 개집합에서 벡터장

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

으로 여길 수 있다. 미분동형사상 $H: \partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times (-\delta, 1 + \delta) \rightarrow \partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times (-\delta, 1 + \delta)$ 에 의해 X 로 부터 유도된 벡터장 \tilde{H}_* 을 고려하자. \tilde{H} 가 $t \leq 0$ 과 $t \geq 1$ 에서 상수이므로 $\tilde{H}_*(X)$ 는 이 영역에서 $\frac{\partial}{\partial t} (= X)$ 이다. 그러므로 만일 개집합 $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times (-\delta, 1 + \delta)$ 에서 $\tilde{H}_*(X)$ 으로 벡터장 X 를 대체한다면 $t \leq 0$ 과 $t \geq 1$ 의 영역에서 붙여진 일부를 따라 $\tilde{H}_*(X)$ 과 X 는 일치하기

때문에 새로운 $\tilde{H}_*(X)$ 는 개집합 $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon} \times (-\delta, 1+\delta)$ 의 밖의 부분에서 원래 X 로 매끄럽게 확장할 수 있다. 이 변화에 의해 만들어진 새로운 벡터장을 Y 라고 하자. 벡터장 X 의 적분곡선을 따라 $M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 에 흐르는 미분동형사상 $\Phi : M_{c_{i-1}+\varepsilon} \rightarrow M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 을 결정했던 것과 같은 방식으로 벡터장 Y 의 적분곡선을 따라 $M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 에서 흐르는 미분동형사상

$$\Psi : M_{c_{i-1}+\varepsilon} \rightarrow M_{c_{i-1}+\varepsilon}$$

이라고 하자. Ψ 를 $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 의 영역에서 제한하면 Ψ 는 $(p, 1)$ 을 $(h(p), 0)$ 으로 보낸다. 여기서 점 p 는 $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 에 속한다. 그러므로 f 와 Y 에 의해 결정되는 핸들분할에서 i 핸들은 붙이는 사상

$$\Psi^{-1} \circ \Phi = h \circ \Phi_i$$

에 의해 $N_{i-1} = \partial M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 에 붙는다. 핸들바디의 일부에서 X 와 Y 는 일치하기 때문에 $i-1$ 핸들까지 핸들바디의 구조는 변하지 않는다. 그러므로 $j \leq i-1$ 일 때 $N_j' = N_j$ 이고 $\psi_i = \phi_i$ 이다.

또한 $M_{c_j+\varepsilon} (= \{p \in M \mid f(p) \leq c_j + \varepsilon\})$ 의 정의에서 그래디언트형 벡터장의 개념이 없기 때문에 $N_j = M_{c_j+\varepsilon}$ 의 미분동형사상의 유형은 임의의 j 에 대하여 변하지 않는다. \square

보조정리 2.5.3. [5] S_1, S_2 은 k 차원의 다양체 K 의 각각의 차원이 s_1, s_2 인 닫힌 부분다양체이다. 만일 $s_1 + s_2 < k$ 이면 $h_0 = id_k$ 이고 $h_1(S_1) \cap S_2 = \emptyset$ 인 K 의 동위사상 $\{h_t\}_{t \in J}$ 가 존재한다.

위 보조정리는 만일 위의 조건이 만족되면 S_1 을 K 의 동위사상 $\{h_t\}_{t \in J}$ 와 S_1 을 움직여 S_2 와 분리시킬 수 있다는 말이다. 즉, S_1 과 S_2 의

차원이 D 의 차원과 비교하여 충분히 작게 하면 S_1 과 S_2 가 서로 만나지 않도록 할 수 있다는 것이다.

정의 2.5.4. [5] $t \rightarrow \infty$ 일 때, X 의 적분곡선을 따라 임계점 p_i 에 수렴하는

$$M_{[c_{i-1}+\varepsilon, c_i+\varepsilon]} = \{p \in M \mid c_{i-1} + \varepsilon \leq f(p) \leq c_i + \varepsilon\}$$

안의 모든 점 p 의 집합을 임계점 p_i 와 관련된 하원판(lower disk)이라고 부른다. 여기서 임계점 p_i 그 자체는 하원판에 포함되어 있다고 여긴다. 비슷하게 $t \rightarrow -\infty$ 일 때, X 의 적분곡선을 따라 임계점 p_i 에 수렴하는 $M_{[c_{i-1}+\varepsilon, c_i+\varepsilon]}$ 안의 모든 점 p 의 집합을 임계점 p_i 와 관련된 상원판(upper disk)이라고 부른다. 여기서 임계점 p_i 그 자체는 상원판 안에 포함되어 있다고 여긴다. 임계점 p_i 와 관련된 하원판과 상원판은 각각 $D_l(p_i)$ 와 $D_u(p_i)$ 으로 정의한다.

그라디언트형 벡터장 X 는 p_i 의 근방에서 그라디언트 벡터장과 일치한다. 그리고 함수 f 의 표준형태와 $D_l(p_i)$ 의 정의를 상기시키면 다음을 얻을 수 있다.

$$D_l(p_i) \cap M_{[c_i-\varepsilon, c_i+\varepsilon]} = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1^2 + \dots + x_{\lambda_i}^2 \leq \varepsilon, x_{\lambda+1} = \dots = x_m = 0\}$$

이 교집합은 λ_i 차원의 원판이다. 또한 다음을 얻을 수 있다.

$$D_l(p_i) \cap M_{[c_{i-1}+\varepsilon, c_i-\varepsilon]} = \text{위 } \lambda_i \text{ 차원 원판의 경계} \times [c_{i-1} + \varepsilon, c_i - \varepsilon]$$

$D_l(p_i)$ 은 위 두 수식의 합집합이기 때문에 λ_i 차원의 원판 그 자체와 미분동형이다. 비슷하게 $D_u(p_i)$ 와 $m - \lambda_i$ 차원 원판은 미분동형이다.

$M_{c_i+\varepsilon}$ 는 $M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 에 λ_i 핸들이 붙은 것이라고 볼 때 $D_l(p_i)$ 는 λ_i 핸들의 코어이고 $D_u(p_i)$ 는 코코어에 대응한다. $\partial D_l(p_i)$ 는 λ_i 핸들의 붙이는 사상 φ_i 에 의해 $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 안에 매장되어 있다. 임계점 p_i 의 $\partial D_u(p_i)$ 은 같은 $\partial M_{c_{i-1}+\varepsilon}$ 에 매장된 구이다.

보조정리 2.5.5. [5] 임계점의 아래첨자 i 를 고정하자. 만일 p_{i-1} 의 지표가 p_i 의 지표보다 크거나 같으면 그래디언트형 벡터장 X 를 붙이는 사상 φ_i 를 ψ_i 으로 바꿀 수 있도록 또 다른 그래디언트형 벡터장 Y 로 바꿀 수 있어서 고정된 모스함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 를 유지하여

$$\psi_i(\partial D_l(p_i)) \cap (\partial D_u(p_i)) = \emptyset$$

를 얻을 수 있다. 이러한 변화는 0 핸들부터 $i-1$ 핸들의 상황을 바꾸지 않는다.

보조정리 2.5.6. [5] 모스함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 의 두 개의 임계점 p_{i-1}, p_i 를 포함한 $M_{[c_{i-2}+\varepsilon, c_i+\varepsilon]}$ 을 고려하자. $K(p_{i-1})$ 는 $t \rightarrow \infty, t \rightarrow -\infty$ 일 때, X 의 적분곡선을 따라 임계점 p_{i-1} 로 수렴하는 $M_{[c_{i-2}+\varepsilon, c_i+\varepsilon]}$ 안의 점 p 의 집합을 말한다. 여기서 $p_{i-1} \in K(p_{i-1})$ 이다. 비슷하게 임계점 p_i 에 대해서도 $K(p_i)$ 를 정의하자. 만일 $K(p_{i-1}) \cap K(p_i) = \emptyset$ 이면 모스함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 는 다음 조건을 가지는 또 다른 모스함수 $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ 로 바꿀 수 있다.

- (1) $M_{[c_{i-2}+\varepsilon, c_i+\varepsilon]}$ 영역 밖에서는 $f = g$ 이다.
- (2) f 와 g 의 임계점들의 집합이나 그들의 지표는 일치한다.
- (3) $g(p_{i-1}) = a, g(p_i) = b$

여기서 a, b 는 $c_{i-2}+\varepsilon$ 보다는 크고 $c_i+\varepsilon$ 보다는 작은 임의로 주어진 실수이다.

즉, 이 보조정리는 $K(p_{i-1})$ 와 $K(p_i)$ 의 교집합이 없을 때 임계점의 함숫값을 임의로 선택한 실수 a 와 b 로 줄 수 있다는 뜻이다.

정리 2.5.7. [5] M 이 m 차원 닫힌 다양체이고 모스함수 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 주어져 있을 때, f 를 변형하여 다음 조건을 만족하도록 할 수 있다. 임의의 임계점 p_i 와 p_j 에 대하여 $f(p_i) < f(p_j)$ 이면 p_j 의 지표가 p_i 의 지표보다 크거나 같다.

증명 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 를 모스함수이고, X 를 f 에 대한 그래디언트형 벡터장이라고 하자. $n+1$ 개의 임계점들은 다른 함숫값을 갖는다고 가정하자. 그들의 임계값들의 오름차순으로

$$p_0, p_1, \dots, p_n$$

으로 정의하자. p_i 의 임계값을 c_i 로 정의하면

$$c_0 < c_1 < \dots < c_n$$

가 된다. p_i 의 지표들은 오름차순이지만 특정 i 에서 $\text{index}(p_{i-1}) > \text{index}(p_i)$ 로 반대로 있다고 가정하자.

그러면 보조정리 2.5.5.에 의해 f 와 관련된 벡터장 X 를 Y 로 변형할 수 있다. 그래서 $\partial D_l(p_i)$ 와 $\partial D_u(p_{i-1})$ 는 $f^{-1}(c_{i-1} + \epsilon) (= \partial M_{c_{i-1} + \epsilon})$ 안에서 서로 만나지 않도록 할 수 있다. 그리고 $\partial D_l(p_i)$ 는 Y 를 따라 흘러도 p_{i-1} 로 수렴하지 않는다. 그리고 $\partial D_u(p_{i-1})$ 도 Y 를 따라 위로 흘러도 p_i 로 수렴하지 않는다. 그러므로 $K(p_{i-1})$ 와 $K(p_i)$ 는 $M_{[c_{i-2} + \epsilon, c_i + \epsilon]}$ 에서 서로소가 되므로 보조정리 2.5.6.을 적용할 수 있다. $a > b$ 인 a, b 를 선택하자. 그러면 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 을 $M_{[c_{i-2} + \epsilon, c_i + \epsilon]}$ 에서 $g(p_{i-1}) = a > b = g(p_i)$ 을

만족시키는 $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ 로 바꿀 수 있다.

p_{i-1} 와 p_i 의 다른 임계점에 대해 g 의 함숫값은 f 와 같다. 즉, 요약하면 p_{i-1} 는 p_i 의 지표보다는 크고 p_i 의 함숫값보다는 작았지만 지금은 p_{i-1} 의 함숫값도 p_i 보다 더 커졌다. 그러므로 이제 p_{i-1} 은 p_i 보다 함숫값도 크고 지표도 크므로 p_{i-1} 을 p_i 로 p_i 를 p_{i-1} 로 다시 정의하자. 그리고 $a = c_i$, $b = c_{i-1}$ 로 두자. 그러면 $g(p_{i-1}) < g(p_i)$ 이고 $\text{index}(p_{i-1}) < \text{index}(p_i)$ 이다. 그리고 $i-1$ 번째와 i 번째에 임계점의 임계값과 지표를 뒤바꾸면 일치한다. 이런 전환은 한 단계씩 차례로 유한번 하면 전체가 바뀌어 임계값과 지표들의 오름차순으로 정렬할 수 있다. \square

위의 증명을 좀 더 자세히 보면 같은 지표의 핸들들을 차례로 바꾸지 않더라도 편하게 같은 함숫값을 동시에 줄 수 있음을 알 수 있다.

정리 2.5.8. [5] M 이 m 차원 닫힌 다양체이고 모스함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 주어져 있을 때, 함수 f 를 아래 조건을 만족하는 또 다른 모스함수 $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ 로 변경할 수 있다.

(1) f 와 g 는 같은 임계점을 갖는다. 더욱, 같은 지표를 가진 임계점의 수가 일치한다.

(2) g 의 임계점 p_i, p_j 에 대해 $\text{index}(p_i) < \text{index}(p_j)$ 이면 $g(p_i) < g(p_j)$ 이다.

(3) $\text{index}(p_i) = \text{index}(p_j)$ 이면 $g(p_i) = g(p_j)$ 이다.

즉, 위 정리를 정리해보면 N_λ 는 $\lambda-1$ 보다 같거나 작은 지표의 핸들이 붙어 이루어진 핸들바디 $N_{\lambda-1}$ 에 λ 핸들 r 개가 서로소 합집합으로 붙어 이루어진 것이다.

$$D^\lambda \times D^{m-\lambda} \sqcup D^\lambda \times D^{m-\lambda} \sqcup \dots \sqcup D^\lambda \times D^{m-\lambda}$$

여기서 r 은 지표가 λ 인 핸들의 수이다.

증명 정리 2.5.7.의 증명에서 보조정리 2.5.5.는 $f(p_{i-1}) < f(p_i)$ 이고 $\text{index}(p_{i-1}) > \text{index}(p_i)$ 인 임계점 p_{i-1}, p_i 에 적용할 수 있지만 $f(p_{i-1}) < f(p_i)$ 이고 $\text{index}(p_{i-1}) = \text{index}(p_i)$ 인 임계점 p_{i-1}, p_i 에도 적용할 수 있다. 그러므로 p_{i-1} 와 p_i 의 지표가 일치할 때, 보조정리 2.5.5.를 적용할 수 있으므로 $K(p_{i-1})$ 과 $K(p_i)$ 를 서로 만나지 않도록 할 수 있다. 그러면 보조정리 2.5.6.에 의해 p_{i-1} 와 p_i 의 임계값을 자유롭게 조정할 수 있어서 두 임계점의 임계값이 일치하도록 함수를 변형할 수 있다. \square

정의 2.5.9. [5] A 를 a 차원 다양체, B 를 b 차원 다양체, K 를 k 차원 다양체라 하고, $A \subset K, B \subset K$ 이고 $a + b = k$ 이라 하자. 만일 U 의 국소좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_k) 일 때, $A \cap U$ 가 $x_{a+1} = x_{a+2} = \dots = x_k = 0$ 이고 $B \cap U$ 는 $x_1 = x_2 = \dots = x_a = 0$ 으로 쓸 수 있는 열린 근방 U 가 존재한다면 A 와 B 는 점 $p_0 \in K$ 에서 수직으로 만난다라고 한다.

이 좌표에서 점 p_0 는 국소좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_k) 의 원점 $(0, \dots, 0)$ 이다.

M 이 m 차원 닫힌 다양체이고 모스함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 이고 X 가 f 에 대한 그래디언트형 벡터장이라고 할 때 임계점 p_i 들의 임계값을 오름차순으로 정렬하자. 그리고 $M_{[c_{i-2}+\varepsilon, c_i+\varepsilon]}$ 를 \bar{M} 으로 나타내자.

정리 2.5.10. [5] 임계점 $p_{i-1}, p_i \in \bar{M}$ 에 대해 다음을 가정하자.

- (1) $\text{index}(p_{i-1}) = \lambda$ 이면 $\text{index}(p_i) = \lambda + 1$ 이다.
- (2) 두 임계점이 분리되었을 때, $\partial D_l(p_i)$ 와 $\partial D_u(p_{i-1})$ 는 등위면 (level surface) $f^{-1}(c_{i-1} + \varepsilon)$ 안의 한 점에서 수직으로 만난다.

그러면 f 를 다음 두 조건을 만족하는 모스함수 g 로 변형할 수 있다.

(A) g 는 $\text{int}(\overline{M})$ 에서 임계점을 가지지 않는다.

(B) \overline{M} 의 밖의 부분과 경계 근처에서는 $f = g$ 이다.

위 정리에서 나타나는 등위면 $f^{-1}(c_{i-1} + \varepsilon)$ 은 $m - 1$ 차원 다양체이고 몰입된 다양체 $\partial D_l(p_i)$ 와 $\partial D_u(p_{i-1})$ 은 각각 차원이 λ 와 $m - \lambda - 1$ 을 가진다. 그러므로 $f^{-1}(c_{i-1} + \varepsilon)$ 의 차원은 $\partial D_l(p_i)$ 과 $\partial D_u(p_{i-1})$ 의 차원의 합이 된다. 그러므로 $\partial D_l(p_i)$ 과 $\partial D_u(p_{i-1})$ 은 등위면 $f^{-1}(c_{i-1} + \varepsilon)$ 안의 한 점에서 수직으로 만난다고 할 수 있다.

증명 가정에 의해 $\partial D_l(p_i)$ 와 $\partial D_u(p_{i-1})$ 이 등위면 $f^{-1}(c_{i-1} + \varepsilon)$ 안의 한 점에서 수직으로 만난다. 이 때 만나는 한 점을 q_0 라고 하자. 그러면 q_0 를 지나는 적분곡선 $C = C(t)$ 는 다음 조건을 가진다. $t \rightarrow \infty$ 일 때 $C(t)$ 는 $\partial D_l(p_i)$ 을 따라 점 p_i 로 수렴하고, $t \rightarrow -\infty$ 일 때 $C(t)$ 는 $\partial D_u(p_{i-1})$ 을 따라 점 p_{i-1} 로 수렴한다. 이 조건을 가진 X 의 유일한 적분곡선은 C 이다. 그러므로 C 를 점 p_i 와 점 p_{i-1} 를 끝 점으로 하는 컴팩트 곡선의 조각으로 생각할 수 있다.

$\text{index}(p_{i-1}) = \lambda$ 이기 때문에 그래디언트형 벡터장의 정의로부터 적절한 국소좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 를 가진 점 p_{i-1} 의 근방 V_1 에서 X 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X = -2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \dots - 2x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + 2x_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda+1}} + \dots + 2x_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

편의를 위해 x_1 과 $x_{\lambda+1}$ 의 역할을 바꿀 수 있다. 그러면 X 를 p_{i-1} 근처에서 다음과 같은 형태를 가진다.

$$X = 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \dots - 2x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - 2x_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda+1}} + \dots + 2x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (2.1)$$

$\text{index}(p_i) = \lambda + 1$ 이기 때문에 적절한 국소좌표계 (y_1, y_2, \dots, y_m) 을 가진 점 p_i 의 근방 V_2 에서 X 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X = -2y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - \dots - 2y_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial y_{\lambda+1}} + 2y_{\lambda+2} \frac{\partial}{\partial y_{\lambda+2}} + \dots + 2y_m \frac{\partial}{\partial y_m} \quad (2.2)$$

식 (2.1)와 (2.2)은 적분곡선 C 의 끝 점 근처의 근방 V_1 과 V_2 이지만 다음 (a), (b) 와 (c)을 만족하는 전체 곡선 C 의 근방 U 에서의 국소좌표계 (x_1, x_2, \dots, x_m) 를 찾을 수 있다.

- (a) 이 국소좌표계 안에서 점 p_{i-1} 의 좌표는 $(0, 0, \dots, 0)$ 이다.
- (b) 이 국소좌표계 안에서 점 p_i 의 좌표는 $(1, 0, \dots, 0)$ 이다.
- (c) X 는 U 에서

$$X = 2v(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} - \dots - 2x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - 2x_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda+1}} + 2x_{\lambda+2} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda+2}} + \dots + 2x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \quad (2.3)$$

이다. 여기서 $v(x_1)$ 은 $\delta > 0$ 인 구간 $-\delta < x_1 < 1 + \delta$ 에 정의된 변수 x_1 을 가지는 C^∞ 함수이다. 더욱, x_1 이 0의 근방에 있으면 $v(x_1) = x_1$ 이고, 1의 근방에 있으면 $v(x_1) = 1 - x_1$ 이다. 또한 $0 < x_1 < 1$ 일 때 $v(x_1) > 0$ 이다.

$v(x_1)$ 의 조건으로부터 X 의 (2.3)은 점 p_{i-1} 의 근방에서는 (2.1)과 일치하고, $(y_1, y_2, \dots, y_m) = (x_1 - 1, x_2, \dots, x_m)$ 으로 좌표변환을 한 후에 점 p_i 의 근방에서는 (2.2)과 일치한다.

곡선 C 의 근방 U 에서 (2.3)으로 묘사된 벡터장 X 를 변형하여 U 의 전체에서 $X \neq \mathbf{0}$ 이 되도록 한다. 이렇게 하기 위하여 변수 s 에 의존하는 집합족 $\{v_s(x_1)\}_s$ 을 구성하자. 더욱 자세히 보면 다음 조건을 만족하는 집합족이다.

- (a) 각 $v_s(x_1)$ 는 $-\delta < x_1 < 1 + \delta$ 에서 정의된 C^∞ 함수이다.

(b) 충분히 작은 양수 η 에 대해 $v_s(x_1)$ 들은 $-\eta < s < 2\eta$ 에서 변수 s 와 움직이는 것으로 정의되었다.

(c) 임의의 $s \geq \eta$ 에 대해 $v_s(x_1) = v(x_1)$ 이다. 여기서 $v(x_1)$ 는 X 의 (2.3)에 묘사된 함수이다.

(d) 임의의 $s \leq 0$ 에 대해 $v_s(x_1) = v_0(x_1)$ 이다. 더욱, 임의의 x_1 에 대해 $v_0(x_1) < 0$ 이다.

(e) 만일 $x_1 < -\frac{\delta}{2}$ 이거나 $x_1 > \frac{1+\delta}{2}$ 이면 임의의 s 에 대해 $v_s(x_1) = v(x_1)$ 이다.

이런 조건으로부터의 상황은 눈에 보이기 힘들지만 변수 s 가 η 와 같을 때 함수 $v(x_1)$ 자체로 함수를 변형할 수 있고, s 가 0으로 줄어드는 것처럼 함수 $v(x_1)$ 의 값을 아래로 내려 $s = 0$ 일 때는 항상 음수값을 갖도록 할 수 있다.

U 의 근방에서 벡터장 X 에서 다음 벡터장 \tilde{X} 로 바꿀 수 있다.

$$\tilde{X} = 2v_\rho(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} - \cdots - 2x_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - 2x_{\lambda+1} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda+1}} + 2X_{\lambda+2} \frac{\partial}{\partial X_{\lambda+2}} + \cdots + 2x_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

초항에 나온 ρ 는 $\rho = x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_m^2$ 으로 정의된 U 위의 C^∞ 함수이고, $v_\rho(x_1)$ 는 변수 s 에 대해 함수 ρ 를 대신할 집합족 $\{v_s(x_1)\}_s$ 으로부터 얻어진다. 집합족 $\{v_s(x_1)\}_s$ 의 조건 (c)과 (d)에 의해 \tilde{X} 는 C 와 분리된 U 의 부분집합에서 X 와 일치한다. \tilde{X} 의 두번째 세번째 항들은 x_1 축 위에 있지 않으면 0이 아니고, x_1 축 위에서는 \tilde{X} 의 초항이 $2v_0(x_1) < 0$ ($\rho = 0$)을 만족하므로 $\tilde{X} \neq \mathbf{0}$ 이다. 그러므로 U 위의 모든 점에서 $\tilde{X} \neq \mathbf{0}$ 이다.

\tilde{X} 는 C 와 분리된 U 의 부분집합에서 X 와 일치하기 때문에 \tilde{X} 를 U 의 밖의 부분에서 X 와 같이 매끄럽게 확장할 수 있어서 M 전체의 벡터장 Y 를 얻을 수 있다. 즉, 벡터장 X 와 Y 는 C 의 작은 근방에서만 다르다.

모스함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 의 연속적인 임계점 p_{i-1} 와 p_i 을 포함한 \bar{M} 를 고려하자. 벡터장 Y 를 위치럼 함수값이 $\mathbf{0}$ 을 갖지 않도록 구성하자. Y 의 구조를 가까이에서 살펴보면 Y 의 모든 적분곡선은 밑의 경계 $\partial_0 \bar{M} = f^{-1}(c_{i-2} + \varepsilon)$ 을 통해 \bar{M} 에 들어가고 위의 경계 $\partial_1 \bar{M} = f^{-1}(c_i + \varepsilon)$ 를 통해 나간다. 이 사실을 이용하여 \bar{M} 위의 함수 $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$ 를 $c_{i-2} + \varepsilon$ 에서 $c_i + \varepsilon$ 까지 Y 의 적분곡선을 따라 증가하는 매끄러운 함수로 정의할 수 있다. 또한 \tilde{f} 는 경계 근처의 근방에서는 f 와 일치하도록 구성할 수 있다. 그러면 \bar{M} 의 밖의 부분에서 f 가 되도록 \tilde{f} 를 확장하여 새로운 매끄러운 함수 $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ 를 얻을 수 있다. 이 함수 g 는 모스함수이고 Y 가 g 에 대한 그래디언트형 벡터장이다. 그리고 이 함수 g 가 조건 (A)와 (B)를 만족한다. \square

위 정리를 통해(A)로부터 f 가 g 로 바뀌었을 때 \bar{M} 안의 임계점 p_{i-1} 와 p_i 가 상쇄될 수 있음을 알 수 있다. g 에 대한 그래디언트형 벡터장 Y 를 고정하면 (B)에 의해 \bar{M} 의 밖의 영역에서 Y 가 f 에 대한 그래디언트형 벡터장 X 와 일치한다고 가정할 수 있다. 그러므로 g 와 Y 로 결정되는 핸들분할에서 p_{i-1} 와 p_i 에 대응되는 핸들들이 함께 상쇄될 수 있음을 알 수 있다.

정의 2.5.11. [5] 경계있는 m 차원 다양체 N 에 λ 핸들이 붙은 상황을 고려하자.

$$N' = N \cup_{\phi} D^{\lambda} \times D^{m-\lambda}$$

이 경우에 λ 핸들의 코코어 $\mathbf{0} \times D^{m-\lambda}$ 의 경계 $\mathbf{0} \times \partial D^{m-\lambda}$ 를 λ 핸들의 띠 구 (belt sphere)라고 부른다. 이 띠 구(belt sphere)는 $\partial N'$ 에 몰입된 $m - \lambda - 1$ 차원의 구이다.

이 띠 구는 이름처럼 띠가 둘러있는 것처럼 λ 핸들의 주위를 둘러 있다.

정리 2.5.12. [5] M 이 m 차원 닫힌 다양체라고 하자. 만일 M 이 연결 (connected)공간이라면 지표가 0인 임계점 1개와 지표가 m 인 임계점 1개가 있는 M 위의 모스함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 존재한다.

증명 이제 모스함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 지표 0인 임계점들은 같은 임계값 c_0 의 값을 가지고 지표가 1인 모든 임계점들은 같은 임계값 $c_1 (> c_0)$ 의 값을 가진다고 가정할 수 있다. 모스함수에 대한 핸들분할은 다음과 같은 형태를 얻는다.

$$M_{c_0+\varepsilon} = D_1^m \sqcup D_2^m \sqcup \cdots \sqcup D_r^m \quad (0\text{핸들들의 서로소 합집합의 형태})$$

$M_{c_1+\varepsilon}$ 은 $D_1^m \sqcup D_2^m \sqcup \cdots \sqcup D_r^m$ 에 1핸들들을 붙여 얻어진다. 만일 $M_{c_1+\varepsilon}$ 이 연결공간이 아니라면 연결성분 K_1, K_2, \dots, K_s 이 하나보다 많이 이루어져 있을 것이고 $M_{c_1+\varepsilon}$ 에 지표가 2인 핸들들이나 더 높은 지표의 핸들들이 붙어 M 을 얻기 때문에 M 도 하나 이상의 연결성분을 가지게 된다. (왜냐하면 지표가 2이거나 더 높은 지표의 핸들의 붙이는 사상은 연결이기 때문에 붙여지면 하나의 연결성분으로 붙는다. 그러므로 연결성분의 수는 그런 핸들들이 붙은 후에 줄어들지 않는다.) 그러므로 이는 M 이 연결공간이라는 사실에 모순이 되므로 $M_{c_1+\varepsilon}$ 도 연결공간이 된다.

$M_{c_0+\varepsilon}$ 에서 D^m 이 많이 존재한다고 가정하자. 그러면 D_r^m 의 사이들은 1핸들 $D^1 \times D^{m-1}$ 에 의해 다른 D_r^m 을 연결시켜 줄 것이다. 1핸들의 붙이는 구 $\partial D^1 \times \mathbf{0}$ (= 2개의 점)는 0핸들의 D_r^m 의 띠 구 ∂D_r^m 은 한 점에서 만나므로 0핸들 D_r^m 에 대응되는 임계점과 1핸들 $D^1 \times D^{m-1}$ 에 대응되는 임계점들은 서로 없어진다. 이 논의를 계속하면 지표가 0인 임계점이

오직 한 개인 모스함수 $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ 을 얻는다.

다음 부호가 바뀐 함수 $-g : M \rightarrow \mathbb{R}$ 을 고려하자. 말하자면 함수 $-g$ 는 g 를 위에서 아래로 방향을 바꿔 얻어진 모스함수이다. 임계점의 집합은 g 와 $-g$ 가 같을지라도 g 의 임계점 p_i 의 지표가 λ 라면 $-g$ 의 임계점 p_i 는 $m - \lambda$ 의 지표를 갖는다. 즉, 핸들분할의 용어에서 코어와 코코어의 역할을 바꾸고, g 의 λ 핸들이 $-g$ 의 $m - \lambda$ 핸들이 된다. 그러므로 이를 통해 $-g$ 를 변형하여 0핸들의 수가 한 개가 되도록 할 수 있다. 즉, g 의 m 핸들의 개수는 1개이다. 그러므로 변형된 g 는 오직 한개의 0핸들과 m 핸들을 갖는다. □

제 3 장

핸들분할의 예

3.1 2차원 다양체의 예

제 2 장의 내용을 바탕으로 모스함수 f 에 대한 핸들분할을 해보자. 간단한 예로 2차원 구(sphere)와 사영평면(projective plane)에 대해 살펴보자.

예 3.1.1. [5] 2차원 구 S^2 를

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

로 정의하고 모스함수 $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3$$

이렇게 정의한 함수 f 를 좌표 x_3 에 대한 높이함수(height function)라고 한다. f 가 매끄럽다는 것은 각 점 근처의 임의의 좌표계 ϕ 에 대하여 $f \circ \phi^{-1}$ 가 미분가능하다는 것이므로 먼저 S^2 의 좌표계에 대해 살펴봐야 한다. S^2 의 좌표근방을 북반구($x_3 \geq 0$)와 남반구($x_3 \leq 0$)로 나누어서 보자. 북반구에 대한 좌표계를 $\phi_N^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)})$ 라 하고, 남반구에 대한 좌표계를 $\phi_S^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, -\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)})$ 라 하자. 그러면 추이사상 $\phi_S \circ \phi_N^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ 은 교집합 $x_1^2 + x_2^2 = 1$

에서 C^∞ 이므로 S^2 는 매끄러운 다양체가 된다.

그러므로 각 좌표계에서의 임계점을 살펴보면 먼저 북반구에서는 $f \circ \phi_N^{-1} = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}$ 이므로 $\frac{\partial(f \circ \phi_N^{-1})}{\partial x_1} = \frac{-x_1}{\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}}$, $\frac{\partial(f \circ \phi_N^{-1})}{\partial x_2} = \frac{-x_2}{\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}}$ 이 된다. 그러므로 $(0,0)$ 에서 임계점이 존재한다. 또한 임계점 $(0,0)$ 의 헤세행렬은 $H_{(f \circ \phi_N^{-1})}(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 이 된다. $\det H_{(f \circ \phi_N^{-1})} \neq 0$ 이므로 정상적인 임계점이 되고 지표가 2 이므로 임계값 1 에 2 핸들이 대응된다. 다음 남반구에서는 $f \circ \phi_S^{-1} = -\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}$ 이므로 $\frac{\partial(f \circ \phi_S^{-1})}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}}$, $\frac{\partial(f \circ \phi_S^{-1})}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}}$ 이 된다. 그러므로 $(0,0)$ 에서 임계점이 존재한다. 또한 임계점 $(0,0)$ 의 헤세행렬은 $H_{(f \circ \phi_S^{-1})}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이 된다. $\det H_{(f \circ \phi_S^{-1})} \neq 0$ 이므로 정상적인 임계점이 되고 지표가 0 이므로 임계값 -1 에 0 핸들이 대응된다. f 는 정상적인 임계점만 존재하므로 모스함수이다. 그러므로 f 에 의한 S^2 의 핸들분할은 다음과 같이 0 핸들과 2 핸들로 구성된다.

$$S^2 = D^2 \cup D^2$$

다음으로는 사영평면(projective plane)의 핸들분할에 대해 알아보자.

예 3.1.2. [5] 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 원점을 지나는 모든 직선들의 집합을 고려하자. 사영평면 P^2 는 2차원 다양체의 구조를 가진 집합이다. 원점이 아닌 임의의 점 (x_1, x_2, x_3) 에서 원점과 (x_1, x_2, x_3) 을 지나는 직선은 유일하게 결정된다. 이 직선을 P^2 의 유일한 점으로 생각하자. P^2 의 점을 $[x_1, x_2, x_3]$ 으로 정의한다. \mathbb{R}^3 에서 두 직선이 일치하는 필요충분조건은 한 직선은 원점과 (x_1, x_2, x_3) 을 지나고 다른 직선은 원점과

(y_1, y_2, y_3) 을 지날 때 $(x_1, x_2, x_3) = (\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3)$ 을 만족하는 원점이 아닌 실수 α 가 존재해야 한다. 즉, 위 조건은 P^2 의 두 개의 점이 일치하는 필요충분조건이다. 그러므로 $[x_1, x_2, x_3] = [y_1, y_2, y_3]$ 이 된다.

위 조건을 이용하여 P^2 가 콤팩트임을 보일 수 있다. P^2 의 임의의 점 $[x_1, x_2, x_3]$ 에 대해 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ 인 점 (y_1, y_2, y_3) 은 위 조건을 만족하는 α 가 존재한다. 여기서 (y_1, y_2, y_3) 는 단위 구 S^2 의 점이다. 임의로 주어진 $[x_1, x_2, x_3]$ 은 단위구의 점 (y_1, y_2, y_3) 으로 정해지기 때문에 $[y_1, y_2, y_3]$ 에서 (y_1, y_2, y_3) 으로 가는 사상 $S^2 \rightarrow P^2$ 은 연속인 전사함수이다. S^2 는 콤팩트 이므로 연속함수의 이미지인 P^2 도 콤팩트이다.

위의 사상 $S^2 \rightarrow P^2$ 을 사영이라고 부른다. 이 사영사상은 S^2 의 두 점 $(y_1, y_2, y_3), (-y_1, -y_2, -y_3)$ 을 P^2 의 같은 점으로 보내는 2-1 사상이다.

함수 $f: P^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f([x_1, x_2, x_3]) = \frac{a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

여기서 a_1, a_2, a_3 은 $a_1 < a_2 < a_3$ 을 만족하는 임의로 고정된 상수이다. 모든 x_i 들에 일제히 α 배를 해도 함숫값은 변하지 않으므로 P^2 위에 잘 정의된 함수이다.

아래첨자 i 를 고정하고 $x_i \neq 0$ 인 P^2 의 점 $[x_1, x_2, x_3]$ 으로 구성된 U_i 를 고려해보면 U_i 는 P^2 의 개집합이다. 예를 들어 $i=2$ 이면 다음과 같이 정의된 U_i 위에 2차원 국소좌표계 (X_1, X_2) 가 존재한다.

$$X_1 = \frac{x_1}{x_2}, X_2 = \frac{x_3}{x_2}$$

위에 정의된 f 에서 분모와 분자를 x_i^2 로 나누면 f 의 국소좌표계 (X_1, X_2)

로 표현할 수 있다.

$$f(X_1, X_2) = \frac{a_1 X_1^2 + a_2 + a_3 X_2^2}{X_1^2 + 1 + X_2^2}$$

임계값을 찾기 위해 X_2 에 대해 f 를 미분하면

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} = \frac{2X_2\{(a_3 - a_1)X_1^2 + (a_3 - a_2)\}}{(X_1^2 + X_2^2 + 1)^2}$$

이 된다. $a_3 > a_j (j = 1, 2)$ 이므로 우변이 0이려면 $X_2 = 0$ 이다.

다음 $X_2 = 0$ 위에서 f 의 축소함수 $f|_{X_2=0}$ 을 고려하면

$$f|_{X_2=0} = \frac{a_1 X_1^2 + a_2}{X_1^2 + 1}$$

이다. 위와 같은 이유로 X_1 에 대해 $f|_{X_2=0}$ 을 미분하면 이 미분이 0인 것과 $X_1 = 0$ 이 것은 동치이다. 이 과정을 계속하면 좌표근방 U_i 위에 있는 f 의 임계점은 반드시 $X_1 = X_2 = 0$ 이다. 즉 U_i 위의 f 의 임계점은 국소좌표계 (X_1, X_2) 는 원점 $(0, 0)$ 이다. 그러므로 $[x_1, x_2, x_3]$ 에서 $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ 이 U_i 위에서 유일한 임계점이 된다.

이 임계점에서 f 의 헤세행렬은 대각선 외의 성분은 모두 0인 행렬이다. U_1 에서의 임계점 $[1, 0, 0]$ 의 헤세행렬은

$$H = \begin{pmatrix} 2(a_2 - a_1) & 0 \\ 0 & 2(a_3 - a_1) \end{pmatrix}$$

이고 U_2 에서의 임계점 $[0, 1, 0]$ 의 헤세 행렬은

$$H = \begin{pmatrix} 2(a_1 - a_2) & 0 \\ 0 & 2(a_3 - a_2) \end{pmatrix}$$

이고 U_3 에서의 임계점 $[0, 0, 1]$ 의 헤세 행렬은

$$H = \begin{pmatrix} 2(a_1 - a_3) & 0 \\ 0 & 2(a_2 - a_3) \end{pmatrix}$$

이다. $a_1 < a_2 < a_3$ 이므로 $\det(H) \neq 0$ 이 된다. 그러므로 f 는 모스함수이다. 또한 임계점 $[1, 0, 0]$ 은 지표가 0이고 임계점 $[0, 1, 0]$ 은 지표가 1이고 임계점 $[0, 0, 1]$ 은 지표가 2가 된다.

그러므로 P^2 는 다음과 같이 핸들분할이 된다.

$$P^2 = D^2 \cup D^1 \times D^1 \cup D^2$$

1핸들의 붙이는 구는 두 점 $\partial D^1 \times \mathbf{0}$ 이다. 만일 ∂X 가 공집합이 아닌 연결집합이면 동위사상으로 유일한 매장함수 $\varphi: \partial D^1 \times \mathbf{0} \rightarrow \partial X$ 가 존재한다. $n \geq 2$ 이면 $\pi_0(O(n-1)) \cong \mathbb{Z}_2$ 이므로 정확히 $\varphi(\partial D^1 \times \mathbf{0})$ 에 두 개의 틀이 존재한다. 그러므로 각 $n \geq 2$ 에 대해 0핸들에 1핸들이 붙어 얻을 수 있는 n 차원 다양체는 정확히 2개가 존재한다. [3]

2차원 다양체에서 0핸들에 1핸들이 붙어 얻을 수 있는 모양은 위와 같이 2가지 형태이다. 만약 왼쪽처럼 붙이면 원환(annulus)이 생기므로 2핸들을 붙여서 닫힌 곡면을 얻기 어렵다. 그러므로 사영평면은 오른쪽처럼 붙여야 한다. 오른쪽 그림에서 0핸들과 1핸들의 합집합 경

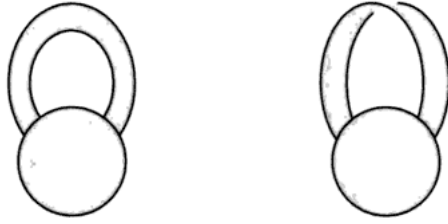


그림 1: D^2 에 붙은 1핸들 [3]

계가 하나의 원인 퇴비우스의 띠(Möbius band)의 경계와 동형이므로 하나의 2핸들로 덮을 수 있다. 그러므로 사영평면 P^2 의 핸들분할은 오른쪽 그림처럼 1핸들을 붙여 얻어진 다양체에 2핸들을 붙인 것과 같다. 즉, 퇴비우스의 띠에 원판을 경계에 따라 붙여 얻어진 것이라고 볼 수 있다.

3.2 3차원 다양체의 예

M 에 연결공간이고 향을 줄 수 있는 닫힌 3차원 다양체라고 하자. 그러면 0핸들과 3핸들이 하나씩 존재하는 모스함수 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 가 존재해서 다음과 같이 핸들분할을 할 수 있다.

$$M = h^0 \cup (h_1^1 \sqcup h_2^1 \sqcup \cdots \sqcup h_k^1) \cup (h_1^2 \sqcup h_2^2 \sqcup \cdots \sqcup h_k^2) \cup h^3$$

M 의 부분핸들바디를 N 이라고 하자. 그러면 향을 줄 수 있기 때문에 N 은 지너스(genus)가 k 개인 핸들바디라고 부르고 H_k 라고 쓴다. 그러면 경계 ∂H_k 는 지너스(genus)가 k 인 향을 줄 수 있는 닫힌 곡면이 된다.

$N^* = M - \text{int}(N)$ 이라고 하자. 그러면 N^* 는 $-f$ 와 관련된 핸들 분할에서 0핸들과 1핸들의 합집합이다. 즉, N^* 에서의 1핸들은 M 에서 2

핸들이 된다. 그러므로 N^* 의 지너스의 개수는 M 의 2핸들의 수와 같다. 즉 N 의 1핸들의 수와 같으므로 k 개이다. 그러므로 $N^* \cong N$ 이다. 그래서 M 을 같은 지너스 k 인 핸들바디 N 과 N^* 를 미분동형사상 $\varphi: \partial N^* \rightarrow \partial N$ 에 의해 경계를 따라 붙인것으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M = N \cup_{\varphi} N^*$$

이렇게 M 을 표현한 것을 지너스 k 의 히가드분할(Heegaard splitting)이라고 부른다.

지너스 k 개인 핸들바디 N 에서 1핸들의 띠 구는 k 개의 원으로 표현되고 이러한 원들을 머리디안(meridian)이라 부르고 m_1, m_2, \dots, m_k 으로 표현하자. 비슷하게 N^* 에서의 머리디안을 $m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*$ 로 정의하자. N^* 의 1핸들은 M 에서의 2핸들이므로 N^* 의 머리디안들은 M 에서 붙이는 구이다.

그러므로 히가드분할 $M = N \cup_{\varphi} N^*$ 에서 붙이는 사상 $\varphi: \partial N^* \rightarrow \partial N$ 으로 보내는 머리디안 $m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*$ 의 이미지를 ∂N 에서 볼 수 있다. 이미지를 다음과 같아 정의하자.

$$\mu_1 = \varphi(m_1^*), \mu_2 = \varphi(m_2^*), \dots, \mu_k = \varphi(m_k^*)$$

정의 3.2.1. [5] 지너스 k 개인 핸들바디 N 과 ∂N 위에 위치럼 얻어진 닫힌 곡선 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ 가 함께 있는 $(N; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ 를 M 의 히가드 다이어그램(Heegaard diagram)이라고 부른다.

M 의 핸들분할도 유일하지 않기 때문에 M 의 히가드 다이어그램도 역시 유일하지 않다. 그러나 역으로 다음을 정의할 수 있다.

보조정리 3.2.2. [5] 히가드 다이어그램 $(N; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ 은 유일하게 M 의 미분동형 타입을 결정한다.

지너스 k 개인 핸들바디 N 과 ∂N 위의 k 개의 서로소인 단순 닫힌 곡선 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ 이 임의로 주어지면 $(N; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ 은 M 의 히가드 다이어그램이 아니다. 히가드 다이어그램이 되기 위한 필요충분조건은 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ 를 따라 N 위의 2핸들의 k 개 붙어 얻어진 핸들바디

$$(N; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$$

의 경계 $(\partial N; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ 가 S^2 이어야 한다.

예 3.2.3. [5] 3차원 사영공간 P^3 의 히가드 다이어그램을 찾아보자. P^3 의 핸들 분할은 사영평면 P^2 를 얻었던 것처럼 보이면 다음과 같은 형태를 얻을 수 있다.

$$P^3 = h^0 \cup h^1 \cup h^2 \cup h^3$$

그러므로 P^3 는 지너스 1인 히가드 분할을 가진다. 지너스가 1인 핸들바디 N 은 입체토러스(solid torus) $S^1 \times D^2$ 와 미분동형이다. S^1 의 한 점 θ_0 를 고정하여 $\{\theta_0\} \times \partial D^2$ 을 머리디안 m 이라 하고 ∂N 에서 머리디안 m 과 한 점에서 만나는 단순 닫힌 곡선 l 을 롱지튜드(longitude)라고 한다. 머리디안 m 의 선택에 의해 입체토러스(solid torus) 곡면의 동위사상에 의해 유일해도 롱지튜드의 선택은 유일하지 않다. 그래서 여기 ∂D^2 위의 한 점 ϕ_0 을 고정하고 롱지튜드 l 로써 $S^1 \times \{\phi_0\}$ 의 형태의 닫힌 곡선을 잡자.

그러면 ∂N 위의 기점(base point)이 $x_0 = (\theta_0, \phi_0)$ 인 기본군 $\pi_1(N, x_0)$ 은 \mathbb{Z} 와 동형이다. 그러므로 롱지튜드는 생성원(generate)이 된다. 3차

원 사영공간 P^3 는 다음 형태의 세포(cell) 분할로 주어진다.

$$P^3 = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup e^3$$

그래서 P^3 는 P^2 의 세포 분할 $e^0 \cup e^1 \cup e^2$ 의 합집합으로 주어진다. 그러므로 $\pi_1(P^3, x_0) \cong \pi_1(P^2, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$ 을 얻는다.

위 사실로부터 단순 닫힌 곡선 μ 는 P^3 의 히가드 다이어그램으로 주어진 m 과 같은 방향으로 2번 겹쳐야 한다는 것을 알 수 있다. 그런 루프는 ∂N 의 동위사상을 한 후에 미분동형사상 $f_n|_{S^1 \times \partial D^2} : S^1 \times \partial D^2 \rightarrow S^1 \times \partial D^2$ 을 이용하여 다음 루프를 $f : (I, \partial I) \rightarrow (S^1 \times \partial D^2, x_0)$ 으로 일치시킬 수 있다.

$$f(t) = (4\pi t, \pm 2\pi t)$$

f 의 위의 정의에서 $S^1 \times \partial D^2$ 에 대한 좌표는 각으로 주어지고 기점은 $x_0 = (0, 0)$ 이다. 그러므로 P^3 의 히가드 다이어그램은 다음 그림과 같다.

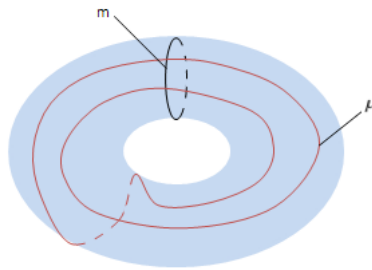


그림 2: P^3 의 히가드 다이어그램 [5]

예 3.2.4. [5] S^3 와 \mathbb{C}^2 의 단위원 $\{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ 과 동일시해 보자. p, q 는 자연수이고 $p \geq 2$ 에 대해 $(p, q) = 1$ 이라고 하자. 간단하게

$1 \leq q \leq p-1$ 라고 가정하자. 그러면 $k \in \mathbb{Z}$ 이고 $w = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)$ 에 대해

$$(z'_1, z'_2) = (w^k z_1, w^{qk} z_2)$$

일 때 S^3 의 두 점 (z_1, z_2) 와 (z'_1, z'_2) 을 동등하다고 하자. 즉, $(z_1, z_2) \sim (z'_1, z'_2)$ 라고 표현하자. 그러면 관계 \sim 는 동치관계(equivalent relation)이고 이 관계에 의한 S^3 의 상공간을 (p, q) 의 렌즈공간(lens space)라고 부르고

$$L(p, q) = S^3 / \sim$$

라고 쓴다.

렌즈공간은 항을 줄 수 있는 닫힌 3차원 다양체이고 S^3 는 $L(p, q)$ 의 p -번 접히는 덮개(fold cover)이고 $\pi_1(L(p, q), x_0) \cong \mathbb{Z}_p$ 이다. 그러므로 사영공간 P^3 는 렌즈공간 $L(2, 1)$ 로 생각할 수 있다.

렌즈공간 $L(p, q)$ 의 히가드 다이어그램을 표현해보자. 렌즈공간은 지너스가 1인 히가드 다이어그램에 의해 표현할 수 있다. $N = S^1 \times D^2$ 이라고 하자. 그러면 사영공간과 같은 방법으로 경계 $\partial N = S^1 \times \partial D^2$ 위의 각의 쌍으로 좌표 (θ_0, ϕ_0) 를 줄 수 있다. 그리고 루프 $f: (I, \partial I) \rightarrow (S^1 \times \partial D^2, x_0)$ 을

$$f(t) = (4\pi pt, 2\pi qt)$$

으로 정의하자. 여기서 $x_0 = (0, 0)$ 이다. μ 를 루프에 의해 나타나는 단순 닫힌 곡선으로 표현한다고 하자. 그러면 (N, μ) 은 $L(p, q)$ 의 히가드 다이어그램이다.

3.3 4차원 다양체의 예

만일 다양체가 4차원이고 연결공간이면 핸들바디를 이용한 부분 핸들바디를 통해 전체 다양체를 단순하게 볼 수 있다. 왜냐하면 임의의 매끄러운 연결 4차원 다양체는 그들의 1핸들과 2핸들에 의해 결정된다는 라우덴바흐(Laudenbach)와 포에나루(Poenaru)의 증명 때문에 3핸들의 붙는 부분(attaching region)을 보일 필요가 없다. 즉, 0핸들 D^4 의 경계 S^3 위에 1핸들과 2핸들의 붙는 부분만 보이던 된다. 1핸들에서 붙는 부분은 D^3 의 쌍으로 나타나고 2핸들이 붙는 부분은 1핸들을 지나면서 매장된 틀원(framed circle)과 같이 나타난다. 1핸들을 지나지 않는 임의의 2핸들은 매장함수 $\varphi: S^1 \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \subset S^3$ 에 의해 붙여진다. 이 매장된 매듭은 $\varphi(S^1 \times (0,0))$ 와 함께 \mathbb{R}^3 안에서 그들의 법다발(normal bundle)의 정규직교틀(orthonormal framing) $\mathbf{e} = \{u, v\}$ 에 의해 결정된다. 틀(framing) \mathbf{e} 는 $\varphi(x, \lambda, v) = (x, \lambda u + v)$ 에 의해 결정된다. 또한 K 의 방향과 오른손법칙(right hand law)을 사용하여 하나의 법벡터장 u 에 다른 v 를 결정한다. 그러므로 임의의 K 에 법벡터장은 $\pi(SO_2) = \mathbb{Z}$ 에 의해 매개화할 수 있는 틀을 결정한다. k 들은 0틀인 u_0 를 k 번 꼬아 얻은 벡터장 u_k 가 대응된다. 이렇게 나타나는 틀원(framed circle)들을 C_1, C_2, \dots, C_k 으로 표현한다. 여기서 $C_i = \varphi_i(S^1 \times (0,0))$ 으로 간단하게 나타낸다. [2]

정의 3.3.1. [5] $(N; C_1, C_2, \dots, C_k)$ 를 4차원 다양체의 커비 다이어그램이라고 한다. 여기서 N 은 0핸들과 1핸들이 붙은 부분핸들바디이다.

정의 3.3.2. [5] S^3 안의 서로소이 매끄러운 닫힌 곡선들 C_1, C_2, \dots, C_k 의 합집합 $L = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ 을 링크(link)라고 한다.

하나의 단순 닫힌 곡선 C_1 으로 구성된 링크를 매듭(knot)이라 부른다. 링크는 유한히 많은 매듭들의 서로소 합집합이다.

S^3 에서 서로소인 단순 닫힌 곡선 C_1, C_2 에 대해 그들의 방향이 있으면 C_1 과 C_2 사이의 연결수(linking number)인 정수가 결정된다. 연결수(linking number)는 $\text{Link}(C_1, C_2)$ 으로 표현된다. C_1 과 C_2 의 역할이 바뀌어도 $\text{Link}(C_1, C_2)$ 은 바뀌지 않는다. C_1 과 C_2 가 겹쳐지는 부분에서 밑의 그림의 오른쪽처럼 겹쳐지면 +1을 왼쪽처럼 겹쳐지면 -1이 주어진다. 자신이 겹쳐서 나타나는 부분은 무시한다. 이렇게 겹쳐지는 부분들의 값들을 모두 더하면 $\text{Link}(C_1, C_2)$ 를 두 번 계산한 짝수를 얻게 된다.

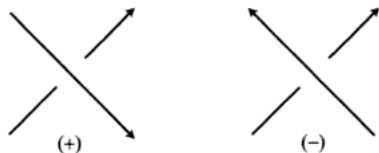


그림 3: 링크 다이어그램에서 겹쳐지는 부분의 부호 [3]

예 3.3.3. [5] 4차원 구 S^4 를

$$S^4 = \{(x_1, x_2, \dots, x_5) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 = 1\}$$

로 정의하고 모스함수 $f: S^4 \rightarrow \mathbb{R}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_5) = x_5$$

이렇게 정의한 함수 f 를 좌표 x_5 에 대한 높이함수(height function)라고 한다. 그러면 2차원 구의 예처럼 임계점 $(0, 0, 0, 0, 1)$ 의 지표는 0이고 임계점 $(0, 0, 0, 0, -1)$ 의 지표는 4가 된다. 그러므로 S^4 은 0핸들과 4핸들로

구성된 핸들분할을 가진다. 즉,

$$S^4 = D^4 \cup D^4$$

이다. 그러므로 S^4 의 커비 다이어그램은 (D^4) 으로 비어있는 다이어그램이 된다.

예 3.3.4. [5] $S^2 \times S^2$ 의 핸들분할에 대해 알아보자. 함수 $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 와 $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 를 높이함수(height function)로 정의하고, $1 < A < B$ 인 실수 A, B 에 대해 함수 $F = (A + f)(B + g) : S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 를 정의하자. 그러면 충분히 큰 실수 A, B 를 선택하면 F 는 $S^2 \times S^2$ 의 모스함수가 된다. 왜냐하면 $S^2 \times S^2$ 의 임의의 점 (p, q) 을 선택하자. 그리고 점 p 의 근처 국소좌표계를 (x_1, x_2) 라 하고 점 q 근처 국소좌표계를 (y_1, y_2) 라고 하자. 그러면 점 (p, q) 의 근처 국소좌표계를 (x_1, x_2, y_1, y_2) 으로 잡을 수 있다. $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(B + g)$ 이고 $\frac{\partial F}{\partial y_j} = \frac{\partial g}{\partial y_j}(A + f)$ 이므로 $A > |f|$ 이고, $B > |g|$ 인 A, B 를 선택하면 f 의 임계점 p_0 에서 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0, q) = 0$ 이고 g 의 임계점 q_0 에서 $\frac{\partial g}{\partial y_j}(p, q_0) = 0$ 이다. 그러므로 F 의 임계점의 형태는 (p_0, q_0) 의 꼴이고 지표는 p_0 와 q_0 의 지표들의 합으로 표현된다. f 와 g 의 임계점은 2개이므로 F 는 지표가 0, 2, 2 그리고 4인 임계점 4개가 존재한다. 임계값은 오름차순으로 $(A - 1)(B - 1), (A - 1)(B + 1), (A + 1)(B - 1), (A + 1)(B + 1)$ 이다. 그러므로 $S^2 \times S^2$ 의 핸들분할은

$$S^2 \times S^2 = D^4 \cup D^2 \times D^2 \cup D^2 \times D^4$$

이다. 그러므로 $S^2 \times S^2$ 의 커비 다이어그램은 $(D^4 : C_1, C_2)$ 로 이루어져 있다. D^4 의 경계 $\partial D^4 = S^3$ 에서 2핸들의 붙이는 구가 어떻게 붙어있는지

살펴보자. 그러면 두 개의 $\partial D^2 \times D^2 = S^1 \times D^2$ 가 다음과 같이 붙어있는 것을 알 수 있다. 그러므로 C_1 과 C_2 의 연결수(linking number)는 1을 가

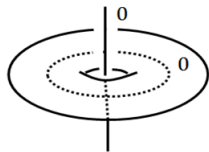


그림 4: 히가드 분할 [3]

지고 각각의 틀(frame)은 0을 가진다. 즉, $S^2 \times S^2$ 의 커버 다이어그램은 다음과 같다.



그림 5: $S^2 \times S^2$ 커버 다이어그램 [3]

예 3.3.5. [5] \mathbf{CP}^2 의 핸들분할에 대해 알아보자. $\mathbb{C}^3 = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_i \in \mathbb{C}, i = \{1, 2, 3\}\}$ 을 3차원 복소공간이라고 한다. 2차원 복소사영공간 \mathbf{CP}^2 는 복소차원 2인 복소구조를 가진 다양체이고 원점을 지나는 \mathbb{C}^3 공간에서의 모든 '직선'의 집합이다. 여기서 위첨자 2는 복소차원을 의미하지만 일반적으로 \mathbf{CP}^2 의 차원은 4이다. 또한 이 다양체는 콤팩트로 잘 알려져 있다. 원점과 다른 \mathbb{C}^3 의 점 (z_1, z_2, z_3) 은 \mathbf{CP}^2 의 점으로 결정된다. 이 점을 $[z_1, z_2, z_3]$ 으로 정의하자. $[z_1, z_2, z_3] = [w_1, w_2, w_3]$ 일 필요충분조건은 $(z_1, z_2, z_3) = (\alpha w_1, \alpha w_2, \alpha w_3)$ 인 영이 아닌 복소수 α 가 존재한다는 것이다.

실수 $a_1 < a_2 < a_3$ 에 대해 함수 $f: \mathbf{CP}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 을 정의하자.

$$f(z_1, z_2, z_3) = \frac{a_1 |z_1|^2 + a_2 |z_2|^2 + a_3 |z_3|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2}$$

사영평면의 경우와 비슷한 방법으로 아래첨자 i 를 고정하고 $z_i \neq 0$ 인 모든 점 $[z_1, z_2, z_3]$ 의 집합 U_i 를 정의하자. 그러면 U_i 는 \mathbf{CP}^2 의 개근방이다. $i=1$ 라고 하면

$$Z_1 = \frac{z_2}{z_1}, Z_2 = \frac{z_3}{z_1}$$

으로 정의되는 2차원 국소좌표계가 존재한다. (Z_1, Z_2) 을 이용하여

$$f(Z_1, Z_2) = \frac{a_1 + a_2 |Z_1|^2 + a_3 |Z_2|^2}{1 + |Z_1|^2 + |Z_2|^2}$$

으로 쓸 수 있다. 만일 $Z_j = X_j + \sqrt{-1}Y_j (j=1,2)$ 이라 하면, $|Z_j|^2 = X_j^2 + Y_j^2$ 이다. f 를 4개의 변수 (X_1, Y_1, X_2, Y_2) 인 함수로 간주하면 사영평면처럼 계산할 수 있다. 그러므로 원점 $\mathbf{0}$ 은 U_i 에서 유일한 정상적인 임계점이다. 지표는 $2(i-1)$ 이고 임계값은 a_i 이다. 그러므로 모스함수 $f: \mathbf{CP}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 는 3개의 임계점을 가지고 그들의 지표는 0, 2 그리고 4이다. 그러므로 \mathbf{CP}^2 의 핸들분할은

$$\mathbf{CP}^2 = D^4 \cup D^2 \times D^2 \cup D^4$$

이다.

$[1, 0, 0]$ 의 지표는 0이고 이 점에 대응하는 원판 D^4 는 $D^4 = \{[1, z_2, z_3] \mid |z_2|^2 + |z_3|^2 \leq 1\}$ 을 가진다. $[0, 1, 0]$ 의 지표는 2이고 이 2핸들에 대응하는 코코어 D^2 는 $D^2 = \{[z_1, 1, 0] \mid |z_1| \leq 1\}$ 으로 주어진다. 교집합 $D^4 \cap D^2$

는 $C = \{[1, e^{i\theta}, 0] \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ 가 된다. 그러므로 \mathbf{CP}^2 의 커비 다이어그램 $(D^4 : C)$ 은 원판 D^4 와 경계 $\partial D^4 = S^3$ 에서 표준적인 원 C 로 구성된다. (C 는 매듭없는 곡선(*unknotted curve*)으로 알려진 없는 매듭(*unknot*)이나 자명한 매듭(*trivial knot*)이다.) C 의 틀(*frame*)은 정수 1이다. 그러므로 \mathbf{CP}^2 의 커비 다이어그램은 다음과 같이 얻을 수 있다.

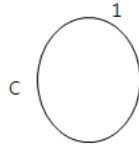


그림 6: \mathbf{CP}^2 커비 다이어그램 [5]

예 3.3.6. [1] 피쉬테일(*fishtail*) F 는 $F = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{CP}^2 \mid x_1x_2^2 = x_1^3 + x_3x_1^2\}$ 이다. [3] 이것을 핸들 슬라이딩과 상쇄를 시키면 하나의 자기 교차(*self intersection*)를 가진 S^4 안에 몰입된 S^2 의 튜브꼴 근방과 같다. 즉, 핸들바디로서 그림7과 같이 1 핸들과 2 핸들을 가진 B^4 로 묘사할 수 있다.

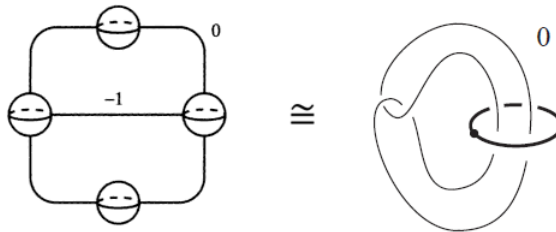


그림 7: F 의 커비 다이어그램 [2]

커스프(*cusp*) C 는 $C = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{CP}^2 \mid x_3x_2^2 = x_1^3\}$ 이다. [3] 이것을 핸들 슬라이딩과 상쇄를 시키면 그림 8과 같이 0틀(*frame*)을 가진

세잎매듭실(trefoil knot)을 따라 붙여진 2핸들을 가진 B^4 이다.

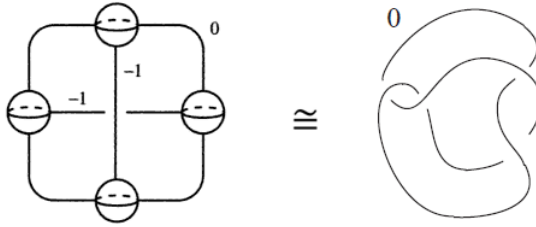


그림 8: C 의 커비 다이어그램 [2]

S^4 는 두 개의 피쉬테일들의 경계를 따라 붙인 합집합으로 표현이 가능하다. 즉, $S^4 = F \cup_f -F$ 이다. 이 때 경계를 따라 붙이는 사상은 그림 9이다. 그러므로 F 에 $-F$ 를 붙이는 것은 그림 10처럼 F 에 2핸들과 3핸들을 붙이는 것과 같다. 1핸들과 2핸들이 붙어있는 F 의 경계에 2핸들의 코코어의 경계였던 띠 구(belt sphere)가 $-F$ 의 2핸들의 붙이는 구(attaching sphere)로 붙으므로 0틀을 가진 2핸들이 붙게 된다. 이 때 붙이는 사상은 다음과 같이 1핸들과 2핸들의 경계를 바꾼 사상이므로 0틀을 가진 2핸들이 1핸들에 붙게 된다. 이제 핸들 상쇄를 하면 0틀을 가진 2핸들만 남게 된다. 여기에 남은 3핸들과 함께 핸들 상쇄를 하면 비어있는 다이어그램으로 S^4 의 커비 다이어그램과 같음을 알 수 있다.

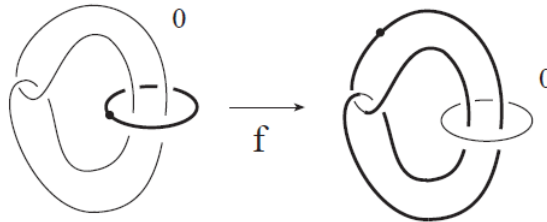


그림 9: 함수 f [2]

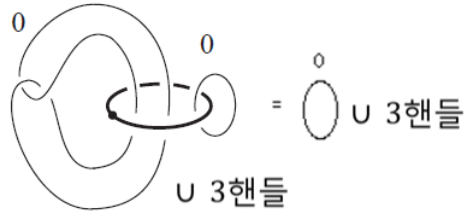


그림 10: S^4 의 커비 다이어그램 [2]

$S^2 \times S^2$ 는 두개의 커스프들의 경계를 따라 붙인 합집합으로 표현이 가능하다. 즉, $S^2 \times S^2 = C \cup -C$ 이다. 다음 그림과 같이 $-C$ 의 2핸들을 붙여 슬라이딩 시키면 1번 꼬인 것이 풀어지게 되므로 $S^2 \times S^2$ 의 커비 다이어그램과 일치하게 된다.

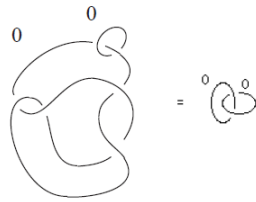


그림 11: $S^2 \times S^2$ 의 커비 다이어그램 [2]

참고 문헌

- [1] S. Akubulut, *A Fake Cusp and a Fishtail*, Proceedings of 6th Gokova Geometry-Topology Conference. Turkish J. Math. 23 (1999), no. 1, 19-31. 57N13 (57R55)
- [2] S. Akubulut, *4-manifolds*, (인쇄중).
- [3] R. E. Gompf.; A.I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, 20. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. xvi+558 pp. ISBN: 0-8218-0994-6. 57N13 (14J80 32Q55 57-02 57R17 57R57 57R65)
- [4] A. Katok and V. Climenhage, *Lecture on Surfaces*, (Almost) everything you wanted to know about them. Student Mathematical Library, 46. American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2008. xvi+286 pp. ISBN: 978-0-8218-4679-7. 53A05 (53-01 57N05 57R05)
- [5] Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, Translated from the 1997 Japanese original by Kiki Hudson and Masahico Saito. Translations of Mathematical Monographs, 208. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. xiv+219 pp. ISBN: 0-8218-1022-7. 57R70 (57-01 57M25)

[6] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Based on notes
by David W. Weaver The University Press of Virginia, Charlottesville,
Va. 1965 ix+65 pp. 57.10

Abstract

Study on 4-dimensional manifolds using Morse theory

Ji-Young Hwang

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education

Sungshin Women's University

Supervised by Ki-Heon Yun , Ph. D.

We study handlebody decomposition of a smooth manifold by studying Morse function which is defined on it. That means, we can find different handlebody decompositions of a given smooth manifold and we also find some relations between these two handlebody decompositions. It gives a strong method whether two given smooth manifolds are diffeomorphic or not.

At first, we will define Morse function and we will study the existence problem of Morse function on a given closed smooth manifold. After that, we will find a method how to change the Morse function to another Morse function which are defined on the same smooth manifold. By studying this kind of modification of Morse function, we can find two operations, handle sliding and handle cancellation, which do not change the smooth structure of a given smooth manifold.

Lastly, we will find several examples of Morse functions which are defined on closed surfaces, closed three manifolds and some easy example of 4-manifolds such as S^4 , $S^2 \times S^2$ and \mathbf{CP}^2 .

Keywords : manifold, morse function, handlebody