



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

윤기헌 교수 지도

석사학위 청구논문

달린 곡면과 Seifert 다양체의 분류

2015

성신여자대학교 교육대학원

교육학과 수학교육전공

손은아

달린 곡면과 Seifert 다양체의 분류

윤기현 교수 지도

이 논문을 석사학위 논문으로 제출함

2015년 5월

성신여자대학교 교육대학원

교육학과 수학교육전공

손은아

인준서

손은아의 석사학위 논문으로 인준함

2015년 5월

심사위원장 신용수 (인)

심사위원 심성아 (인)

심사위원 윤기현 (인)

성신여자대학교 교육대학원

논문개요

이 논문에서는 닫힌 2차원 다양체의 분류법에 대하여 살펴본 후, Dehn 수술을 통하여 3차원 다양체를 건설하는 방법을 다루고 렌즈공간과 가향인 Seifert 다양체의 분류방법에 대하여 다룬다. 그리고 Seifert 다양체이면서 \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구인 몇가지 예들을 건설한다.

주요어 : 닫힌곡면, 덴 수술, Seifert 다양체

목 차

그림 목차	- iii -
표 목차	- iv -
I. 서론	- 1 -
II. 닫힌 곡면의 분류	- 3 -
2.1 곡면과 닫힌 곡면의 분류	- 3 -
III. Dehn수술과 렌즈 공간	- 12 -
3.1 Dehn수술(Dehn Surgery)	- 12 -
3.2 렌즈 공간(Lens Space)	- 17 -
IV. Seifert 다양체	- 28 -
4.1 Seifert 다양체(Seifert Manifolds)	- 28 -
4.2 Seifert 다양체의 분류	- 31 -
V. Application	- 35 -
5.1 호몰로지 3차원 구와 Seifert 다양체 (Homology 3-Spheres and Seifert Manifolds)	- 35 -
참고 문헌	- 43 -
Abstract	- 45 -

그림 목차

그림 1.	$\mathbb{R}P^2$	- 6 -
그림 2.	고리수(Linking number)	≠ 13 -
그림 3.	$L(p, q)$	≠ 18 -
그림 4.	$[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 의 플럼빙 그래프	≠ 22 -
그림 5.	$(0 b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_s, \beta_s))$	≠ 32 -
그림 6.	$(g b; \dots, (\alpha_i, \beta_i), \dots) = (0 b - n; \dots, (\alpha_i, \beta_i + n\alpha_i), \dots)$	34 -
그림 7.	특이파이버가 1개인 Seifert \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구 . . .	≠ 38 -
그림 8.	특이파이버가 2개인 Seifert \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구 . . .	≠ 39 -

표 목 차

- 표 1. 특이파이버가 3개인 Sefiert \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구 . . . : 40 -
- 표 2. 특이파이버가 3개인 Sefiert \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구(2) . . . : 41 -

제 1 장

서론

위상수학의 주요 연구과제는 특정한 성질을 만족하는 대상의 존재성과 분류에 대한 것이다. 특히 2차원 닫힌 다양체의 분류 문제는 이미 오래전에 잘 알려진 분류 문제이지만 중등수학에서 중요하게 다루어지고 있는 위상적 불변량인 오일러 수와 밀접한 관계를 갖고 있다. 따라서 본 논문에서는 연결이고 닫힌 2차원 다양체를 오일러수와 가향성을 이용하여 어떻게 분류할 수 있는지에 대하여 다룰 것이다.

최근에는 중등교육과정에 있어서 연구와 교육이 병합된 형태의 학습(R&E)이 매우 활발히 진행되고 있다. 3차원, 4차원 다양체의 건설 및 분류에 대한 문제는 매우 어려운 것으로 알려져 있으며 아주 최근에 3차원 다양체의 분류에 대한 중요한 진보가 있었다. 중등 교육에 있어서 보다 더 진보된 결과들을 학생들에게 소개하기 위하여 최근의 연구 동향 및 주요 주제에 대한 기본적인 이해가 요구된다. 이런 면에서 기초적인 부분부터 접근하여 학생들에게 이해시킬 수 있는 능력을 키우는 것에 도움이 될 것으로 기대된다.

본 논문의 구성은 다음과 같다.

제 2장에서는 닫힌 연결 곡면을 분류할 것이다. 다양체를 정의하고 곡면을 만드는 방법을 제시하고, 방향성과 오일러 특성화수에 따른 닫힌 연결 곡면을 분류하고자한다.

제 3장에서는 3차원 다양체를 얻는 방법인 Dehn 수술에 대하여 정의

하고, 3차원 다양체의 예인 렌즈공간을 분류할 것이다.

제 4장에서는 가향인 Seifert 다양체를 정의하고 몇가지 특성에 따른 분류를 할 것이다.

제 5장에서는 \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구(\mathbb{Z} -Homology 3-spheres)가 되기 위한 Seifert 다양체의 조건에 관하여 알아 볼 것이다.

제 2 장

달린 곡면의 분류

이 장에서는 달린 연결 2차원 다양체, 즉 달린 연결 곡면의 분류를 할 것이다. 일반적인 n 차원 다양체를 정의하고, 곡면의 예와 달린 곡면을 만드는 방법에 대하여 알아보려고 한다. 달린 곡면의 오일러 특성화수와 방향성에 대하여 정의하고 이를 통해 달린 연결 곡면을 분류할 것이다.

2.1 곡면과 달린 곡면의 분류

n 차원 다양체의 정의와 예를 살펴보고 달린 다양체에 대해 알아보려고 한다.

정의 2.1.1. 가산기저를 가지는 하우스도르프 공간 M 의 임의의 점에 대한 근방이 유클리드 공간 \mathbb{R}^n 또는 $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ 과 위상동형일 때 M 을 n 차원 다양체라고 한다. 이 때, H 와 위상동형인 근방을 가지는 점들의 집합을 경계(boundary)라고 정의한다.

예 2.1.1. $S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ 은 n 차원 다양체이다.

$N = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 이라고 하자. 다음과 같이 주어진 입체사영 사상 $f: (S^n - \{N\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 를 정의할 수 있다.

$$f((x_1, x_2, \dots, x_{n+1})) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

이는 연속함수이고, 역함수 또한 연속임을 알 수 있다. 따라서 $S^n - \{N\}$ 과 \mathbb{R}^n 은 위상동형이다. 마찬가지로 점 $S = (0, 0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 에 대하여도 입체사영사상을 정의할 수 있고, $S^n - \{S\}$ 과 \mathbb{R}^n 도 위상동형임을 알 수 있다. 따라서 임의의 $x \in S^n$ 의 근방 U_x 는 \mathbb{R}^n 과 위상동형인 근방이 존재한다. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 이고, \mathbb{R}^{n+1} 은 거리공간이므로 하우스도르프 공간이 되고, 하우스도르프 공간의 부분공간은 하우스도르프 공간이므로 S^n 도 하우스도르프 공간이 된다.

정의 2.1.2. 닫힌 다양체는 콤팩트이고 경계가 없는 다양체이다.

2차원 다양체는 특별히 곡면이라고 부른다. 곡면의 예를 살펴보자.

예 2.1.2 ([4]). 원환면 $T^2 = S^1 \times S^1$

$\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow S^1 \times S^1$ 를 $(s, t) \mapsto (e^{is}, e^{it})$ 에 의한 사상이라고 하자. 관계 $(s, t) \sim (s', t')$ 를 $s \equiv s' \pmod{2\pi}$, $t \equiv t' \pmod{2\pi}$ 로 주면 그 상공간은 원환면이 된다. $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ 이므로 하우스도르프 공간의 부분공간이 되어 원환면은 하우스도르프 공간이다.

평면에서 외접하는 원이 존재하고 꼭지점이 n 개인 다각형 P 에 대하여 P 의 각 꼭지점을 p_1, p_2, \dots, p_n 이라고 하자. 이 다각형의 각 변에는 라벨 (label)과 방향이 주어져 있다. 같은 라벨의 변이 존재하면, 두 변을 같은 방향이 되도록 일치시켜 곡면을 얻고자 한다. 시작점이 a 이고 끝점이 b 인 변과, 시작점이 c 이고 끝점이 d 인 변이 있을 때, 두 폐구간의 위상동형 사상이 존재한다. 이 위상동형사상을 통해 붙인 공간은 상공간으로 2차원 곡면을 얻을 수 있다.

다각형에 외접하는 원의 향을 반시계방향으로 주었을 때, 각 변에 대응하는 호의 방향과 변의 방향이 같으면, 이름의 지수는 1로, 같지 않다면

지수를 -1로 표기한다. 다각형의 라벨들을 반시계방향으로 차례대로 읽은 것을 라벨링 구조(labeling scheme)라고 하고, 라벨의 수가 n 개이면, 라벨링구조의 길이는 n 이라고 한다.

라벨링 구조 w_i 와, 적어도 길이가 2인 라벨링 구조 y_i 에 대하여 다음의 몇가지 기본연산을 정의하고자 한다[4].

- (1) (자르기) $w_1 = y_0y_1$ 은 잘라서 y_0c 와 $c^{-1}y_1$ 으로 만들 수 있다.
- (2) (붙이기) y_0c 와 $c^{-1}y_1$ 는 붙여서 y_0y_1 으로 만들 수 있다.
- (3) (라벨바꾸기) 라벨링 구조에 있지 않은 새로운 라벨로 바꿀 수 있다.
- (4) (순서바꾸기) 반시계방향으로만 읽어주면 순서는 상관없다.

$$abab \sim baba$$

- (5) (뒤집기) 다각형을 뒤집어서 방향을 모두 반대로 바꿔 줄 수 있다.
즉, 다음 두 라벨링 구조의 상공간은 같다.

$$w_i = (a_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots (a_{i_n})^{\varepsilon_n}, \quad w_i^{-1} = (a_{i_n})^{-\varepsilon_1} \dots (a_{i_1})^{-\varepsilon_n}$$

- (6) (이어붙이기) $w_i = y_0aa^{-1}y_1$ 는 y_0y_1 으로 대체할 수 있다.
- (7) (그리기) $w_i = y_0y_1$ 는 $y_0aa^{-1}y_1$ 으로 대체할 수 있다.

(1)과 (2)는 다각형을 직접 자르거나 붙이는 것이고, (6)과 (7)은 한 다각형에서 라벨링구조를 바꿀 수 있음을 의미한다. 자르거나 붙였을 때의 다각형들은 하나의 원에 내접한다고 가정한다.

라벨링 구조(labeling scheme)를 통해 얻은 곡면 X 는 그 상사상이 연속이고, 전사인 폐사상이므로 P 의 상공간 X 는 콤팩트 하우스도르프 공간이다. 또한 우리가 분류하고자 하는 닫힌 다양체는 콤팩트하고 경계가 없어야 하므로 짝수개의 변을 가진 다각형을 서로 모두 붙여 남는 변이 생기지 않도록 붙이면 닫힌 다양체를 얻을 수 있다.

예 2.1.3 ([4]). 실사영평면 $\mathbb{R}P^2$ 는

$$\mathbb{R}P^2 = D^2 / \sim, \quad x_1 \sim x_2 \iff \begin{cases} \|x_1\| < 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \|x_1\| = 1 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \end{cases} \text{ 이다.}$$

따라서 다음 [그림1]과 같이 $\mathbb{R}P^2$ 를 만들 수 있다. 뫼비우스의 띠와 $D^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ 를 경계를 따라 붙인 것이다.

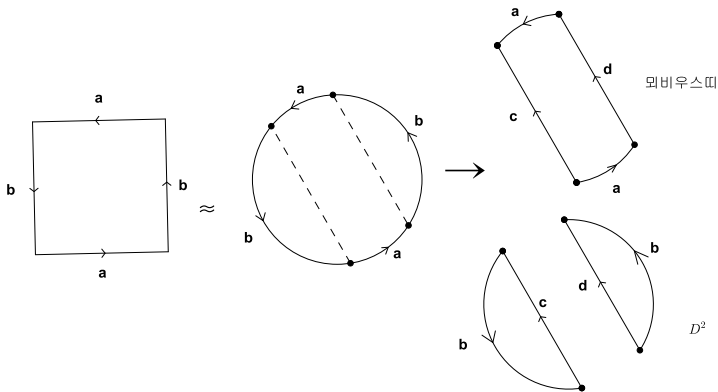


그림 1: $\mathbb{R}P^2$

곡면을 삼각화하는 방법에 대하여 알아보자.

정의 2.1.3 ([4]). X 를 콤팩트 하우스도르프 공간이라 하자. 평면상의 닫힌 삼각형 T 와 X 의 부분집합인 곡선 삼각형 A 에 대하여 T 에서 A 로 가는

위상동형사상을 정의할 수 있다. T 의 변 e 와 대응되는 $h(e)$ 를 A 의 변, T 의 꼭지점 v 와 대응되는 $h(v)$ 를 A 의 꼭지점이라 한다. 이러한 A 들이 유한개 존재하여 A_1, A_2, \dots, A_n 의 합집합은 X 이고, $i \neq j$ 에 대하여 $A_i \cap A_j$ 가 공집합이거나, 꼭지점이거나, 변이된다면 A_1, A_2, \dots, A_n 을 X 의 삼각화라고 한다. 위상동형사상 $h_i: T_i \rightarrow A_i$ 에 대하여, $A_i \cap A_j$ 가 변이면, T_i 의 변 $h_i^{-1}(e)$ 와 T_j 의 변 $h_j^{-1}(e)$ 의 위상동형사상은 $h_j^{-1}h_i$ 으로 정의한다. X 가 삼각화를 가질 때, X 를 삼각화 가능하다고 정의한다.

정의 2.1.4 ([5]). 삼각화 가능한 n 차원 다양체 M^n 을 삼각화하였을 때, n 차원 단체들에 방향을 연속적으로 줄 수 있으면 M^n 을 가향 다양체라고 정의한다.

정의 2.1.5 ([4]). X 를 삼각화 가능한 곡면이라고 하자. 삼각화하였을 때의 꼭지점, 변, 면의 수를 각각 v, e, f 라고 하면 X 의 오일러 특성화수 $\chi(X)$ 은 다음과 같다.

$$\chi(X) = v - e + f$$

정의 2.1.6. X 와 Y 가 2차원 닫힌 연결 다양체일 때, X 와 Y 의 연결합 $X \# Y$ 는 각각의 내부의 임의의 한 점에 대한 근방을 제외하고 그 근방의 경계를 따라서 붙인 것이다. 이 때 각각의 근방들은 다양체의 정의에 따라 $Int(D^2)$ 와 위상동형이다.

예 2.1.4. 두 다양체의 연결합의 오일러 특성화수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\chi(X\#Y) &= \chi((X - \text{int}(D^2)) \cup (Y - \text{int}(D^2))) \\ &= \{\chi(X) - 1\} + \{\chi(Y) - 1\} - \chi(S^1) \\ &= \chi(X) + \chi(Y) - 2\end{aligned}$$

$\chi(S^2) = 2$, $\chi(T^2) = 0$, $\chi(\mathbb{R}P^2) = 2$ 이고, 연결합을 할 때마다 오일러 특성화수는 2씩 줄어든다. 따라서 T^2 를 g 번 연결합 한 곡면 F_g 와 $\mathbb{R}P^2$ 를 k 번 연결합 한 곡면 P_k 의 오일러 특성화수는 다음과 같다.

$$\chi(F_g) = 2 - 2g \qquad \chi(P_k) = 2 - k$$

정리 2.1.1 ([4]). 닫힌 연결 곡면 Σ 는 다음과 같이 분류된다.

- (1) Σ 가 가향이면 Σ 는 S^2 와 위상동형이거나 T^2 들의 연결합과 위상동형이다.
- (2) Σ 가 비가향이면 Σ 는 $\mathbb{R}P^2$ 들의 연결합과 위상동형이다.

증명 닫힌 연결 곡면의 라벨링 구조는 다음 4가지 중에서 하나임을 보일 것이다.

- 1) $aa^{-1}bb^{-1}$
- 2) $abab$
- 3) $(a_1a_1)(a_2a_2)\cdots(a_ma_m)$ (단, $m \geq 2$)
- 4) $(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})\cdots(a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1})$

닫힌 연결곡면은 길이가 짝수이고, 같은 라벨은 2개씩 존재하여야 한다. 길이가 2인 경우 aa^{-1} 또는 aa 이다. 첫번째, aa^{-1} 는 $aa^{-1}bb^{-1}$ 로 나타낼 수 있고 이 곡면은 S^2 이다. 두번째, $aa = abab$ 이고, 이 곡면은 $\mathbb{R}P^2$ 이다. 4개의 라벨을 가지는 경우는 $aabb = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ 와 $aba^{-1}b^{-1} = T^2$ 가 있다.

라벨링구조에서 한 라벨의 지수가 +1이 한번 나오면 같은 라벨의 지수가 -1도 한번 나오는 경우를 원환면 유형이라고 하고, 그렇지 않은 경우를 사영평면 유형이라고 하자.

원환면 유형의 경우 길이 2인 라벨은 aa^{-1} 과 같이 공집합이 되고, 사영평면 유형을 연결합하면 원환면 유형이 나오지 않기 때문에, $aba^{-1}b^{-1}$ 형태의 라벨링 구조와 연결합이 이루어져야 한다. 길이가 4 이상인 원환면 유형의 모든 경우를 생각하여보자. 공집합이거나 길이가 2 이상인 짝수개의 라벨을 가지는 라벨링 구조 y_i 와 공집합이거나 원환면 유형인 라벨링 구조 w_0 에 대하여 원환면 유형 w 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
w &= w_0 y_1 a y_2 b y_3 a^{-1} y_4 b^{-1} y_5 \\
&= w_0 y_1 (a y_2 b y_3 a^{-1}) y_4 b^{-1} y_5 \\
&\sim y_1 a y_2 b y_3 c^{-1} \quad \& c a^{-1} y_4 b^{-1} y_5 w_0 & \text{(자르기)} \\
&\sim y_2 b y_3 c^{-1} y_1 a \quad \& a^{-1} y_4 b^{-1} y_5 w_0 c & \text{(순서바꾸기)} \\
&\sim y_2 b y_3 c^{-1} y_1 (a a^{-1}) y_4 b^{-1} y_5 w_0 c & \text{(붙이기)} \\
&\sim w_0 c y_2 b y_3 c^{-1} y_1 y_4 b^{-1} y_5 & \text{(순서바꾸기)} \\
&\sim y_1 y_4 b^{-1} y_5 w_0 d \quad \& d^{-1} c y_2 b y_3 c^{-1} & \text{(순서바꾸기, 자르기)} \\
&\sim y_5 w_0 d y_1 y_4 b^{-1} \quad \& b y_3 c^{-1} d^{-1} c y_2 & \text{(순서바꾸기)} \\
&\sim w_0 d y_1 y_4 y_3 c^{-1} d^{-1} c y_2 y_5 & \text{(붙이기, 순서바꾸기)} \\
&\sim c y_2 y_5 w_0 e \quad \& e^{-1} d y_1 y_4 y_3 c^{-1} d^{-1} & \text{(자르기)} \\
&\sim y_2 y_5 w_0 e c \& c^{-1} d^{-1} e^{-1} d y_1 y_4 y_3 & \text{(순서바꾸기)} \\
&\sim y_2 y_5 w_0 e d^{-1} e^{-1} d y_1 y_4 y_3 & \text{(붙이기)} \\
&\sim w_0 e d^{-1} e^{-1} d y_1 y_4 y_3 y_2 y_5 & \text{(순서바꾸기)} \\
&\sim w_0 a b a^{-1} b^{-1} (y_1 y_4 y_3 y_2 y_5) & e \rightarrow a, d^{-1} \rightarrow b
\end{aligned}$$

y_i 가 원환면 유형이거나 공집합이면, 4)번 $(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) \cdots$ 과 같은 형태가 된다.

사영평면 유형의 경우를 살펴보자. 2)의 경우는 $\mathbb{R}P^2$ 이고 원환면 구조를 더하게 될 경우 다음 식에 의해 사영평면유형이 나온다. w_1 이 공집합

또는 원환면 유형이라 하자.

$$\begin{aligned}
w &= (cc)(aba^{-1}b^{-1})w_1 \\
&\sim (d^{-1}d^{-1})(ab)(ba)^{-1}w_1 && c \rightarrow d^{-1} \\
&\sim (ab)(ba)^{-1}(w_1)(d^{-1}d^{-1}) && (\text{순서바꾸기}) \\
&\sim dd(w_1)^{-1}[(ba)(ab)^{-1}] && (\text{뒤집기}) \\
&\sim [(ba)(ab)^{-1}]dc \quad \&c^{-1}d(w_1)^{-1} && (\text{자르기}) \\
&\sim [(ba)(ab)^{-1}]dc \quad \&(w_1)d^{-1}c && (\text{뒤집기}) \\
&\sim c[(ba)(ab^{-1})d \quad \&d^{-1}c(w_1)] && (\text{순서바꾸기}) \\
&\sim c(ba)(ab)^{-1}c(w_1) && (\text{붙이기}) \\
&\sim c(w_1)c(ba)(ab)^{-1} && (\text{순서바꾸기}) \\
&\sim (w_1)c(ba)d \quad \&d^{-1}(ab)^{-1}c && (\text{자르기}) \\
&\sim (ba)d(w_1)c \quad \&c^{-1}(ab)d && (\text{뒤집기}) \\
&\sim (ba)d(w_1)(ab)d && (\text{붙이기}) \\
&\sim (a)b(d)b(adw_1) && (\text{순서바꾸기}) \\
&\sim (a)b(c)b(acw_1) && d \rightarrow c, \\
&\sim (bb)a(c)^{-1}a(cw_1) && (*) \\
&\sim aabbccw_1 && (*)
\end{aligned}$$

단, (*)는 $(cc)(ab)(ba)^{-1}(w_1) \sim (ab)c(ba)c(w_1)$ 를 역으로 적용한 것이다.

w_1 이 공집합인 경우, w 는 사영평면유형으로 3)번과 같고, 원환면 유형일 경우 반복하여 3)의 유형의 라벨링 구조가 나오게 된다. 1)은 S^2 , 2)는 $\mathbb{R}P^2$, 3) $\mathbb{R}P^2$ 를 m 개 연결합, 4)는 T^2 를 n 개 연결합 한 것이다. \square

제 3 장

Dehn수술과 렌즈 공간

이 장에서는 3차원 다양체의 한 예인 렌즈 공간을 분류 할 것이다. 우선 3차원 다양체를 얻는 잘 알려진 방법인 Dehn 수술을 하기위해서 유클리드 3차원 공간에 매장되는 매듭(knot)과 고리(link)를 정의할 것이다. 3차원 다양체에서 Dehn 수술을 하는 방법에 관하여 알아보고, S^3 에서 Dehn 수술을 통하여 얻은 3차원 다양체인 렌즈공간을 분류하고자 한다.

3.1 Dehn수술(Dehn Surgery)

매듭(knot)과 고리(link)의 정의는 다음과 같다. 고리 수(linking number)를 정의하고 이를 통해 임의의 매듭 또는 고리에 대한 평행한 위선을 구하고자 한다.

정의 3.1.1. 유클리드 3차원 공간에 매장되는 자기자신과 교차하지 않는 폐곡선을, 즉 시작점과 끝점이 같은 곡선을 매듭(knot)이라고 하고, 서로 교차하지 않는 2개 이상의 매듭의 합집합을 고리(link)라고 한다. 고리에 있는 매듭들을 고리의 성분이라 한다.

매듭을 자르지 않고 움직여서 같은 모양이 된다면, 두 매듭은 동치(equivalent)이다. 특히 꼬여있지 않은 원과 같은 모양이 될 수 있을 때 이 매듭을 자명한 매듭(trivial knot)이라고 한다. 고리 또는 매듭을 평면에 사영시킬 때 다음과 같은 규칙을 따를 것이다[5].

- (1) 고리(매듭)에 있는 모든 점들의 접선은 사영시켰을 때 선으로 나타난다.
- (2) 고리(매듭)에서 서로 다른 세 점 이상이 한 점으로 사영되지 않는다.
- (3) 고리(매듭)의 서로 다른 두개의 점의 접선을 사영시켰을 때 접선은 일치 하지 않으며, 사영시켰을 때의 교차점은 유한개이다.

이렇게 고리 또는 매듭을 평면상에 사영 시켰을 때 교차하는 점을 교차점 (crossing point)이라고 한다.

정의 3.1.2 ([5]). S^3 에 매장되는 가향고리 L 에 대하여, L 의 두개의 성분 J 와 K 의 고리수(linking number)는 다음 그림과 같이 J 위에 K 가 지나가는 교차점에 정의된 ϵ 들의 합으로 정의하고, $lk(J, K)$ 라고 쓴다.

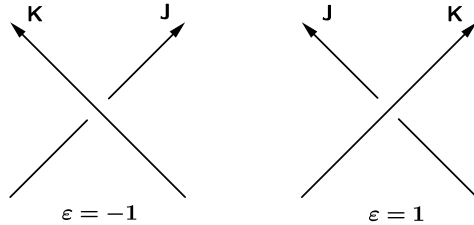


그림 2: 고리수(Linking number)

예 3.1.1 ([5]). S^3 에 매장되는 가향고리 L 의 성분 J, K 에 대하여 $-J, -K$ 는 각각 J, K 의 향을 반대로 준 것이다. 이 때 다음 등식이 성립한다.

$$lk(-J, k) = -lk(J, K) = lk(J, -K) \quad (3.1)$$

고리의 두 성분 중 한 성분의 방향만 바뀌면, 각 교차점에서 ε 의 부호 모두가 바뀌므로 위의 식이 성립한다.

예 3.1.2 ([5]). S^3 에 매장되는 가향고리 L 의 성분 J, K 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$lk(J, K) = lk(k, J) \quad (3.2)$$

$lk(J, K)$ 를 구하기 위해 L 을 사영 시켰던 평면을 π_1 이라고 하자. π_1 과 평행하고 고리 L 을 마주보는 평면 π_2 에 L 을 사영시키면, J 위를 K 가 지나가는 교차점들이 K 위를 J 가 지나가는 교차점이 되고 위의 그림에서 J 와 K 만 바꾼 것이 된다. 즉, ε 의 값은 변하지 않으므로 $lk(J, K)$ 와 $lk(K, J)$ 의 고리 수는 같다.

S^3 에 있는 매듭 K 의 관상주변(tubular neighborhood)을 N_K 라 하자. K 의 경선(meridian)과 위선(longitude)를 정의하고자 한다. 매듭 K 의 한 점에서 K 와 수직한 평면에 의해 결정되는 N_K 의 부분을 찾을 수 있고, 이 원판의 경계를 경선(meridian)이라고 하며 α 라고 표현 할 것이다. 위선(longitude)은 K 와의 고리수가 0이고, 임의의 α 와 교점이 1개인 선을 K 의 위선(longitude) β 라고 한다. α 와 β 의 방향은 오른손 법칙을 따른다. 서로 소인 두 정수 p, q 에 대하여 $p\alpha + q\beta$ 는 K 의 경계에서 α 의 방향으로 p 번, β 의 방향으로 q 번 도는 곡선을 의미한다.

S^3 로부터 3차원 다양체를 건설하는 방법에 대하여 알아보자. S^3 에서 매듭 K 의 관상주변(tubular neighborhood) N_K 를 제거한 후 K 의 경선 α 를 $p\alpha + q\beta$ 에 대응되는 위상동형사상을 따라 다시 붙여서 3차원 다양체를 얻을 수 있다. 이 때 $\frac{p}{q}$ 를 수술의 틀(framing)이라고 하고 이렇게 얻은 다양체를 S^3 로부터 매듭 K 를 따라 (p, q) -수술 한 다양체라고 한다. K 가 자명한 매듭인 경우를 생각하여보자. S^3 로부터 자명한 매듭을 따라 수술하여 얻

은 3차원 다양체를 $\mathbb{O}^{\frac{p}{q}}$ 라고 쓸 것이다. S^3 의 자명한 매듭 J 의 관상주변을 제거하고 관상주변의 α 를 $-\alpha$ 를 따라 붙여도 붙이는 방향만 달라질 뿐 붙였을 때의 결과는 같게된다. α 를 다시 α 를 따라 붙인 결과와 차이가 없으며, α 를 $-p\alpha - q\beta$ 를 따라 붙인 것과 α 를 $p\alpha + q\beta$ 를 따라 붙인 결과와 차이가 없다. 즉 틀의 값 $r = \frac{p}{q}$ 에 의해 수술의 결과가 결정됨을 알 수 있다.

3차원 다양체로부터 3차원 다양체를 건설하는 Dehn 수술의 정의는 다음과 같다.

정의 3.1.3. 매듭 K 가 매장되는 3차원 다양체를 M^3 라 하자. K 의 관상주변 (tubular neighborhood) N_K 와 $\partial(D^2 \times S^1)$ 의 단순 폐곡선 $p\alpha + q\beta$ 에 대하여 미분가능한 위상동형사상 $h: \partial(D^2 \times S^1) \rightarrow (M^3 - N_K)$ 는 $\partial(D^2) \times \{x\}$ 를 $p\alpha + q\beta$ 로 보낸다. 이 때, $M_K^3(\frac{p}{q})$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$M_K^3(\frac{p}{q}) = (M^3 - N_K) \cup_h (D^2 \times S^1)$$

$M_K^3(\frac{p}{q})$ 는 M^3 로부터 매듭 K 에 따라 (p, q) -수술(Dehn 수술)로 얻어진 다양체라고 정의한다.

Dehn수술을 통해 얻은 3차원 다양체의 예들을 살펴보자.

예 3.1.3 ([5]). $\mathbb{O}^{\frac{1}{0}=\infty}$ 는 S^3 와 같음을 보이고자 한다.

$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 2\}$ 라고 하자.

$M_1^3 = \{(z, w) \in S^3 \mid |z| \leq |w|\}$, $M_2^3 = \{(z, w) \in S^3 \mid |z| \geq |w|\}$ 로 둘 수 있고, $|z| \leq |w|, |z| \geq |w|$ 이면, 이는 각각 $|z| \leq 1, |z| \geq 1$ 이다.

M_1^3 에서 입체원환면 $D^2 \times S^1$ 으로 위상동형사상을 다음과 같이 줄 수 있다.

$$(z, w) \mapsto (z, \frac{w}{|w|})$$

마찬가지로 T^2 에서 입체원환면 $S^1 \times D^2$ 로의 다음과 같은 위상동형사상을 줄 수 있다.

$$(z, w) \mapsto \left(\frac{z}{|z|}, w \right)$$

(z, w) 는 $|z| = a, |w| = b$ 인 a, b 와 각 u, v 에 대하여 $(z, w) = (ae^{iu}, be^{iv})$ 로 나타낼 수 있다.

이 때, M_1^3 와 M_2^3 에 대응되는 입체원환면을 각각 T_1, T_2 라고 하자. T_1 과 T_2 의 공통 경계는 $S^1 \times S^1$ 으로 (e^{iu}, e^{iv}) 이다. β 가 상수이면 동시에 T_1 의 경선임과 동시에 T_2 의 위선이 된다. 즉, S^3 는 두 입체원환면 T_1, T_2 의 합집합으로, T_1 의 경선과 T_2 의 위선을 따라 붙인 것이다.

따라서 S^3 에서 자명한 매듭을 따라 $(1, 0)$ -수술한 것은 S^3 에서 T_1 을 제거하고, T_1 의 α 를 다시 α 를 따라 붙인 것이므로 S^3 이다.

예 3.1.4 ([5]). $\bigcirc^0 = S^1 \times S^2$

틀이 0인 수술은 위의 예 3.1.3에서의 입체원환면 T_1 을 S^3 로 부터 잘라 내고, 다시 붙일 때 T_1 의 경선을 위선을 따라 다시 붙인 것이다. 즉, $S^1 \times D^2$ 와 $S^1 \times D^2$ 를 동일하게 붙인 것이므로 $S^1 \times S^2$ 가 된다.

예 3.1.5 ([5]). $\bigcirc^r \sim \bigcirc_{\pm n + \frac{1}{r}}$

M^3 를 S^3 에서 자명한 매듭을 따라 틀이 r 인 수술로 얻어진 다양체라고 하고, N^3 를 틀이 $\frac{1}{\pm n + \frac{1}{r}}$ 인 수술의 결과로 얻어진 다양체라고 하자. S^3 에 매장된 자명한 매듭의 관상주변(tubular neighborhood)을 T_1 이라 하고, T_2 의 경계에 있는 경선과 위선을 각각 α, β 라고 하자. M^3 는 T_1 을 제거한 뒤 T_1 의 경선 α 를 T_2 의 $q\alpha + p\beta$ 를 따라 붙임으로써 얻어진 다양체이다.

사상 $f: M^3 \rightarrow N^3$ 를 T_2 에서 경선의 내부인 D^2 를 자르고 T_2 를 $\pm n$ 번 트위스트 한 다음 다시 붙인 사상이라고 하자. 이 때 +방향은 오른쪽으로 트위스트 하였을 때, -방향은 왼쪽으로 트위스트한 것이다. 사상 $f: M^3 \rightarrow$

N^3 는 위상동형사상이다. 그러면 곡선 $q\alpha + p\beta$ 는 $(q \pm np)\alpha + p\beta$ 가 된다. 곡선 $q\alpha + p\beta$ 는 J 를 따라 틀이 r 인 수술에 대응된다면, $(q \pm np)\alpha + p\beta$ 는 J 를 따라 틀이 $p/(q \pm np) = \frac{1}{\pm n + \frac{1}{r}}$ 인 수술에 대응된다.

위의 예 3.1.5에서 자명한 매듭을 J 라 하고 틀을 r_1 이라 하자. J 를 성분으로 가지는 고리에 대하여 J 와 다른 성분을 K 라 하자. $lk(J, K) = 1$ 이면, 위의 예에서와 같이 트위스트하였을 때 J 의 틀 r_1 은 $r'_1 = \frac{1}{\pm n + \frac{1}{r_1}}$ 이 되고, K 의 틀 r_2 는 $r'_2 = r_2 \pm n$ 이 된다. $lk(J, K) = x$ 이면, J 의 틀은 r'_1 , K 의 틀은 $r_2 \pm nx^2$ 이 된다. 이를 매듭 J 를 따라 $\pm n$ 번 트위스트한다고 한다[5].

3.2 렌즈 공간(Lens Space)

3차원 다양체의 한 예인 렌즈공간은 다양한 방법으로 정의를 할 수 있다. 그 중 S^3 에서 자명한 매듭을 따라 (p, q) -수술을 한 3차원 다양체 $L(p, q) = \mathbb{O}^{\frac{p}{q}}$ 로 정의하고자 한다. 이를 통하여 렌즈공간을 분류할 것이다.

정의 3.2.1. $p > 0$ 이고 p 와 q 는 서로소인 정수일 때, S^3 에서 자명한 매듭을 따라 (p, q) -수술을 한 공간을 렌즈공간이라고 하고, $L(p, q)$ 로 나타낸다.

정리 3.2.1 ([5]). $q \equiv q' \pmod{p}$ 이면 $L(p, q)$ 와 $L(p, q')$ 는 위상동형이다.

증명 예 3.1.5에 의해

$$\mathbb{O}^r \sim \mathbb{O}^{\frac{1}{\pm n + \frac{1}{r}}}$$

이므로 $L(p, q) = L(p, q \pm np)$ 이다. □

S^3 에서 자명한 매듭을 따라 (p, q) -수술한 다양체는 다음 정리에 의해 S^3 에서 어떠한 고리를 따라 틀이 정수인 Dehn 수술한 결과와 같다.

정리 3.2.2 ([5]). a_1, a_2, \dots, a_n 은 정수, a_{n+1} 은 유리수라고 가정하자. $\frac{p}{q}$ 가 다음과 같은 식을 만족하면

$$\frac{p}{q} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \dots - \frac{1}{a_n - \frac{1}{a_{n+1}}}}} \quad (3.3)$$

렌즈공간은 다음 고리에 대한 *Dehn* 수술로 얻어진다.

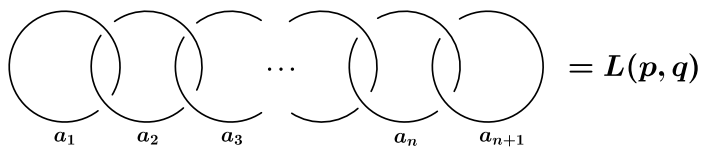


그림 3: $L(p, q)$

증명 틀이 a_{n+1} 인 원을 따라 $t = -(a_n + 1)$ 번 트위스트하면 n 번째 원의 틀은 다음과 같이 달라진다.

$$a'_n = -1, \quad a'_{n+1} = \frac{1}{-a_n - 1 + \frac{1}{a_{n+1}}}$$

다른 원들의 틀은 달라지지 않으며 n 번째 원을 따라 1번 트위스트하게 되면 n 번째 원은 틀이 ∞ 가 되어 없어진다. $n-1$ 번째 원의 틀은 $1+a_{n-1}$ 이 되며 $n+1$ 번째 원은 n 번째 원이 되면서 그 틀이 $1+a'_{n+1}$ 이 된다. 즉, 새로운 틀은 다음과 같다.

$$a'_{n-1} = 1 + a_{n-1}, \quad a''_n = 1 + a'_{n+1}$$

$n-1$ 번째 원을 없애기 위해 위의 방법과 마찬가지로 n 번째 원을 따라 $-(a'_{n-1} + 1)$ 번 트위스트 한 후, $n-1$ 번째 원을 따라 1번 트위스트를 하면 $n-2$ 번째 원의 틀과 $n-1$ 번째 원의 틀은 다음과 같다.

$$a''_{n-2} = 1 + a_{n-2}, \quad a''_{n-1} = 1 + a''_n$$

이 과정을 원이 하나 남을 때 까지 반복할 것이다.

$1 + a'_{n+1}$ 을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 1 + a'_{n+1} &= 1 + \frac{1}{-a_n - 1 + \frac{1}{a_{n+1}}} \\ &= \frac{-a_n - 1 + \frac{1}{a_{n+1}} + 1}{-a_n - 1 + \frac{1}{a_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{-a_n - 1 + \frac{1}{a_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{-a_n + \frac{1}{a_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n - \frac{1}{a_{n+1}}}} \end{aligned}$$

a''_{n-1} 에 대하여도 정리하면

$$\begin{aligned}
 a''_{n-1} &= 1 + \frac{1}{(-a'_{n-1} - 1) + \frac{1}{a''_n}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{a'_{n-1} - \frac{1}{a''_n}}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{(1 + a_{n-1}) - 1 - \frac{1}{a_n - \frac{1}{a_{n+1}}}}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{n-1} - \frac{1}{a_n - \frac{1}{a_{n+1}}}}}
 \end{aligned}$$

이 된다. 이런 방법으로 원이 한개 남을 때 까지 반복하면, 그 틀은 다음과

같다.

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 \cdots - \frac{1}{a_n - \frac{1}{a_{n+1}}}}}}$$

$\frac{1}{1 + \frac{q}{p}}$ 이므로 틀이 $\frac{p}{q}$ 인 원을따라 수술한 결과인 $L(p, q)$ 와 같다. \square

$$\frac{p}{q} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \cdots - \frac{1}{a_{n-1} - \frac{1}{a_n}}}$$

일 때, 플럼빙(Plumbing) 그래프로 나타내면 다음 그림과 같고,

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

으로 나타낸다.

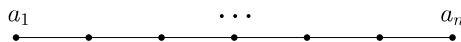


그림 4: $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 의 플럼빙 그래프

플럼빙그래프에서, a_1 부터 Dehn 수술한 결과와 a_n 부터 Dehn 수술한 결과는 같다. 이를 이용하여 렌즈공간을 분류하고자 한다.

정리 3.2.3 ([2]). $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ 이면 $L(p, q)$ 와 $L(p, q')$ 는 위상동형이다.

증명 정수 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 에 대하여, $L(p, q) = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ 이라고 하자. $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ 이면 $L(p, q') = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$ 임을 보이려고 한다. $p = P_1, q = Q_1$ 이라 두면, $\frac{P_1}{Q_1}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \dots - \frac{1}{a_{n-1} - \frac{1}{a_n}}}} \\ &= a_1 + \frac{1}{-a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{(-1)^n a_{n-1} + \frac{1}{(-1)^{n+1} a_n}}} \end{aligned}$$

$\frac{P_i}{Q_i}, (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 는 다음 식과 같다.

$$\frac{P_i}{Q_i} = (-1)^{i+1}a_i + \frac{1}{(-1)^{i+1}a_{i+1} + \dots + \frac{1}{(-1)^n a_{n-1} + \frac{1}{(-1)^{n+1} a_n}}$$

다음 행렬을 M 이라고 하자.

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} (-1)^{n+1}a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & R \\ Q & S \end{bmatrix}$$

$P = P_1, Q = Q_1$ 임을 보이려고 한다.

우선 P_{n-1}, Q_{n-1} 에 대하여 다음식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (-1)^n a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (-1)^{2n+1} a_{n-1} a_n + 1 & (-1)^n a_{n-1} \\ (-1)^{n+1} a_n & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{n-1} & (-1)^n a_{n-1} \\ Q_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

다음 식이 성립한다고 가정하면,

$$\begin{bmatrix} P_2 & X' \\ Q_2 & Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

P_1 과 Q_1 에 대하여, $\frac{P_1}{Q_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{P_2}{Q_2}} = \frac{a_1 P_2 + Q_2}{P_2}$ 이므로 행렬 M 은 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 & X' \\ Q_2 & Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 P_2 + Q_2 & X'' \\ P_2 & Y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & X'' \\ Q_1 & Y'' \end{bmatrix}$$

따라서, $P_1 = P, Q_1 = Q$ 이다.

M 의 대칭행렬 M^T 는

$$M^T = \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} -a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

이고, M^T 에 대응하는 연분수를 생각 할 수 있다.

M 의 행렬식은 다음과 같다.

$$\det(M) = PS - QR = (-1)^n \quad (3.4)$$

이므로 $QR = PS - (-1)^n$ 이고, P 를 범으로하는 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$QR \equiv (-1)^{n+1} \pmod{P} \quad (3.5)$$

n 이 홀수이면, $QR \equiv 1 \pmod{P}$ 이고, $\frac{P}{R}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{P}{R} &= a_n + \frac{1}{-a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \cdots + \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_1}}}} \\ &= [a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1] \end{aligned}$$

n 이 짝수이면, $Q(-R) \equiv 1 \pmod{P}$ 이고, $\frac{P}{-R}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{P}{R} &= -a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{-a_{n-2} + \cdots + \frac{1}{-a_2 + \frac{1}{a_1}}}} \\ \frac{P}{-R} &= a_n + \frac{1}{-a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \cdots + \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_1}}}} \\ &= [a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1] \end{aligned}$$

따라서 $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ 에 대하여 $qq' \equiv 1 \pmod{P}$ 이면,

$$\frac{p}{q'} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$$

이 되어 플럼빙 그래프에서 a_1 부터 Dehn 수술한 것과, a_n 부터 Dehn 수술한 것은 결과가 같아야 하므로 $L(p, q) = L(p, q')$ 이다. \square

제 4 장

Seifert 다양체

달혀있고, 가향인 연결 3차원 Seifert 다양체는 S^1 과 위상동형인 파이버들의 합집합으로, 이 장에서는 가향 Seifert 다양체의 분류를 할 것이다. 4.1절에서는 Seifert 다양체를 정의하고, 특이(singular) 파이버에 따른 불변량을 정의할 것이다. 4.2절에서는 앞절에서 정의한 Seifert 다양체의 불변량을 통하여 Seifert 다양체를 분류하고 그에 따른 예들을 살펴보고자 한다.

4.1 Seifert 다양체(Seifert Manifolds)

정의 4.1.1. 위상공간 E, B 에 대하여 연속이고 전사인 사상 $\pi : E \rightarrow B$ 가 있다고 하자. 임의의 $x \in B$ 에 대하여 $\pi^{-1}(U) \cong U \times S^1$ 을 만족하는 x 의 개 근방 $U \subset B$ 가 존재할 때, (E, B, π) 가 S^1 -다발 구조를 가진다고 한다. 이 때, E 는 전체공간(total space), B 를 기저공간(base space), S^1 을 파이버(fiber)라고 부른다.

정의 4.1.2 ([7]). 다음과 같은 조건을 만족하는 다양체를 Seifert 다양체라고 정의한다.

- (1) 다양체는 S^1 과 위상동형인 파이버들로 분할 가능하다.
- (2) 다양체의 임의의 한 점은 하나의 파이버위에 있다.
- (3) 임의의 파이버 H 에는 파이버 H 를 포함하는 근방이 존재하여, 이

근방은 *파이버화 입체 원환면(fibered solid torus)*으로 사상하는 *파이버 보존 사상(fiber preserving map)*이다.

파이버에서 피버로 사상하는 위상동형사상을 *파이버 보존 사상(fiber preserving map)*이라고 한다. *파이버화 입체원환면(fibered solid torus)* V 은 $x \in D^2$ 에 대하여, $D^2 \times \{0\}$ 은 고정시키고, $D^2 \times \{1\}$ 은 서로소인 정수 p, q 에 대하여,

$$\frac{2\pi q}{p}$$

만큼 회전시켜 일치시켜 얻은 것이다. 이 때 p 와 q 는

$$p > 0, \quad 0 \leq q \leq \frac{1}{2}p$$

인 경우에 대하여 생각할 것이다. q 는 정수 k 에 대해, $q + ku$ 혹은 $-q$ 로 대체되어도, *파이버 보존 사상*이므로 위의 방법으로 얻은 *파이버화 입체 원환면*과 동형이기 때문이다. *입체원환면* V 는 S^1 -다발에서 \mathbb{R}^2 와 위상동형인 기저공간을 가진다.

정의 4.1.3 ([1]). *파이버화 입체원환면*에서 p 의 값이 1과 같지 않으면, *파이버*를 *특이(singular) 파이버*라고 정의하고, p 의 값이 1이면 *일반적(ordinary) 파이버*라고 정의한다.

기저공간이 콤팩트이면 특이파이버는 유한개 존재한다. s 개의 특이 파이버가 있는 Seifert 다양체 F 를 생각하여보자. F 에서 특이 파이버 H_1 의 관상 주변인 입체 원환면을 V_1 이라고 하자. M_1 을 V_1 의 경계에 있는 가향 경선이라고 하고, H_1 을 V_1 의 경계위에 있는 파이버라고 하였을 때, H_1 과 함께 기저를 형성하게 하는 가향 단순 곡선 Q 를 V_1 의 경계위에 잡을

것이다. V_1 의 경계 위에서 $Q \cdot H = 1$ 이므로 $M \sim \alpha Q + \beta H$ 를 만족하는 서로소인 α, β 가 존재한다. $Q_1 \cdot H = 1$ 인 Q_1 에 대하여 다음과 같은 호몰로지 관계가 성립한다.

$$Q \sim Q_1 + yH_1 \quad (y \in \mathbb{Z})$$

따라서, M_1 에 관하여

$$M_1 \sim \alpha Q + \beta H \sim \alpha Q_1 + (\alpha y + \beta)H_1$$

이 성립한다. 이 때 $\alpha = \alpha_1, (\alpha y + \beta) = \beta_1$ 이라고 하자. 다음을 만족하는 y 가 존재한다.

$$\alpha_1 > 1, \quad 0 < \beta_1 < \alpha_1$$

이 Seifert 다양체에서 V_1 을 빼내고, Q_1 을 경선으로 하는 새로운 입체원환면을 붙이면 이 새로운 입체원환면은 일반적 파이버화 입체원환면이 된다. 이렇게 얻은 Seifert 다양체를 F_1 이라 하자. 특이파이버 H_2 에 관하여도 마찬가지로 α_2, β_2 가 존재하여 F_2 를 얻을 수 있다. 이러한 방법으로 모든 특이파이버를 빼내고, 새로운 일반적 입체원환면을 붙인 Seifert 다양체를 F_0 라 하자. F_0 는 특이파이버가 없으며 자명한 S^1 -다발 구조를 가진다. 즉, F_0 의 기저 공간은 콤팩트한 2차원 다양체이다. 하나의 파이버는 기저공간에서 한 점으로 사상된다. 특이파이버에 사상되는 기저공간의 점과 일반적파이버에 사상되는 기저공간의 점은 기저공간상에서는 어떠한 파이버에서 사상된 점인지 알 수 없다. 따라서 F_0 의 기저공간과 F 의 기저공간은 같다[[1]].

F_0 에서 임의의 일반적 입체원환면 V_0 를 제거한 공간을 \bar{F}_0 라 하자. \bar{F}_0 의 경계를 Π_0 라고 하면, 파이버 H_0 에 대하여 $Q_0 \cdot H_0 = +1$ 인 가향 곡선 Q_0 가 존재한다. Π_0 의 경선 M_0 에 대하여 다음이 성립한다.

$$M_0 \sim Q_0 + bH_0 \quad (4.1)$$

s 개의 특이 파이버를 가지는 가향 Seifert 다양체 F 를

$$(g|b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_s, \beta_s))$$

라고 쓸 것이다. 이 때, g 는 가향인 닫힌 연결 곡면인 기저 공간의 종수이다.

$(g|b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_s, \beta_s))$ 로부터 Seifert 다양체를 건설 할 수 있다. 즉, g 는 기저공간을 결정하여 \bar{F}_0 를 결정하고 이로부터 $(1, b)$ -수술, (α_1, β_1) -수술, \dots , (α_s, β_s) -수술을 하면 F 를 얻을 수 있다.

따라서 $g, b, (\alpha_i, \beta_i)$ ($i = 1, 2, \dots, s$)는 F 의 불변량이다.

예 4.1.1. 기저공간이 S^2 인 경우에 S^3 에서의 Dehn 수술로 표현하면 다음 그림의 첫 번째 그림과 같으며, 틀이 $\frac{1}{b}$ 인 매듭을 $-b$ 번 트위스트하면 $\frac{1}{-b+b} = \infty$ 가 되고, 동시에 틀이 $\frac{1}{b}$ 인 매듭과 연결 되어 있는 틀이 0 인 매듭은 틀이 $-b$ 가 되어 두 번째 그림과 같다.

4.2 Seifert 다양체의 분류

가향 Seifert 다양체를 F 라고 하자. 앞 절에서 F 와 Seifert 다양체를

$$(g|b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_s, \beta_s))$$

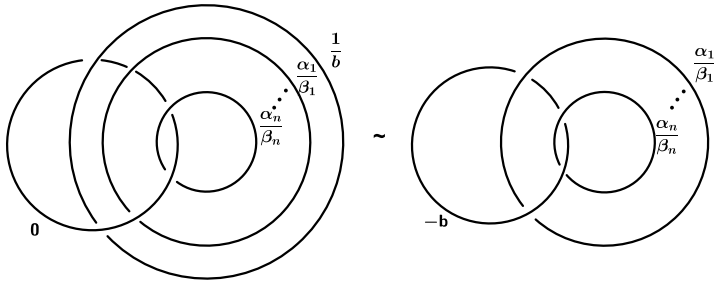


그림 5: $(0|b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_s, \beta_s))$

으로 대응하였다. 이 때의 α_i 와 β_i 들은 $0 < \beta_i < \alpha_i$ 조건을 만족한다. 이 때를 일반형이라 할 것이고, 이 조건을 만족하지 않는 불변량이 있을 때에는 $\langle g|b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_s, \beta_s) \rangle$ 로 표기할 것이다. 이 절에서는

$$\langle g|b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_s, \beta_s) \rangle$$

과 동형이 되는 $(g', b'; (\alpha'_1, \beta'_1), (\alpha'_2, \beta'_2), \dots, (\alpha'_s, \beta'_s))$ 에 관하여 살펴 볼 것이다.

정리 4.2.1 ([7]). *Seifert 다양체* $(g|b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_s, \beta_s))$ 는 임의의 정수 n 에 대하여 b 는 $b - n$ 으로, 동시에 (α_i, β_i) 를 $(\alpha_i, \beta_i + n\alpha_i)$ 으로 대체할 수 있다.

증명 F_0 는 특이파이버의 근방을 제거하고, 일반적 파이버의 근방 V_i 들을 붙인 공간이다. F_0 에서 파이버 근방 V_0 는 V_i 들을 포함하는 일반적 파이버 근방이라고 4.1절에서 V_0 의 경선 M_0 에 대하여 $M_0 \sim Q_0 + bH$ 를 만족하였다. \bar{V}_0 는 V_i 들을 제거한 V_0 로 s 개의 구멍이 있는 D^2 와 S^1 의 곱공간이다.

따라서 V_i 의 경선 M_i 에 대하여 다음이 성립한다.

$$M_0 \sim Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_r \quad (4.2)$$

각 특이파이버의 경계위에서, $M_i \sim \alpha_i Q_i + \beta_i H_i$ 가 성립하였으므로 다음 식이 성립한다.

$$-Q_0 + Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_r \sim bH_0 \quad (4.3)$$

각 특이파이버 근방의 경계에 있는 Q_i, H_i 에 대하여 새로운 Q'_i 는 정수 n 에 대하여

$$Q'_i \sim Q_i + nH_i$$

이고,

$$M_i \sim \alpha_i Q_i + \beta_i H_i \sim \alpha_i Q'_i + (\alpha_i + n)H_i = \alpha_i Q'_i + \beta'_i H'_i \quad (4.4)$$

이 성립한다. 식 (4.3)에 의해, $-Q_0 + Q_1 + \cdots + Q'_i + \cdots + Q_s \sim b'H_0$ 이다. 따라서 $b' = b - n$ 이다. \square

Dehn 수술을 통하여서도 위의 정리를 이해할 수 있는데, 틀이 $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ 인 매듭을 따라 n 번 트위스트하면 틀은

$$\frac{1}{n + \frac{\beta_i}{\alpha_i}} = \frac{\alpha_i}{n\alpha_i + \beta_i}$$

이 되고, 이 매듭과 고리수가 0이 아닌 매듭은 틀이 $-b$ 인 매듭 뿐이므로, 이 매듭은 틀이 $-b + n$ 이 된다. 즉, 다음 그림과 같다.

따름정리 4.2.1 ([3]). *가향 Seifert 다양체* $(g|b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_s, \beta_s))$ 의 *향*

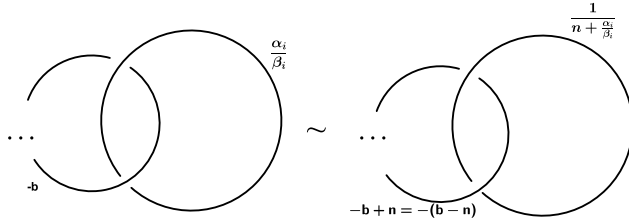


그림 6: $(g|b; \dots, (\alpha_i, \beta_i), \dots) = (0|b-n; \dots, (\alpha_i, \beta_i + n\alpha_i), \dots)$

이 반대로 주어졌을 때, 불변량은 다음과 같다.

$$1 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_m \text{ 일 때,}$$

$$M(g, -b-s; (\alpha_1, \alpha_1 - \beta_1), (\alpha_2, \alpha_2 - \beta_2), \dots, (\alpha_s, \alpha_s - \beta_s))$$

증명 정리 4.2.1에서 $n=1$ 인 경우에 각각의 특이파이버마다 β_i 를 $\beta_i + \alpha_i$ 로 대체하면 성립한다.

□

제 5 장

Application

이 장에서는 \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구(\mathbb{Z} -homology 3-sphere, integral homology 3-sphere)와 그 특별한 예인 Poincaré-호몰로지 3차원 구(Poincaré homology 3-sphere)에 대하여 알아볼 것이다. 그리고 Seifert 다양체가 호몰로지 3차원 구가 될 수 있는 조건에 관하여 알아보고, 호몰로지 3차원 구가 되는 Seifert 다양체의 예를 건설하고자 한다.

5.1 호몰로지 3차원 구와 Seifert 다양체

(Homology 3-Spheres and Seifert Manifolds)

정의 5.1.1 ([6]). 닫힌 3차원 다양체 M 이 임의의 정수 n 에 대해

$$H_n(M, \mathbb{Z}) = H_n(S^3, \mathbb{Z})$$

를 만족하면 M 을 \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구라고 한다.

닫힌 3차원 다양체 M 은 $H_1(M, \mathbb{Z}) = \{0\}$ 이면 \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구(\mathbb{Z} -homology 3-sphere)이다. $H_1(M, \mathbb{Z})$ 은 M 의 기본군 π_1 을 아벨화(abelianization)한 것과 동형이므로, M 의 기본군 $\pi_1(M)$ 을 계산하여 M 이 호몰로지 3차원 구인지를 확인할 수 있다.

예 5.1.1 ([6]). \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구의 가장 쉬운 예로, S^3 가 있다. 단순연결인 호몰로지 3차원 구는 S^3 와 호모토피이고, 이를 호모토피 3차원 구라

고 부른다.

\mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구(homology 3-spheres)의 특별한 예로서 Poincaré-호몰로지 3차원 구(Poincaré homology 3-sphere)는 S^3 에서 틀이 1인 오른 쪽 세잎매듭실(right trefoil knot)을 따라 수술하여 얻어질 수 있다. 그 기본군은 다음과 같다[5].

$$\begin{aligned} I^* &= \langle x, y | xyx = yxy, yx^2y = x^3 \rangle \\ &= \langle a, b | (ab)^2 = a^3 = b^5 \rangle \end{aligned}$$

닫힌 3차원 다양체 M 이 \mathbb{Z} -homology 3-sphere 가 되려면 $H_1(M, \mathbb{Z}) = \{0\}$ 이어야 한다. M 의 기본군을 아벨화 한 것이 H_1 과 동형이다. Seifert 다양체의 기본군에 대하여 알아보려고 한다.

Seifert 다양체의 특이 파이버화 입체원환면들을 제거하고, s 개의 일반적 파이버화 입체원환면 V_1, V_2, \dots, V_s 들을 채운 공간을 \bar{F}_0 라고 하자. $\bar{\bar{F}}_0 = \bar{F}_0 - \text{int}(V_1) \cup \dots \cup \text{int}(V_s)$ 이라고 하면 가향이고 종수가 g 인 기저 공간을 가지는 $\bar{\bar{F}}_0$ 의 기본군은 다음과 같다[7].

$$\begin{aligned} \pi_1(\bar{\bar{F}}_0) &= \langle A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, Q_0, Q_1, \dots, Q_s, H | \\ &A_i H A_i^{-1} = H, B_i H B_i^{-1} = H (i = 1, \dots, g) \\ &Q_0 Q_1 \cdots Q_r = A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1}, \\ &Q_j H Q_j^{-1} = H (k = 0, 1, \dots, r) \rangle \end{aligned}$$

$\pi_1(F)$ 는 $\pi_1(\bar{F}_0)$ 에 다음의 주어진 관계 $r+1$ 개를 추가하여 얻어진다.

$$Q_0 H^b = Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = \dots = Q_s^{\alpha_s} H^{\beta_s} = Q_0 Q_1 \dots Q_s = 1$$

가향이고 기저공간의 종수가 g 인 \sum_g 에 대하여, $g > 0$ 이면 기본군은 위수가 무한인 군이된다. 또한 $|H_1(\sum_g)| = 2g$ 이다. Seifert 다양체 M 의 기본군에서 기저공간의 기본군으로 가는 전사함수가 존재하고, H_1 에 대하여도 성립한다. 따라서 H_1 이 자명한 군을 가지려면 $g = 0$ 이어야 한다. 기저공간이 S^2 인 Seifert 다양체 $(0|b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_s, \beta_s))$ 의 기본군은 다음과 같다.

$$\pi_1(M) = \langle Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_s, H \rangle$$

$$Q_0 H^b = Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = \dots = Q_s^{\alpha_s} H^{\beta_s} = Q_0 Q_1 \dots Q_s = 1,$$

$$Q_j H Q_j^{-1} = H \quad (j = -1, \dots, s)$$

$Q_0 H^b = Q_1^{\alpha_1} H^{\beta_1} = \dots = Q_s^{\alpha_s} H^{\beta_s} = Q_0 Q_1 \dots Q_s = 1$ 는 다음 식을 만족하여야 한다[7].

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & \beta_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_s & \beta_s \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \pm 1 \quad (5.1)$$

$$b\alpha_1 \dots \alpha_s + \beta_1 \alpha_2 \dots \alpha_s + \dots + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{s-1} \beta_s = \pm 1 \quad (5.2)$$

$\alpha_i \geq 2$ 인 양수에 대하여 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 이 서로소이면 식(5.2)를 만족하는 해가 되는 정수 $b, \beta_1, \dots, \beta_s$ 가 존재한다. 식(5.2)의 값이 -1인 경우는 b 와 β 의 값이 $-b, -\beta$ 의 값으로 바뀌는 경우이므로 따름정리 4.2.1.을 통하여 식(5.2)의 값이 1인 경우만 구하면 쉽게 구할 수 있다. 식(5.2)의 값이 1일 때, 특이파이버의 개수에 따른 b 와 β_i 들의 값들은 다음과 같이 구할 수 있다.

- (1) 특이파이버가 없는 경우, 식(5.2)는 $0 - (-b) = 1$ 이 되어 $b = 1$ 이므로 $(0|1;)$ 이고, 이는 $\mathbb{O}^{-1} = S^3$
- (2) 특이파이버가 1개인 경우, $b\alpha_1 + \beta_1 = 1$ 를 만족하여야 한다. 정리 3.2.2에서 $\mathbb{O}^{\frac{p}{q}}$ 에 대하여, 다음과 같은 식을 만족하면

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \tag{5.3}$$

들이 a_1, a_2, \dots, a_n 인 고리를 수술하여 얻은 것과 같다는 것을 보였다. 이를 이용하여 $(0|b; (\alpha_1, \beta_1))$ 의 Dehn수술로 표현한 그림은 다음과 같다.

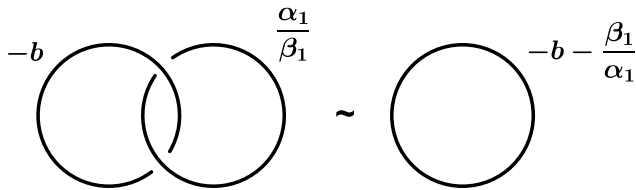


그림 7: 특이파이버가 1개인 Seifert \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구

$-b - \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{-b\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1} = -\frac{1}{\alpha_1}$ 이므로, S^3 에서 자명한 매듭을 따라 $(-1, \alpha_1)$ -수술한 결과와 같다. 따라서, $\bigcirc^{-\frac{1}{\alpha_1}} = S^3$ 가 된다.

(3) 특이파이버가 2개인 경우, 다음 식을 만족하여야 한다.

$$b\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 = 1 \quad (5.4)$$

특이파이버가 2개이고 식(5.2)를 만족하는 Seifert 다양체는 다음과 같다.

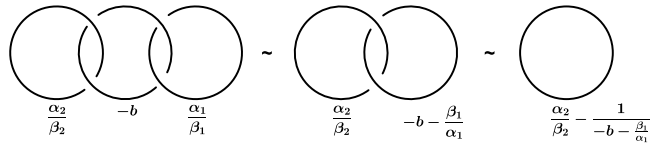


그림 8: 특이파이버가 2개인 Seifert \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구

자명한 매듭(trivial knot)의 틀(framing)을 계산하면,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{1}{-b - \frac{\beta_1}{\alpha_1}} &= \frac{b\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2}{b\alpha_1\beta_2 + \beta_1\beta_2} \\ &= \frac{1}{b\alpha_1\beta_2 + \beta_1\beta_2} \end{aligned}$$

이므로 특이파이버가 2개이면 호몰로지 3차원 구는 S^3 이다.

(4) 특이파이버가 3개인 경우, $\alpha_1 < 5, \alpha_2 \leq 5, \alpha_3 \leq 13$ 인 경우에 대하여 Seifert 다양체의 불변량은 다음 표 1과 같다.

표 1: 특이파이버가 3개인 Seifert \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$	Seifert 다양체	일반형
(2,3,5)	$(0 -1; (2,1), (3,1), (5,1))$	$(0 -1; (2,1), (3,1), (5,1))$
(2,3,7)	$\langle 0 1; (2,-1), (3,-1), (7,-1) \rangle$	$(0 -2; (2,1), (3,2), (7,6))$
(2,3,11)	$(0 -1; (2,1), (3,1), (11,2))$	$(0 -1; (2,1), (3,1), (11,2))$
(2,3,13)	$\langle 0 1; (2,-1), (3,-1), (13,-2) \rangle$	$(0 -2; (2,1), (3,2), (13,9))$
(2,5,7)	$\langle 0 1; (2,-1), (5,-1), (7,-2) \rangle$	$(0 -2; (2,1), (5,4), (7,5))$
(2,5,9)	$\langle 0 1; (2,-1), (5,-2), (9,-1) \rangle$	$(0 -2; (2,1), (5,3), (9,8))$
(2,5,11)	$\langle 0 1; (2,-1), (5,-1), (11,-1) \rangle$	$(0 -2; (2,1), (5,4), (11,10))$
(2,5,13)	$\langle 0 1; (2,-1), (5,-1), (13,-4) \rangle$	$(0 -2; (2,1), (5,4), (13,9))$
(3,5,7)	$(0 -1; (3,2), (5,1), (7,1))$	$(0 -1; (3,2), (5,1), (7,1))$
(3,5,11)	$(0 -1; (3,1), (5,2), (11,3))$	$(0 -1; (3,1), (5,2), (11,3))$
(3,5,13)	$\langle 0 1; (3,-1), (5,-1), (13,-6) \rangle$	$(0 -2; (3,2), (5,4), (13,7))$
(4,5,7)	$\langle 0 1; (4,-1), (5,-3), (7,-1) \rangle$	$(0 -2; (2,1), (3,2), (7,6))$
(4,5,9)	$(0 -1; (4,1), (5,1), (9,5))$	$(0 -1; (4,1), (5,1), (9,5))$
(4,5,11)	$\langle 0 1; (4,-1), (5,-1), (11,-6) \rangle$	$(0 -2; (4,3), (5,4), (11,7))$
(4,5,13)	$\langle 0 1; (4,-1), (5,-3), (13,-2) \rangle$	$(0 -2; (4,3), (5,2), (13,11))$

(4) 식 (5.2)에서,

$$\alpha_1 \cdots \alpha_s \left(\sum_{i=1}^s \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) = 1 - b\alpha_1 \cdots \alpha_s$$

는 각각의 i 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\alpha_1 \cdots \alpha_s \frac{\beta_i}{\alpha_i} \equiv 1 \pmod{\alpha_i}$$

따라서 위 식을 만족하는 β_i 들에 대해 b 의 값이 유일하게 결정된다.

(1),(2),(3)에 의해 특이파이버가 2개 이하이고, 식 (5.2)를 만족하는 경우는 S^3 와 동형임을 알 수 있다.

표 1에 있는 $(0|-1; (2,1), (3,1), (5,1))$ 를 M 이라 하자. M 의 기본군

$\pi_1(M)$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \pi_1(M) &= \langle Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, H | Q_0 H^{-1} = Q_1^2 H = Q_2^3 H = Q_3^5 H = Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 = 1 \rangle \\ &= \langle Q_1, Q_2, Q_3, H | Q_1^2 = Q_2^3 = Q_3^5 = Q_1 Q_2 Q_3 \rangle \\ &= \langle a, b | (ab)^2 = a^3 = b^5 \rangle \quad (Q_1 = Q_2 Q_3, Q_2 = a, Q_3 = b) \end{aligned}$$

따라서 $M(0|-1; (2, 1), (3, 1), (5, 1))$ 는 Poincaré 호몰로지 3차원 구이다.

식 (5.2)의 값이 -1인 경우는 b 와 β_i 들의 부호가 바뀌게 되므로 표 1과 대응되는 호몰로지 3차원 구는 다음 [표2]와 같다.

표 2: 특이파이버가 3개인 Seifert \mathbb{Z} -호몰로지 3차원 구(2)

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$	Seifert 다양체	일반형
(2,3,5)	$\langle 0 1; (2, -1), (3, -1), (5, -1) \rangle$	$(0 -2; (2, 1), (3, 2), (5, 4))$
(2,3,7)	$\langle 0 -1; (2, 1), (3, 1), (7, 1) \rangle$	$(0 -1; (2, 1), (3, 1), (7, 1))$
(2,3,11)	$(0 1; (2, -1), (3, -1), (11, -2))$	$(0 -2; (2, 1), (3, 2), (11, 9))$
(2,3,13)	$(0 -1; (2, 1), (3, 1), (13, 2))$	$(0 -1; (2, 1), (3, 1), (13, 2))$
(2,5,7)	$(0 -1; (2, 1), (5, 1), (7, 2))$	$(0 -1; (2, 1), (5, 1), (7, 2))$
(2,5,9)	$(0 -1; (2, 1), (5, 2), (9, 1))$	$(0 -1; (2, 1), (5, 2), (9, 1))$
(2,5,11)	$(0 -1; (2, 1), (5, 1), (11, 1))$	$(0 -1; (2, 1), (5, 1), (11, 1))$
(2,5,13)	$(0 -1; (2, 1), (5, 1), (13, 4))$	$(0 -1; (2, 1), (5, 1), (13, 4))$
(3,5,7)	$\langle 0 1; (3, -2), (5, -1), (7, -1) \rangle$	$(0 -2; (3, 1), (5, 4), (7, 6))$
(3,5,11)	$\langle 0 1; (3, -1), (5, -2), (11, -3) \rangle$	$(0 -2; (3, 2), (5, 3), (11, 8))$
(3,5,13)	$(0 -1; (3, 1), (5, 1), (13, 6))$	$(0 -1; (3, 1), (5, 1), (13, 6))$
(4,5,7)	$(0 -1; (4, 1), (5, 3), (7, 1))$	$(0 -1; (4, 1), (5, 3), (7, 1))$
(4,5,9)	$\langle 0 1; (4, -1), (5, -1), (9, -5) \rangle$	$(0 -2; (4, 3), (5, 4), (9, 4))$
(4,5,11)	$(0 -1; (4, 1), (5, 1), (11, 6))$	$(0 -1; (4, 1), (5, 1), (11, 6))$
(4,5,13)	$(0 -1; (4, 1), (5, 3), (13, 2))$	$(0 -1; (4, 1), (5, 3), (13, 2))$

표1과 표2를 비교하였을 때 일반형이 다름을 알 수 있다. 즉, 대칭성 (symmetric)을 갖지 않는다. 특이파이버가 3개 이상인 Seifert 호몰로지 구

를 $M^3 = (0|b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ 라 하자.

$$\begin{aligned} -M^3 &= \langle 0 | -b; (\alpha_1, -\beta_1), (\alpha_2, -\beta_2), \dots, (\alpha_r, -\beta_r) \rangle \\ &= (0 | -b - r; (\alpha_1, \alpha_1 - \beta_1), (\alpha_2, \alpha_2 - \beta_2), \dots, (\alpha_r, \alpha_r - \beta_r)) \end{aligned}$$

$M^3 = -M^3$ 이려면 $\beta_i = \alpha_i - \beta_i$ 이므로 $2\beta_i = \alpha_i$ 이다. α_i 와 β_i 는 서로소이고 Seifert 호몰로지 3차원 구가 되려면 α_i 들이 모두 서로소이어야 하므로 $2\beta_i = \alpha_i$ 를 만족하는 α_i, β_i 들이 존재하지 않는다. 따라서 특이 파이버가 3개 이상인 Seifert 호몰로지 3차원구는 대칭성(symmetric)을 갖지 않는다.

참고 문헌

- [1] Mark Jankins and Walter D. Neumann, *Lectures on Seifert manifolds*, Brandeis Lecture Notes, vol. 2, Brandeis University, Waltham, MA, 1983.
- [2] Louis H. Kauffman, Sofia Lambropoulou, Slavik Jablan, and Jozef H. Przytycki (eds.), *Introductory lectures on knot theory*, Series on Knots and Everything, vol. 46, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ; Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, 2012, Selected lectures from the Advanced School and Conference on Knot Theory and its Applications to Physics and Biology held in Trieste, May 11–29, 2009.
- [3] José María Montesinos, *Classical tessellations and three-manifolds*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [4] James R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [5] V. V. Prasolov and A. B. Sossinsky, *Knots, links, braids and 3-manifolds*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 154, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, An introduction to the new invariants in low-dimensional topology, Translated from the Russian manuscript by Sossinsky [Sosinskiĭ].
- [6] Nikolai Saveliev, *Invariants for homology 3-spheres*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 140, Springer-Verlag, Berlin, 2002, Low-Dimensional Topology, I.
- [7] Herbert Seifert and William Threlfall, *Seifert and Threlfall: a textbook of topology*, Pure and Applied Mathematics, vol. 89, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980, Translated from the German edition of 1934 by Michael A. Goldman,

With a preface by Joan S. Birman, With “Topology of 3-dimensional fibered spaces” by Seifert, Translated from the German by Wolfgang Heil.

Abstract

A Classification of Closed Surfaces and Seifert Manifolds

Euna Son
Mathematics Education Major
Graduate School of Education
Sungshin University

In the thesis we consider a classification of closed 2-manifold and a construction of 3-manifolds by using Dehn surgery. After that we will give a method how to classify Lens spaces and oriented Seifert fibered 3-manifolds by using some invariants coming from Dehn surgery. As an application, we find some conditions when a Seifert fibered 3-manifold becomes a \mathbb{Z} -homology 3-sphere.

Keywords : closed surface, Dehn surgery, Seifert manifold