金 周 洪 敎授指導

碩士學位 請 求 論 文

다양한 이색옵션의 종류와 특성에 관한 연구

2011

誠信女子大學校 金融情報大學院

金融情報學科 金融·保險專攻

安 姸 花

다양한 이색옵션의 종류와 특성에 관한 연구

金 周 洪 教授指導

이 論文을 碩士學位論文으로 提出함.

2011年 5月

誠信女子大學校 金融情報大學院

金融情報學科 金融·保險專攻

安 姸 花

認 准 書

安姸花의 碩士學位 論文으로 認准함.

審査委員 ______________ 印

審査委員 ______________ 印

審査委員 ______________ 印

誠信女子大學校 金融情報大學院

논 문 개 요

금융환경의 급격한 변화로 금융기관을 포함한 모든 기업의 재무위험이 증가함에 따라 위험을 효율적으로 관리할 수 있는 파생상품에 관심을 기울이고 있다. 이러한 파생상품의 의의와 기능에 관하여 알아본다. 파생상품 중에서 기초자산을 미리 정해놓은 가격으로 미래의 일정한 시점에 가서 사거나 팔 수 있는 권리가 내재된 상품이 옵션이다. 옵션은 이항나무모형, 블랙-숄즈 모형, 삼항나무 모형을 바탕으로 가격을 결정할 수 있으며, 이러한 옵션의 가격결정모형을 알아본다. 옵션 중에서 장외시장에서 거래되는 이색옵션은 투자자의 다양한 요구를 충족시키기 위하여 변형된 것으로, 일반적인 옵션의 계약조건이나 속성 중에서 일부를 변형시켜 개발한 새로운 형태의 옵션들이다. 이러한 이색옵션의 다양한 종류와 특성에 관하여 알아보고자 한다.

목　　차

제 1 장 서 론

금융환경의 급격한 변화로 금융기관을 포함한 모든 기업의 재무위험이 증가함에 따라 효율적으로 위험을 관리할 수 있는 파생상품에 관심을 기울이고 있다. 파생상품(derivatives)이란 금리(채권, 예금증서 등 기초자산 가격), 주가(주식의 가격), 환율(외환의 가격) 등 기초자산(underlying asset)의 가격이나 자산가치 지수의 변동에 의해 그 가치가 결정되는 금융계약을 말하며, 구체적으로 리스크 회피를 위한 수단으로 사용되는 선물(future), 옵션(option), 스왑(swap) 등을 의미한다. 파생상품은 가격변동에 대한 위험을 회피할 수 있고, 시장참가자들에게 거래시장 가격에 대한 정보를 미리 제공하여 합리적인 의사결정을 할 수 있도록 한다. 또한 필요시마다 보유 또는 보유예정 자산의 구성을 탄력적으로 조정할 수 있어 자금 흐름에 탄력성을 제고시키며 일부 증거금으로 계약자산의 전부를 보유한 것과 같은 효과를 얻을 수 있어 비용절감 효과를 기대할 수 있고 시장참가자들에게 위험전가의 용이, 저렴한 비용 등으로 금융시장의 효율성을 증대시킨다는 기능을 가지고 있다. 파생상품은 지난 20세기 후반부터 국제금융환경의 불안정성, 즉 추세적 인플레이션 상승과 여러 차례의 석유파동으로 인한 상품 가격 변동 폭 증가 등으로 인해 기존의 기초상품들처럼 간단하게 거래위험(risk)을 효율적으로 관리할 수 없게 되었고, 이러한 기초자산의 가격변동성에 대한 방어적 헤징 수단(means of hedging)으로 등장하였다. 정보통신기술과 컴퓨터의 급속한 발전과 함께 마침 1972년 블랙-숄즈의 옵션가격결정모형(Black-Scholes Model) 발표를 계기로 하여 금융 공학적 기법이 파생시장에 등장함으로써 본격적으

로 실용적인 파생상품시대의 막이 오르게 되었다. 한편, 국제금융시장의 환경변화와 각 부문별 변동성도 크게 증가하였다. 1970년대 이후에는 인플레이션에 이어 환율, 금리, 상품가격, 주가 등 기초자산(underlying asset) 가격이 총체적으로 급격히 변동하는 불확실성의 시대에 들어서게 되었다. 이와 같은 불확실성하에서 환 리스크가 생성되고, 이에 대응하는 새로운 파생상품이 등장하게 되었다. 최근에는 기초자산의 범위에 기후, 탄산가스(이산화탄소), 날씨, 자연재해까지 포함시켜 그 대상이 확대되고 있다.

파생상품 중에서 기초자산을 미리 정해놓은 가격으로 미래 일정한 시점에 가서 사거나 팔 수 있는 권리가 내재된 상품을 옵션(option)이라 한다. 옵션에는 헤지(hedge), 투자위험 제한, 다양한 투자전략, 레버리지 효과의 네 가지 기능이 있다. 헤지는 옵션의 만기일에 기초자산의 가격변동에서 오는 위험을 회피할 수 있는 기능이며, 투자위험 제한 기능은 옵션을 매수함으로써 이익의 폭은 제한이 없으나 손실은 프리미엄으로 제한되는 보험효과이다. 다양한 투자전략은 기초자산의 가격변동과 연계하여, 풋/콜, 만기일, 행사가격 등을 선택하는 등의 다양한 투자전략을 구사할 수 있다. 마지막으로 레버리지 효과는 적은 투자자금으로 큰 이익을 얻을 수 있는 레버리지가 큰 투자수단의 기능을 가진다.

이와 같은 옵션(option)을 위주로 가격결정모형을 알아보며, 특히 이항나무 모형과 블랙-숄즈(Black-Scholes) 모형, 그리고 삼항나무 모형을 바탕으로 가격결정 모형을 알아본다.

이항나무 모형은 주가가 단순히 상승하느냐, 하락하느냐의 두 가지의 경우의 수만 놓고 가격을 도출한 것으로, 블랙-숄즈 모형(Black-Scholes Model)보다는 간단하다. 이항나무 모형은 1979년 콕스(John Cox), 로스

(Stephen Ross), 루빈스타인(Mark Rubinsein)이 보다 간단한 방법으로 개발하였다. 이 모형은 가격을 결정하는 기초자산인 주가가 상승 또는 하락하는 2가지 경우, 즉 이항분포에 따른다고 가정함으로써 쉽고 직관적으로 가격결정 요인들의 역학관계를 설명한다. 블랙-숄즈 모형(Black-Scholes Model)은 최초의 옵션가격결정모형이며, 머튼(Merton)에 의해 보다 여러 가지 방법으로 확장되었다. 블랙-숄즈 모형(Black-Scholes Model)은 주가변동에 대한 일정한 가정 하에서, 주식매수와 콜옵션매도를 적절하게 결합한 무위험 포트폴리오의 가치변화식으로부터 옵션가격 변동에 대한 복잡한 형태의 2차 편미분방정식을 구성하고, 그 방정식의 해를 구함으로써 얻어진다. 블랙-숄즈 모형에서 콜옵션가격은 주가와 행사가격의 직접적인 함수임을 알 수 있다. 즉, 주가가 상승하면 옵션가격이 상승하고, 행사가격이 높으면 옵션가격이 하락한다. 특히, 콜옵션가격은 주가보다 높을 수 없으며 만료일이 도래함에 따라 옵션가격은 행사가치(내재가치)에 수렴한다는 것을 보여준다. 그리고 이자율, 만료일까지의 기간 및 주가변동성이 할인가치나 누적확률을 변화시킴으로써 옵션가격에 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

본 논문에서는 이러한 옵션 중에서 이색옵션(option)을 위주로, 이색옵션의 다양한 종류와 특성에 관하여 알아보고자 한다.

이색옵션이란, 장외옵션의 대표적인 예로 거래소에서 거래되는 전형적인 옵션과는 달리 특이한 구조를 갖는 옵션을 말하며 1990년 Mark Rubinstein의 'Exotic options'라는 논문에서 유래했다. 다양한 구조와 투자목적에 사용할 수 있도록 투자자의 다양한 요구에 맞게 맞춤식으로 제공되는 옵션이다. 일반 옵션은 계약조건의 표준화로 일반 투자자의 보편적인 위험-손익구조 충족에는 별다른 문제가 없지만 기관투자자 등의 특

수한 형태의 위험-손익구조를 충족시키기에는 부족함이 있다. 이에 따라 일반옵션에서 행사가격, 만기시점, 현물가격 산정방법, 손익시점 등 옵션의 계약조건을 조금씩 변화시켜 다양한 위험-손익구조를 나타내는 이색옵션이 출현했고, 장외시장에서 금융기관 위주로 거래되기 시작했다. 이러한 이색옵션은 거래소가 존재하지 않기 때문에 고객의 요구에 따라 유연하고 다양한 구조를 가질 수 있고, 일반옵션을 합성하는 것보다 상대적으로 저렴하며, 필요에 따라 매우 탄력적으로 조절할 수 있다는 특성이 있다.

논문은 제 1 절은 파생상품의 개요를 다루고, 제 2 절은 옵션의 가격결정모형을 소개하며 제 3 절은 이색옵션의 다양한 종류와 특성으로 이루어져 있다.

제 2 장 본 론

제 1 절 파생상품의 개요

1. 파생상품(Derivatives Products)의 의의

기업들이나 기관들이 국제거래를 하다 보면 환리스크나 이자율리스크 등의 시장위험과 신용위험 등이 수반된다. 국내뿐만 아니라 국제적인 거래에 따른 각종 위험을 관리하거나 투기적인 목적으로 사용되는 것이 바로 파생상품이다. 21세기 초를 강타한 서브프라임 사태도 파생상품과 깊은 관련이 있다.

파생상품(Derivatives Products)은 이름에서도 알 수 있듯이 어떤 기초가 되는 자산으로부터 파생된 상품이다. 그렇기 때문에 파생상품이 나름대로의 가치를 가지는 것은 파생의 기준이 되는 기초자산(Underlying Asset)이 효용이나 가치를 지니기 때문이다.

일반적으로 파생상품은 '그 상품의 가치가 해당 기초자산으로부터 파생되어진 모든 유형의 상품'을 총체적으로 일컫는 말이다. 즉, '기초자산의 현물가격을 바탕으로 그 가치가 변하는 상품'을 말한다. 그리고 기초자산의 거래를 미래 어느 시점에 행하기로 미리 약속하는 계약의 형태를 지닌다. 이러한 파생상품의 주요 형태로는 선도, 선물, 옵션 및 스왑 등이 있다. 또 두 가지의 형태가 합쳐진 합성형 파생상품도 있다. 예를 들면 선물과 옵션을 합성한 선물옵션이나 스왑과 옵션을 합성한 스왑션이 있다.

2. 파생상품(Derivatives Products)의 기능

(1) 위험전가 기능(Risk Shifting)

파생상품시장의 가장 중요한 경제적 기능 중의 하나가 위험전가 기능이다. 가격변동의 위험을 원하지 않는 헤저(Hedger)는 파생상품을 이용하여 가격변동의 위험을 감수하면서 보다 높은 이익을 추구하려는 투기자(Speculator)에게 자신이 가지고 있는 여러 가지 위험을 전가시킬 수 있다.

생산자, 소비자, 기업과 금융기관 등의 실수요자인 헤저는 자신의 업무를 영위하면서 발생되는 관련 가격변동위험에 항상 노출된다. 이 실물포지션에 대하여 파생금융상품시장에서 반대되는 포지션을 만들어 실물가격의 불리한 가격변동으로부터 발생하는 손실을 파생상품시장에서 발생하는 이익으로 상쇄시키는 헤지거래를 활용하면 된다. 이러한 파생상품시장이 갖는 위험전가의 기능을 통하여 창출되는 헤지기회의 제공은 실수요자들로 하여금 자신이 처한 가격변동위험을 효율적으로 관리할 수 있는 수단을 제공한다. 더 나아가 현물시장의 유동성과 안정성을 제고시키고 사회 전반의 효용을 증대시킬 수 있다.

(2) 가격예시 기능(Price Discovery)

파생상품시장에서 가격은 해당 상품의 수요와 공급에 관련된 각종 정보가 집약되어 결정되므로 현재 시점에서 미래 현물가격에 대한 무수한

시장 참가자들의 공통된 예측을 나타낸다고 볼 수 있다. 또 시간이 흐름에 따라 새로운 수요와 공급 요인을 반영하고, 이를 토대로 한 시장 참가자들의 미래에 대한 예측이 변동하게 되면 파생상품 가격도 변동하게 된다. 이같이 현재의 파생상품 가격이 미래 현물가격에 대한 가격예시 기능을 수행함으로써 실수요자에 해당되는 생산자와 소비자 등 각 경제주체들의 현재 시점의 의사결정에 커다란 영향을 미친다. 또한 미래 가격변동의 불확실성을 어느 정도 제거함으로써 현물시장의 수요공급에 영향을 미쳐 현물가격의 변동을 안정화시키는 기능을 수행한다.

(3) 상품거래의 활성화 기능

파생상품 거래는 소액의 증거금만으로 거액의 거래가 가능하기 때문에 투자원금에 대한 손익의 레버리지(Leverage) 효과가 매우 크다. 따라서 위험을 감수하고서라도 적은 자금으로 높은 수익을 얻고자 하는 투기자에게는 파생상품 거래가 매우 유용한 투기수단이 된다. 결과적으로 파생상품 거래는 투기성 자금의 시장유입을 촉진하여 시장을 활성화 시키는 경제적 기능을 한다. 한편 파생상품시장은 현물시장과의 재정거래(Arbitrage) 기회를 제공함으로써 현물시장의 거래를 촉진한다.

(4) 시장의 효율적인 자원배분 기능

투기자는 헤저가 회피하고자 하는 위험을 적극적으로 수용하면서 미래

의 가격 예측을 토대로 파생상품시장에서 포지션을 취해 투기적 이익을 추구한다. 투기자는 투기적 이익을 극대화하기 위해서 시장의 수급동향, 금융정책 등에 관한 정보를 수직 분석하며 그 결과는 파생상품 가격에 즉각 반영된다. 따라서 시장정보의 수집 면에서 열세에 있는 기업, 가계 등의 경제주체도 파생상품 가격을 통하여 미래의 현물가격을 보다 쉽게 예측할 수 있기 때문에 투자와 소비활동을 합리적으로 행할 수 있다. 또 파생상품시장에서는 다수의 시장 참가자가 경쟁함에 따라 독점력이 감소되어 시장의 자원배분 기능이 보다 효율적으로 이루어질 수 있다.

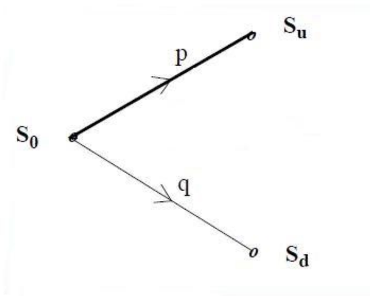
제 2 절 옵션가격결정모형

옵션가격결정모형은 시장에서 형성되는 옵션 프리미엄에 해당하는 이론가(價)를 산출하는 모형으로, 옵션가격결정요인에 대응하는 옵션가격을 결정하는 모형이다[17, 30, 31, 32]. 지금까지 개발된 모형은 수십 가지가 넘지만 그 중에서 가장 많이 쓰이는 모형으로는 이항나무 모형, 블랙-숄즈 모형, 몬테카를로 시뮬레이션 모형 등이 있다. 블랙-숄즈 모형은 해석모형의 대표적인 모형으로 전제하고 있는 가정을 하나씩 완화하여 일반화시킨 모형들과 주식시장 외에 선물시장, 외환시장, 금리시장 등에 확대 응용한 것으로 분류된다.

옵션가격을 구하기 위해서 수치제어 접근방법을 사용한 모형을 수치 모형이라 하는데 이러한 모형의 대표적인 것이 이항나무 모형이다. 이 모형은 최적 근사치의 값을 얻을 때까지 반복계산을 하는 방식을 쓰고 있다.

1. 이항나무 모형

(1) 단일기간 모형



단일기간 이항나무 모형에서 단일기간의 시작시간은 0, 끝시간을 1이라 하자. 약간 찌그러진 동전을 던졌을 때 앞면(H)이 나올 확률이 p, 뒷면(T)이 나올 확률이 $q=1-p$라 하자[29]. 시간 0에서의 주식가격을 S_0, 시간 1에서의 주식가격을 동전을 던진 결과에 따라 $S_1(H)=S_u$, $S_1(T)=S_d$라 하자. 빌리는 이자율이나 대출 이자율 r은 같다고 가정한다. 시간 1에서는 알 수 있고 시간 0에서 알 수 없는 어떤 결과를 '무작위적(random)이다'라고 말한다. 예를 들면 동전을 던져서 나온 결과는 무작위적 결과라고 할 수 있다. 차익거래(arbitrage)란 초기자금 0으로 시작하여 돈을 잃을 확률은 0이고 돈을 벌 확률이 양인 거래전략(trading strategy)을 말한다.

두 양수 u, d를

$$u=\frac{S_1(H)}{S_0}, \qquad d=\frac{S_1(T)}{S_0}$$

정의하고 항상 $u>d$를 만족한다고 가정하자. 또한 차익거래를 배제하기 위

해서

$$0 < d < 1+r < u$$

라 가정하자. 주식가격은 양이어야 하므로 $d > 0$. 만약 $d \geq 1+r$이면 초기자금 없이 은행에서 돈을 빌려 주식 1주를 산다. 시간 1에서 $S_1(H) = S_0 u > S_0 d = S_1(T)$이므로 어떠한 경우에도 빌린 돈을 갚고도 돈이 남아 차익거래가 생긴다. $u \leq 1+r$이면 주식을 공매한 돈 S_0로 은행에 예금한다. 시간 1에서 $S_0 d = S_1(T) < S_0 u = S_1(H) \leq S_0(1+r) \geq S_0(1+r)$이므로 $S_0(1+r)$의 돈으로 시중에서 주식을 사서 공매를 청산하고도 돈이 남아 차익거래가 생긴다.

단일기간 이항나무모델에서 $S_0 = 4$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, 그리고 $r = \frac{1}{4}$라 하자. 그러면 $S_1(H) = 8$, $S_1(T) = 2$가 된다. 유로피언 콜옵션의 행사가격을 $K = 5$라 가정하자. 시간 0에서 초기자금 $X_0 = 1.20$을 가지고 주식 $\Delta_0 = \frac{1}{2}$주를 산다고 가정하자. 그러면 1주 가격이 4이므로 $\frac{1}{2}$주를 사기 위해서는 $X_0 - \Delta_0 S_0 = 1.2 - \frac{1}{2} \times 4 = -0.80$이므로 금융시장에서 0.8을 대출을 하면 시간 1에서 $(1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = \frac{5}{4} \times (-0.8) = -1$이 되므로 1을 갚아야 한다. 시간 1에서 주식과 금융시장으로 구성된 포트폴리오의 가치 X_1은 동전을 던진 결과에 따라

$$X_1(H) = \frac{1}{2} S_1(H) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 4 - 1 = 3,$$

$$X_1(T) = \frac{1}{2}S_1(T) + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = 1 - 1 = 0$$

가 된다.

어떠한 경우에도 시간 1에서 포트폴리오의 가치는 옵션의 가치와 일치한다. 즉,

$$X_1(H) = 3 = (S_1(H) - 5)^+, \ X_1(T) = 0 = (S_1(T) - 5)^+$$

로써 주식과 금융시장을 이용해 옵션의 가치를 복제(replicate)할 수 있다. 위와 같은 옵션을 판 사람은 주식이 오르는 경우 손해를 보게 되는 3의 위험(risk)을 없앨 수 있다(hedge). 옵션의 가치를 복제하는데 필요한 초기자금 $X_0 = 1.20$이 시간 0에서 콜옵션(행사가격 $K=5$)의 공정가격이 된다.

만약 옵션가격이 1.21 (>1.2)이라 가정하자. 옵션 매도자는 0.01을 금융시장에 투자하고 1.2로 헤지를 한다. 시간 1이 되면 헤지하고도 금융시장에 투자한 돈 $0.01 \times (1+r) = 0.125$가 남아 차익거래가 생긴다. 만약 옵션가격이 1.19 (<1.2)라 가정하자. 이 경우에 옵션을 매입하면 차익거래가 생긴다. 우선 $\frac{1}{2}$주를 공매(short selling)하여 $4 \times 1/2 = 2$의 돈을 만든다. 1.19로 옵션을 사면 0.81의 돈이 남는데 이 돈을 두개로 쪼개어, 즉 0.8과 0.01로 나누어 금융시장에 각각 투자한다. 시간 1에서 동전을 던진 결과가 H라 하자. 공매를 청산하기 위해 $8 \times \frac{1}{2} = 4$의 돈이 필요하다. 또한 옵션을 행사하면 3의 이득이 생기고 금융시장에 투자한 0.8의 돈은 1로 불어난다. 이 돈 4로 공매 청산을 하고도 금융시장에 투자한 0.01의 돈이 남아 차익거래가 생긴다. 시간 1에서 T이면 옵션의 가치는 0이고, 공매를 청산하기 위해

$4\times\frac{1}{2}=1$의 돈이 필요하다. 예금한 0.8은 1로 불어나므로 이것으로 공매를 청산하면 0.01의 돈이 남아 차익거래가 생긴다. 이 단일기간 이항모형을 만족하는 주식S를 기초자산으로 하는 행사가격$K=5$인 유럽형 콜옵션의 공정가격(옵션 프리미엄)을 결정해 보자.

시간 0에서 콜옵션 1개를 매도하고 주식 Δ_0주를 매입한 포트폴리오를 고려해 보자. 시간 1에서 동전을 던진 결과가 H이면 주식의 가치는 $8\Delta_0$이고, 옵션의 가치는 $3(=(8-5)^+)$이므로 매도자의 포트폴리오의 가치는 $8\Delta_0-3$이다. 옵션매도자는 3을 손해를 보게 된다. 시간 1에서 동전을 던진 결과가 T이면 주식의 가치는 $2\Delta_0$이고, 옵션의 가치는 $0(=(2-5)^+)$이므로 매도자의 포트폴리오의 가치는 $2\Delta_0$이다. 따라서 H일 때 포트폴리오의 가치와 T일 때 포트폴리오의 가치를 같게 하는 Δ_0를 선택하면 이 포트폴리오는 위험이 없다. 즉, $8\Delta_0-3=2\Delta_0$에서 Δ_0에 관해서 풀면 $\Delta_0=\frac{1}{2}$가 된다.

시간 0에서 옵션의 가치를 V_0라 하면 시간 0에서의 포트폴리오의 가치(또는 포트폴리오를 구성하는데 드는 비용은)는

$$\Delta_0\times S_0-V_0=\frac{1}{2}\times 2-V_0=1-V_0\text{이다.}$$

차익거래가 존재하지 않을 때 무위험 포트폴리오의 수익률은 무위험이자율이어야 한다. 시간 1에서의 포트폴리오 가치의 현재가치가 시간 0에서의 포트폴리오의 가치가 같아야 하므로

$$1-V_0=\frac{1}{1+r}(8\Delta_0-3)=\frac{4}{5}\times 1.$$

따라서 옵션의 가치는 $V_0=1.2$. 이것이 옵션가격이다.

일반적으로 오를 때와 내릴 때의 옵션의 가치를 각각 $V_1(H), V_1(T)$라 하면 시간 1에서의 포트폴리오의 가치는

$$-V_1(H)+\Delta_0 S_1(H) \text{ 또는 } -V_1(T)+\Delta_0 S_1(T)\text{가 된다.}$$

$-V_1(H)+\Delta_0 S_1(H) = -V_1(T)+\Delta_0 S_1(T)$이 되는 Δ_0를 선택하면

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H)-V_1(T)}{S_1(H)-S_1(T)} = \frac{V_1(H)-V_1(T)}{(u-d)S_0}.$$

따라서 시간 1에서의 포트폴리오 가치의 현재가치가 시간 0에서의 포트폴리오의 가치와 같게 하면

$$\Delta_0 S_0 - V_0 = \frac{1}{1+r}(-V_1(H)+\Delta_0 S_1(H)). \tag{2.1}$$

(2.1)식을 V_0에 관해 풀면

$$\begin{aligned}
V_0 &= \Delta_0\left(S_0 - \frac{uS_0}{1+r}\right) + \frac{V_1(H)}{1+r} = \Delta_0 S_0\left(1-\frac{u}{1+r}\right)+\frac{V_1(H)}{1+r} \\
&= \frac{V_1(H)-V_1(T)}{u-d}\cdot\frac{1+r-u}{1+r} - \frac{V_1(H)}{1+r} \\
&= \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}V_1(H)+\frac{u-r-1}{u-d}V_1(T)\right) \\
&= (1+r)^{-1}(p^* V_1(H)+q^* V_1(T)).
\end{aligned}$$

여기서 p^*와 q^*는 $p^* = \dfrac{1+r-d}{u-d}$, $q^* = \dfrac{u-r-1}{u-d}$이다.

$0<d<1+r<u$을 만족하면 $p^*>0$, $q^*>0$ 그리고 $p^*+q^*=1$.

$r=\dfrac{1}{4}$, $u=2$, $d=\dfrac{1}{2}$이면 위험 중립확률 p^*와 q^*는 $p^*=\dfrac{1}{2}=q^*$가 된다.

또한, $p^*u+dq^* = \dfrac{u(1+r-d)}{u-d}+\dfrac{d(u-r-1)}{u-d} = 1+r$이므로

$$\frac{1}{1+r}[p^*S_1(H)+q^*S_1(T)]=\frac{1}{1+r}[p^*uS_0+q^*dS_0]=\frac{1}{1+r}[p^*u+q^*d]S_0=S_0.$$

즉, $\boldsymbol{E}^*[S_1]=(1+r)S_0$. 위험중립가정하에서는 이는 시간 1에서의 주식가격의 기대치는 현재 주식가격이 무위험이자율로 증가한 값이다.

리스크중립인 확률 $\boldsymbol{Q}=(p^*,1-p^*)$로 만기일 $T=1$에서 옵션의 기댓값을 구해보면 앞면이 나왔을 때의 가치는 $3(=(8-5)^+)$이고 내렸을 때의 가치는 $0(=(2-5)^+)$이므로

$$\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Q}}[\text{만기일}\quad\text{옵션가치}]=3\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

가 된다.

$\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Q}}$[만기일 옵션가치]의 현재가치, 즉

$$(1+r)^{-1}\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Q}}[\text{만기일}\quad\text{옵션가치}]=\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=1.2$$

가 옵션가격이 된다.

이는 만기일에 옵션의 가치를 복제하는 포트폴리오의 초기자금 1.2와 일치함을 알 수 있다. 완성시장(complete market), 즉 파생상품의 완전 헤지가 가능한 시장에서는 리스크중립인 확률이 유일(제2 자산가격정리)하기 때문에 옵션가격은 유일하게 결정된다. 제1 자산가격 정리(The first fundamental theorem of asset pricing)란 위험중립확률이 존재하는 시장 모델에서는 차익거래가 존재하지 않는다는 것을 말한다.

리스크 측면에서 살펴보면 유로피언 콜옵션 매도자(seller)는 매입자(buyer)가 옵션을 행사($S_1(H)=8$)하게 되면 3(= 8 − 5)의 손실을 보게 되는 위험(risk)에 처하게 된다. 하지만 옵션 매입자의 가장 큰 손실은 지불한 옵

션가격이다. 옵션매도자는 초기자금 1.2(옵션가격)를 가지고 노출된 위험을 헤지해야 한다. 옵션매도자는 이 초기자금 1.2을 이용하여 만기일에 현금과 주식으로 옵션의 가치를 복제하는(replicate) 포트폴리오(X_t) 구성이 가능하다.

$V_t = (S_t - K)^+$라 하면 시간 t에서의 옵션의 가치가 된다. X_t는 시간 t에서의 옵션매도자가 구성한 포트폴리오의 가치다. $X_1(H) = V_1(H)$, $X_1(T) = V_1(T)$을 만족하는 초기자금 X_0와 거래일 $t=0$에서 사야 할 주식수 Δ_0를 결정하려 한다.

$$X_1(H) = V_1(H),\ X_1(T) = V_1(T)$$

$$\Leftrightarrow \quad 8\Delta_0 + \frac{5}{4}(X_0 - 4\Delta_0) = 3, \quad 2\Delta_0 + \frac{5}{4}(X_0 - 4\Delta_0) = 0.$$

위 식을 풀면 $X_0 = 1.2,\ \Delta_0 = \dfrac{1}{2}$이 된다.

초기자금 X_0와 거래일 $t=0$에서 산 주식수가 Δ_0라 하면 현금 $X_0 - \Delta_0 S_0$가 남는다. 시간 1에서 주식과 현금으로 구성되는 포트폴리오의 가치는

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = (1+r)X_0 + \Delta_0(S_1 - (1+r)S_0).$$

이제 $X_1(H) = V_1(H)$, $X_1(T) = V_1(T)$을 만족하는 초기자금 X_0와 Δ_0를 선택하고자 한다.

첫 번째 식 $X_1(H) = V_1(H)$로부터

$$X_0 + \Delta_0\left(\frac{1}{1+r} S_1(H) - S_0\right) = \frac{1}{1+r} V_1(H), \tag{2.2}$$

두 번째 식 $X_1(T) = V_1(T)$로부터

$$X_0+\Delta_0\left(\frac{1}{1+r}S_1(T)-S_0\right)=\frac{1}{1+r}V_1(T). \tag{2.3}$$

$p^*\times$(2.2) $+q^*(=1-p^*)\times$(2.3)하면

$$X_0+\Delta_0\left(\frac{1}{1+r}[p^*S_1(H)+q^*S_1(T)]-S_0\right)=\frac{1}{1+r}[p^*V_1(H)+q^*V_1(T)].$$

여기서 $$S_0=\frac{1}{1+r}[p^*S_1(H)+q^*S_1(T)]\quad\left(\equiv\frac{1}{1+r}\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Q}^*}[S_1]\right) \tag{2.4}$$

을 만족하는 p^*을 선택하면

$$X_0=\frac{1}{1+r}[p^*V_1(H)+q^*V_1(T)]\equiv\frac{1}{1+r}E^{Q^*}[V_1]. \tag{2.5}$$

(2.4)식으로 부터

$$S_0=\frac{1}{1+r}[p^*uS_0+q^*dS_0]=\frac{S_0}{1+r}[(u-d)p^*+d] \text{이므로}$$

$$p^*=\frac{1+r-d}{u-d},\quad q^*=\frac{u-1-r}{u-d}.$$

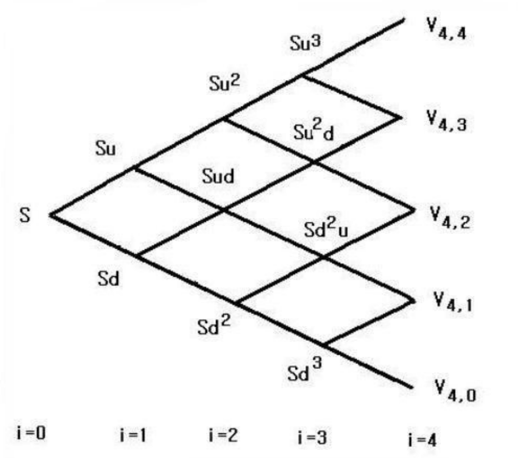
또한 (2.2)-(2.3)하면 사야할 주식수 Δ_0는

$$\Delta_0=\frac{V_1(H)-V_1(T)}{S_1(H)-S_1(T)}.$$

(2.5)의 현금만 있으면 완전 헤지가 가능하므로 이득이 V_1인 옵션의 가격은

$V_0=\frac{1}{1+r}[p^*V_1(H)+q^*V_1(T)]$ 이어야 한다.

(2) 다중기간 이항모형



$$V_{3,j} = \frac{1}{1+r}\left(p^* V_{4,j} + q^* V_{4,j+1}\right),$$

$$j = 0, 1, \ldots, 3$$

위험중립세상에서 다중기간 이항모형에서 시간 n에서 던진 동전의 결과가 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$이고 그때의 자산가격이 $S_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)$이라 하면 위험중립확률(risk-neutral probability) p^*, q^*는 다음을 만족하는 확률을 선택한다.

$$S_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n) = \frac{1}{1+r}[p^* S_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H) + q^* S_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n T)].$$

여기서 $p^* = \dfrac{1+r-d}{u-d}$, $q^* = \dfrac{u-1-r}{u-d}$을 만족한다.

표기를 간단히 하기 위해서

$\boldsymbol{E}_n^*[S_{n+1}](\omega_1\omega_2\cdots\omega_n) = p^* S_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H) + q^* S_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n T)$

라 정의하면

$$S_n = \boldsymbol{E}_n^*[S_{n+1}]. \tag{2.6}$$

$\boldsymbol{E}_n^*[S_{n+1}]$은 시간 n까지의 정보하에 S_{n+1}의 조건부 확률을 의미한다.

(2.6)식의 양변을 $(1+r)^n$으로 나누면

$$\frac{S_n}{(1+r)^n} = \boldsymbol{E}_n^* \left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right].$$

따라서 위험중립 세상에서는 시간 n까지의 정보만을 가지고 시간 $n+1$에서 할인된 주식가격의 기댓값은 시간 n에서의 할인된 주식가격임을 나타낸다.

2. 블랙-숄즈 모형

옵션가격 결정 모형 중 가장 잘 알려지고 큰 비중을 차지하는 것은 1973년 블랙(Black Fischer)과 숄즈(Myron Scholes)에 의해 발표된 블랙-숄즈 옵션가격결정이론이라고 할 수 있다. 이 공식은 발표 후 금융상품 분야의 발전에 큰 공헌을 하였다. 그 이전의 연구가 객관적이지 못한 투입변수에 의해 결정되는 모형을 제시하여 실제상황에서 응용성이 없는 모형이었던 것과 달리, 블랙-숄즈 공식은 객관적인 독립변수를 사용한 모형을 제시함으로써 실제 시장에서 이용할 수 있는 유용한 결과를 도출할 수 있게 되였다.

블랙-숄즈의 옵션가격결정모형은 기초자산가격, 잔존만기, 행사가격, 변동성 등의 다섯 가지 변수에 의해 정형화 되었다. 이처럼 이 모델은 표준편차를 제외한 네 개의 결정변수에 대해 최소한으로 의지하고 있는 장점이 있어 학계나 투자자들에게 아직까지도 그 인기를 유지하고 있다. 다시 말해서 변동성(표준편차)을 제외한 네 개의 변수의 경우는 직접적으로 관측이 가능할 때 변동성(표준편차)의 추정이 가장 중요하다 하겠다.

옵션가격은 기초자산의 가격과 시간의 함수형태로 나타낼 수 있는데, 기초자산의 가격이 어떤 구체적인 확률적 과정을 따른다고 가정함으로써 옵션가격의 변화를 나타내는 식을 도출할 수 있다. 블랙-숄즈 모형의 출발점은 장래주가는 불확실 하지만 연속적으로만 변화한다면 기초자산의 매입과 콜옵션 매도포지션을 적절하게 혼합하여 무위험 포트폴리오를 만들 수 있고 그것의 수익률은 무위험시장 이자율과 같을 것이라는 이론이다.

파생상품의 가격결정문제를 논하기 위하여 기초자산과 무위험자산의 움직임에 대한 가정을 포함하여 다음과 같은 몇 가지 가정을 한다.

[가정1] 기초자산의 가격은 대수정규분포하며 기하학적 브라운운동 (Geometric Brownian Motion)을 따른다.

[가정2] 기초자산의 배당금 지급은 없다. 배당금 지급이 미리 알려져 있는 경우 이 가정은 완화될 수 있다.

[가정3] 두 개의 자산들은 연속적으로 거래가 가능하다.

[가정4] 거래비용, 세금, 공매도(Short-selling)에 대한 제약이 없다.

[가정5] 차익거래 기회가 존재하지 않는다. 이는 무위험포트폴리오의 수익률은 무위험 이자율이어야 한다는 것을 의미한다.

[가정6] 기초자산의 가격과 금리의 변동가능성은 옵션의 잔존 기간 동안 일정하다.

옵션을 평가하는데 쓰인 블랙-숄즈 옵션가격결정모형을 식으로 나타내면 다음과 같다. S, K, σ, r을 각각 기초자산가격, 옵션의 행사가격, 기초자산의 변동성, 무위험이자율이라 하고, $V=V(S,t)$를 옵션가격이라 하면

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0.$$

V를 콜옵션가격이라 하면 초기값은 $V(S_T, T) = (S_T - K)^+$이고 그 해는

$$V(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2).$$

여기서 $N(x)$는 표준정규분포의 누적분포함수이고 d_1은

$$d_1 = \left\{ \ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right\} / \sigma \sqrt{\tau},\ d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}, \quad \tau = T - t.$$

만약 V가 풋옵션의 가격이라 하면 초기값은 $V(S_T, T) = (K - S_T)^+$이고 그 해는

$$V(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1).$$

[가정1]에서 기초자산(S)이 기하학적 브라운운동(Geometric Brownian Motion)을 따른다는 가정은 기초자산의 가격 변화가 다음과 같은 확률과정(Stochastic Process)을 따른다는 것을 의미한다.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{2.7}$$

여기서 μ는 기초자산가격의 추세 변화율, σ는 기초자산가격변화율의 표준편차를 나타내며, W는 위너과정(Wiener Process)으로서 다음과 같은 특성을 갖는다.

$$dW_t \approx \epsilon \sqrt{dt}$$

ϵ은 평균이 0이고 분산이 1인 표준정규분포이다. 즉 dW_t는 평균이 0이고 분산이 dt인 정규분포를 가지며, 시간에 대해 독립적이다. 위 식에 의하면 기초자산의 움직임이 결정적 요소와 확률적 요소로 구성됨을 알 수 있다.블랙-숄즈 모형이 가장 매력적인 점은 옵션가격결정을 위한 변수가 기초자산의 변동성을 제외하고는 시장에서 쉽게 구할 수 있다는 점이다. 그러나 실제 시장에서는 동일한 기초자산을 가진 옵션이라도 만기와 행사가격에 따라 변동성이 변하기 때문에 변동성을 측정하는데 문제가 된다. 특히 블랙-

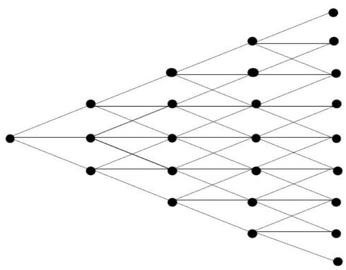
숄즈 모형에서는 기하학적 브라운 운동을 따른다고 가정하는데 이러한 동일한 기초자산을 가지는 옵션이 만기나 행사가격에 따라 가격이 다르다는 점은 실제로는 가격이 기하학적 브라운 운동을 따르지 않는다고 할 수 있다

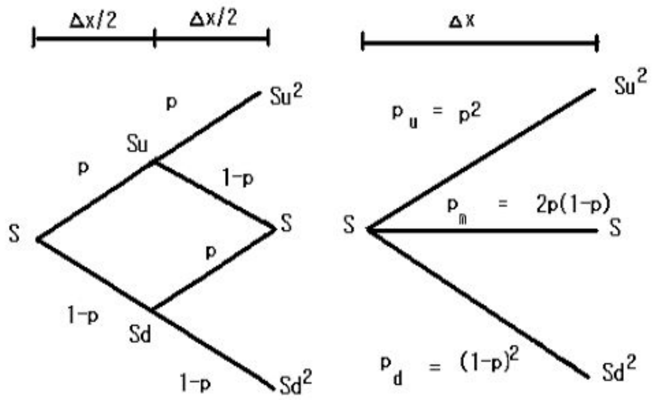
기하학적 브라운 운동은 블랙-숄즈 옵션가격결정모형이나 확장된 모형의 가장 핵심적인 내용이다. 그러나 실제시장의 주가수익률은 정규분포를 가지지 않는다. 이는 주가수익률이 평균치에 가깝거나 변동이 클 가능성이 기하학적 브라운 운동이 제시하는 것보다 더 크며, 주가 수익률 분포의 끝이 정규분포보다 두껍다는 것을 의미한다.

블랙-숄즈 모형은 주가변동이 식(2.7)를 따른다고 할 때 주식매입과 콜옵션 매도를 적절하게 결합한 무위험 포트폴리오의 가치 변화식으로부터 옵션가치변동에 대한 미분방정식을 도출하여 얻어진 것이다. 이 미분방적식의 해석적 해를 얻기 위해서 위와 같은 가정을 사용했는데 이것의 블랙-숄즈 모형의 단점이 되기도 한다. 예를 들면 주가 움직임이 연속적이라는 가정은 주가가 갑작스런 폭락이나 폭등을 할 경우 모형을 적용할 수 없다. 또한 변동성이 일정하다는 가정은 시간이 경과함에 따라 변동성이 커지거나 작아지는 경우를 고려하지 않은 것이다. 또 무위험수익률은 옵션만기까지 일정하다고 가정하는 등 여러 가지 약점이 있다.

이와 같은 블랙-숄즈의 옵션가격결정모형은 가정에 있어서 제약성이 존재함에도 불구하고 옵션가격을 다섯 개 변수에 의해 정형화하였다는 점에서 의외의 결과를 찾을 수 있다. 위의 모형에서 표준편차를 제외한 네 개 변수의 경우는 직접적으로 관찰이 가능하며 결국 표준편차의 추정만이 가장 중요한 과제가 된다.

3. 삼항나무 모형





BTM TTM

< 그림 2.1 CRR-BTM과 CRR-TTM의 관계 >

삼항나무 모형(TTM)은 이항나무 모형(BTM)의 확장이며 개념적으로 비슷하다. 현재 자산가격이 S일 때 Δt기간 후의 자산가격이 S_u, S_m, S_d라 하면 $S_u = Su$, $S_m = Sq$, $S_d = Sd$라 가정한다. 보통 $0 < d < q < u$의 조건을 만족한다. 시간 Δt에서의 자산가격이 Su일 때의 확률은 p_u, 자산가격이 Sq일 때의 확률은 p_q, 자산가격이 Sd일 때의 확률은 p_d라 한다. 단지 세 가지 경

우만 있기 때문에 확률들은 다음을 만족해야 한다.

$$p_u + p_m + p_d = 1,\ 0 \le p_u, p_m, p_d \le 1$$

자산가격이 대수정규분포(lognormal distribution)를 따른다고 가정하면 평균과 분산은 각각

$$E(S_{\Delta t}) = Se^{r\Delta t}, \quad Var(S_{\Delta t}) = S^2 e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1).$$

따라서

$$S_u p_u + S_m p_m + S_d p_d = Se^{r\Delta t} \quad \Rightarrow\ up_u + qp_m + dp_d = e^{r\Delta t}. \tag{3.1}$$

$$S_u^2 p_u + S_m^2 p_m + S_d^2 p_d - \left(Se^{r\Delta t}\right)^2 = S^2 e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)$$

$$\Rightarrow\ u^2 p_u + q^2 p_m + d^2 p_d = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}. \tag{3.2}$$

여섯 미지수에 세 식이 존재한다. 조건 $q=1,\ u=1/d$를 추가하더라도 식의 개수보다 미지수의 개수가 더 많다. 이는 경제적 의미가 있는 삼항나무 모형이 많이 있을 수 있다는 것을 의미한다. 삼항나무 모형은 보일(Phelim Boyle)에 의해 처음 소개되었고 이항나무 모형보다 빠르게 수렴한다. CRR 이항나무 모형에서 2단계 시간 단계를 적용하면 삼항나무 모형의 1단계 모델을 만들 수 있다.

<그림 2.1>로부터 삼항나무 모형의 오름 요소 u, 내림요소 d는 각각

$$u = \left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}}\right)^2 = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}},\ q=1,\ d = \left(e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}\right)^2 = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} \text{ 이며,}$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\Delta t/2}}{e^{\sigma\Delta t/2} - e^{-\sigma\Delta t/2}},\ p_u = p^2,\ p_m = 2p(1-p),\ p_d = (1-p)^2.$$

CRR 삼항나무 모형의 1단계(시간 간격은 Δt)는 이항나무 모형의 2단계(시간 간격은 $\Delta t/2$)와 같다. 그러므로 삼항나무 모형은 이항나무 모형의 시간 간격의 수보다 그 반만 함으로써 같은 정밀성(accuracy)을 갖게 되고 같은

수의 시간 간격을 사용할 때는 삼항나무 모형의 정밀성은 증가한다.

테일러 전개를 하면 p_u, p_d는 각각

$$p_u = \frac{1}{4} + \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t),$$

$$p_d = \frac{1}{4} - \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t)$$

가 되고 $p_m = \frac{1}{2} + O(\Delta t)$이 된다.

(부록.11)에서

$$1 - \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{2} \text{ 이라 두면 } \quad \frac{\sigma^2 \Delta t}{2\Delta x^2} = \frac{1}{4} \text{ 이고 } \quad \frac{\Delta t}{2\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{2}\,\sigma} \text{ 이므로}$$

(부록.11)은

$$\begin{aligned} V_j^n &= \frac{1}{1+r\Delta t}\left[\frac{1}{2}V_j^{n+1} + \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\right)\frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)V_{j+1}^{n+1}\right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\right)\frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)V_{j-1}^{n+1}\right] \\ &= \frac{1}{1+r\Delta t}\left[p_u V_{j+1}^{n+1} + p_m V_j^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}\right] \qquad (3.3) \\ &= e^{-r\Delta t}\left[p_u V_{j+1}^{n+1} + p_m V_j^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}\right] + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

가 된다.

$P_{\Delta t, \Delta S}\phi$와 $F_{\Delta t}\phi(S,t)$를

$$P_{\Delta t, \Delta S}\phi = \frac{F_{\Delta t}\phi(S,t) - \phi(S,t)}{\Delta t},$$

$F_{\Delta t}\phi(S,t) = e^{-r\Delta t}[p_u\phi(Su,t+\Delta t) + p_m\phi(S,t+\Delta t) + p_d\phi(Sd,t+\Delta t)]$라 두고 테일러 정리를 이용해 계산하면 삼항나무 모형은 $P_{\Delta t,\Delta S}\phi = P\phi + O(\Delta t^{3/2})$가 된다. 따라서 삼항나무 모형 (3.3)은 $O(\Delta t^2)$의 오차로 유한차분식 (부록.12)과 대등하고(equivalent) 또한 삼항나무 모형 (3.3)은 그에 대응하는 포물선 편미분 방정식 (부록.7)과 일치성이 있다.

$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}} = 1/d$를 만족하는 또 다른 삼항나무 모델을 만들어 보자. 식(3.2)과 (3.1)로부터

$$
\begin{aligned}
e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} &= u^2p_u + q^2p_m + d^2p_d \\
&= u(up_u + dp_d) - udp_d + p_m + d(up_u + dp_d) - udp_u \\
&= (u+d)(up_u + dp_d) - ud(p_u + p_d) + p_m \\
&= (u+d)(e^{r\Delta t} - p_m) - (1-p_m) + p_m.
\end{aligned}
$$

위의 식을 p_m에 관해 풀면 $p_m = \frac{2}{3} + O(\Delta t)$가 된다. p_m을 (3.1)와 (3.2)에 대입하고 p_u, p_d에 관해 풀고 테일러 전개를 하면 p_u, p_d는 각각

$$p_u = \frac{1}{6} + \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{3}\,\sigma}\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t), \tag{3.4}$$

$$p_d = \frac{1}{6} - \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{3}\,\sigma}\sqrt{\Delta t} + O(\Delta t) \tag{3.5}$$

가 된다.

(부록.11)에서

$$1 - \frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{2}{3} \text{이라 두면} \quad \frac{\sigma^2\Delta t}{2\Delta x^2} = \frac{1}{6} \text{이고} \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{3}\,\sigma} \text{이므로}$$

(부록.11)은

$$V_j^n = \frac{1}{1+r\Delta t}\left[\frac{2}{3}V_j^{n+1} + \left(\frac{1}{6} + \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\right)\frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{3}\,\sigma}\right)V_{j+1}^{n+1}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{6} - \left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\right)\frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{3}\,\sigma}\right)V_{j-1}^{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{1+r\Delta t}\left[p_u V_{j+1}^{n+1} + p_m V_j^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}\right] \tag{3.6}$$

$$= e^{-r\Delta t}\left[p_u V_{j+1}^{n+1} + p_m V_j^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}\right] + O(\Delta t^2)$$ 이 된다.

이제 (3.6)의 증폭 요소(amplification factor)를 계산해 보자. (3.6)에 푸리에 역변환 공식

$$V_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ijh\theta}\,\hat{V}^n(\theta)d\theta, \quad h = \Delta x$$

을 적용하면

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ijh\theta}\,\hat{V}^n(\theta)d\theta = \frac{1}{1+\Delta t}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(j+1)h\theta}\,\hat{V}^n(\theta)d\theta\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ijh\theta}\,\hat{V}^{n+1}(\theta)d\theta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(j-1)h\theta}\,\hat{V}^{n+1}(\theta)d\theta\right]. \tag{3.7}$$

(3.7)의 양변의 피적분함수가 같아야 하므로

$$\widehat{V^n}(\theta) = (1+\Delta t)^{-1}\left(p_u e^{ih\theta}\,\hat{V}^{n+1}(\theta) + p_m\,\hat{V}^{n+1}(\theta) + p_d e^{-ih\theta}\,\hat{V}^{n+1}(\theta)\right)$$

$$= (1+\Delta t)^{-1}\left(p_u e^{ih\theta} + p_m + p_d e^{-ih\theta}\right)\hat{V}^{n+1}(\theta).$$

$g(h\theta) = (1+\Delta t)^{-1}\left(p_u e^{ih\theta} + p_m + p_d e^{-ih\theta}\right)$라 두고 절대값의 제곱을 계산하면

$|g(h\theta)|^2 = (1+\Delta t)^{-2}\left(p_u^2 + p_d^2 + 2p_u p_d(2\cos^2(h\theta) - 1) + 2p_m(p_u + p_d)\cos(h\theta)\right).$

p_u, p_d가 (3.4)과 (3.5)을 각각

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{6}, \qquad p_d = \frac{1}{6} - \frac{\alpha\sqrt{\Delta t}}{6}, \qquad \alpha = \frac{6}{\sqrt{3}\,\sigma}\left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\right)$$

이라 두면

$$|g(h\theta)|^2 = (1+\Delta t)^{-2}\left|\frac{1+\alpha^2\Delta t}{36}+\frac{2(1+\alpha^2\Delta t)}{36}(2\cos^2(h\theta)-1)+\frac{4}{9}\cos(\mathrm{h}\theta)\right|.$$

만약 $\Delta t \to 0$일 때

$$|g(h\theta)|^2 \to \left|\frac{1}{36}+\frac{2}{36}(2\cos^2(h\theta)-1)+\frac{4}{9}\cos(\mathrm{h}\theta)\right| \le \frac{19}{36} < 1.$$

따라서 이 삼항나무 모형은 적당히 작은 Δt를 잡을 때 작은 가장 큰 증폭요소가 h, θ에 관계없이 19/36이므로 안정적이다.

또한 p_u, p_d가 각각

$$p_u = \frac{1}{4}+\frac{\alpha}{4}\sqrt{\Delta t}, \qquad p_d = \frac{1}{4}-\frac{\alpha}{4}\sqrt{\Delta t}, \qquad \alpha = \frac{4}{\sqrt{2}\,\sigma}\left(\frac{r}{2}-\frac{\sigma^2}{4}\right)$$

인 경우의 삼항나무 모형은 적당히 작은 Δt를 잡을 때 가장 큰 증폭요소가 h, θ에 관계없이

$$\lim_{\Delta t \to 0}|g(h\theta)|^2 = \left|\frac{1}{16}+\frac{2}{16}(2\cos^2(h\theta)-1)+\frac{1}{2}\cos(\mathrm{h}\theta)\right| \le \frac{11}{16}$$

이므로 안정적이다[6, 7, 13, 14, 20, 21, 27].

제 3 절 이색옵션(exotic option)

최초의 장애옵션(barrier option)이 1960년대에 도입되었을 때에는 ‘부티크 옵션(boutique option)’ 혹은 ‘디자이너 옵션(designer option)’이라 했다. 이색옵션(exotic option)이란 말이 사용된 것은 1990년에 루빈스타인(Mark Rubinstein)이 쓴 “Exotic Options”라는 모노그라프에서 시작되었다. 여기서 루빈스타인은 그 당시의 부티크 옵션에 대해 블랙-숄즈 모형에 근거하여 가치평가를 시도하였고, 그 이전에도 이색옵션에 대한 가격모형이 발표되었다. 다운앤아웃(down-and-out) 콜옵션이 1973년에 발표되었고[28], 중첩옵션(compound option)이 1979년에[26], 룩백옵션(lookback option)이 1979년에[8], 그리고 평균가격옵션이 1986년에 발표[22]되었다.

1973년 이전의 옵션은 모두 장외옵션이었다. 옵션거래소가 등장한 이후 장내 옵션거래가 1980년대 후반까지 급속히 발전하였지만, 장외옵션도 계속적으로 발전하였다. 투자자들은 개별적인 용도에 맞춤식으로 제공되는 이색옵션(exotic option)을 선호한다. 게다가 수학자나 물리학자 등 과학자들이 금융시장에 몰려들기 시작하면서 금융공학이 더욱 발전하였고, 특히 새로운 이색옵션이 속속 출현하게 되었다.

일반적인 옵션을 이용하더라도 다양한 형태의 위험-손익구조를 합성해낼 수 있지만, 그 비용이 비싸고, 보다 정교하고 복잡한 형태의 위험-손익구조가 요청되면서 이색옵션의 수요가 증가하였다. 이색옵션과 같은 상품들은 일반적인 옵션을 합성하는 것보다 상대적으로 저렴할 뿐 아니라 필요에 따라 매우 탄력적으로 조절될 수 있다.

1990년대 이후 장외파생상품 시장에서의 이색옵션에 대한 거래는 주로

평균가격옵션이나 장애옵션(barrier option), 바스켓 옵션(basket option), 디지털 옵션(digital option) 및 레인보우 옵션(rainbow option) 등에 집중되어 있다. 이러한 이색옵션들은 상품이나 통화, 개별주식과 주가지수, 이자율, 에너지, 채권 등의 거래에 활용된다. 상품이나 에너지 시장에서는 원유나 천연가스, 귀금속, 기초금속 등에 대하여 평균가격옵션이나 장애옵션,(barrier option), 바스켓 옵션(basket option)이 많이 이용된다. 또한 2개의 서로 다른 지수에 대한 스프레드 옵션이 채권이나 금리관련 상품에 많이 활용된다. 그 외에도 주식이나 채권 등에 내재된 옵션에 이색옵션이 활용되기도 한다.

이색옵션은 그 특성에 따라 다양한 종류가 있지만, 대체로 다음과 같이 분류할 수 있다.

이색옵션의 종류	특성
시간종속옵션	옵션의 가치가 시간에 따라 달라지는 옵션
가격경로 종속옵션	옵션의 만기가치가 옵션만기일의 대상물 가격수준뿐 아니라 옵션계약기간 동안의 대상물 가격의 변화과정에 의해서도 영향을 받는 옵션
다중 대상자산 옵션	옵션의 대상물이 하나가 아닌 복

	수로서 옵션의 가치가 복수의 대상물의 가격수준과 대상물 간의 상관관계에 의해 결정됨
변형된 계약조건	일반적인 옵션의 거래 조건 중 어떤 특정 조건을 변형시킨 옵션
중첩옵션(compound option)	옵션에 대한 옵션

< 표 3.1 이색옵션의 종류와 특성 >

1. 시간종속 옵션

모든 옵션들이 시간가치를 가지고 있지만, 다른 것에 비해 시간에 더욱 민감하거나 시간에 종속적인 옵션이 있다. 예를 들면 유럽식 옵션은 행사시기가 고정되어 있는 반면에, 미국식 옵션은 만기일 이전에 아무 때나 행사될 수 있어 시간과 밀접한 관련을 가진다. 이처럼 옵션 행사가 시간에 어떻게 종속되어 있는가에 따라 구분하는 유럽식 혹은 미국식 옵션 외에도 다른 방식으로 시간에 종속된 옵션이 있다.

(1) 선택자옵션(chooser option)

이 옵션은 매입시점에서는 콜인지 풋인지를 정하지 않고, 이를 매입 후 일정시점(옵션 만료 이전 또는 만료시)에 이르러 매입자가 유리한 쪽으로 선택지정을 할 수 있도록 한다. 참고로 이 일정시점은 선택일(choice date)이라 한다.

선택자 옵션에서는 구성하는 콜과 풋간에 행사가격, 만료일, 행사유형 등이 모두 같은 단순한 형태부터 이들 조건 중 한 가지 이상이 다른 복잡한 형태까지도 고려할 수 있다.

1) 단순 선택자옵션

단순 선택자옵션(simple chooser options)은 옵션 매수자가 장래의 일정 시점에 서로 동일한 행사가격과 만기를 가진 평범한 콜옵션과 풋옵션 중에 하나를 선택할 수 있다. 따라서 단순 선택자옵션의 가치는

$$\text{단순 선택자 옵션의 가치} = \max[C(X,\ T-t),\ \ P(X,\ T-t):\ t]$$

이다. 여기서 T는 두 옵션의 잔존만기이고, t는 풋과 콜에 대한 선택권이 행사되는 시점이다. $C(X,\ T-t)$와 $P(X,\ T-t)$는 각기 행사가격이 X이고 잔존만기가 $T-t$인 콜옵션과 풋옵션이다.

2) 복합 선택자옵션

단순 선택자옵션과는 대조적으로 복합 선택자옵션(complex chooser options)에서는 그 매수자에게 행사가격과 잔존만기가 서로 다른 콜옵션

과 풋옵션 중 하나를 선택하도록 한다.

따라서

$$\text{복합 선택자 옵션의 가치} = \max[C(X_1,\ T_1 - t),\ P(X_2,\ T_2 - t):\ t]$$

여기서, X_1과 T_1은 콜옵션의 행사가격 및 만기일이고, X_2와 T_2는 풋옵션의 행사가격과 만기일이다.

선택자옵션의 대표적인 사용자는 어떤 기초물에 대하여 미래 일정시점에 상당한 폭의 가격변동이 일어날 것을 예상하는 경제주체로서 그 중도기간 동안의 가격변동에는 무관심할 수 있으면 된다.

투자효과면에서 선택자옵션의 매입은 스트래들 매입과 유사하다. 그러나 선택자옵션의 장점은 스트래들 매입자는 콜과 풋을 동시에 구입해야 하지만 선택자옵션 매입자는 그런 구별 없이 한 종류만 매입하면 되기 때문에 투자비용면에서는 선택자옵션이 상태적으로 저렴하다는 것이다. 반면에 선택자옵션의 단점은 유동성이 낮은 장외상품으로서 옵션 만료 전에는 기초물 가격이 높은 변동성을 보여 옵션가치가 크게 높아져도 중도처분이 쉽지 않다는 것이다.

(2) 선도옵션(forward option) 또는 지연옵션(delayed option)

선도옵션(forward options)또는 지연옵션(delayed options)은 옵션 가격 지불은 현재에 하지만 옵션 계약의 효력발생 여부는 미래의 일정시점으

로 연기하는 형태이다. 이때 행사가격 설정도 효력발생 시점(grant date, 수여일)에 하면서 그 수준은 대개 그 시점에서 형성되는 기초물 가격으로 한다.

다른 시각에서 보면 선도옵션은 앞으로 살펴볼 중첩옵션의 일종으로 볼 수도 있어서 이 경우에 행사가격이 0이고, 기초옵션의 행사가격은 중첩옵션이 행사되는 시점에 결정되는 형태로 볼 수 있다.

선도옵션은 중첩옵션의 일종으로도 볼 수 있다는 점에서 기본적인 용도는 중첩옵션의 용도와 유사하다. 여기서는 선도옵션 특유의 활용방안 두 가지를 살펴보자.

하나는 간접투자방식인 투자신탁상품 중 보장형 펀드의 운용시이다. 보장형 펀드 운용을 위해 옵션을 사용할 때, 일반적인 옵션은 사전에 정한 한 기간 동안만 효과를 보인다. 그런데 펀드는 원래의 약정운용기간 종료 후에도 재운용이 재약정되는 경우가 적지 않은데, 이 경우에 원래의 위탁고객 중 어느 정도가 재운용을 원할지를 사전에 알 수는 없다. 이때 일반적인 옵션 대신에 선도옵션을 쓰면 이 문제에 대응할 수 있다.

선도옵션의 다른 용도는 종업원 장려용 주식옵션(incentive stock option)에 활용하는 것이다. 즉, 이 주식옵션의 발효시점을 미래 일정시점으로 미루어 주식옵션 보유 종업원들의 근속을 유도하는 것이다.

선도옵션의 가치를 살펴보자.

먼저, 선도옵션이 수여일(t)에 가지는 가치를 고려해 보자. 구체적으로는 만료시점(T) 이전으로서 기초물가격(S_t)이 동시에 행사가격이 되는 등가격상태의 선도 콜옵션의 가치를 $C(S_t, S_t, T)$라 하자. 이때, 다른 조건은

같고 기초물가격과 행사가격만 1로 바꿔서 가치를 $C(1, 1, T)$로 표시할 수 있는 선도 콜옵션이 있다면 다음과 같이 원래의 선도 콜옵션 1계약은 둘째 선도 콜옵션 S_t계약과 같은 가치가 된다.

$$C(S_t, S_t, T) = S_t C(1, 1, T)$$

이제, 선도옵션의 현재가치는 위의 수여일 가치 $S_t C(1, 1, T)$를 현재시점으로 환산하면 얻어진다.

변수 S_t의 현재가치는 바로 기초물의 현재시가 S이다. 단, 현재부터 수여일까지 배당 등 기초물에서 수입발생(수익률 q)이 예상될 경우에는 예상수익률만큼 할인한 값 $e^{-qt}S$가 된다. 그런데 $C(1, 1, T)$는 변수가 아닌 상수이므로 이 값의 현재가치는 변함이 없다. 그러므로 $S_t C(S_t, S_t, T)$의 현재가치는 기초물 발생 예상수입까지 고려하여 다음과 같아진다.

$$e^{-qt} S C(1, 1, T)$$

위의 식 $C(S_t, S_t, T) = S_t C(1, 1, T)$과 마찬가지로, 이 $e^{-qt} S C(1, 1, T)$ 식도 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$e^{-qt} C(S, S, T)$$

그러므로 선도옵션의 가치는 기본적으로 일반적인 옵션의 가치와 일치하며 다만, 기초물에서 배당 같은 수입이 예상될 때에는 그만큼 할인된 가치가 된다는 것을 알 수 있다.

그 밖에 래칫옵션이나 샤우트 옵션도 시간종속 옵션으로 분류될 수 있다.

2. 경로종속옵션(path-dependent option)

일반적인 유럽식 옵션의 경우 옵션만기일의 내재가치는 옵션만기일의 현물가격에 의해 정해진다. 즉, 만기일에 대상물의 가격이 얼마인가가 문제가 되고, 그동안 대상물의 가격이 어떻게 움직여왔는가는 문제가 되지 않는다. 이와는 다르게 경로종속옵션(path-dependent option)은 대상자산의 가격이 옵션 계약기간 동안 어떠한 가격경로로 움직여 왔는가에 의해 만기 시 결제금액이 정해진다. 대표적인 경로종속 옵션에는 평균옵션(average option 혹은 아시안옵션 asian option), 장애옵션(barrier option), 룩백옵션(lookback option), 래더옵션(ladder option), 클리켓옵션(cliquet option), 샤우트옵션(shout option), 캡(cap)과 플로어(floor)가 있다.

(1) 평균옵션(average option) 혹은 아시안옵션(asian option)

일반적인 옵션의 만기 가치는 만기 때의 현물가격과 행사가격의 차이로 결정된다. 그렇지만, 평균옵션(average option) 또는 아시안 옵션(asian option)[1]은 행사시나 만료시 수익결정에서 그 시점의 기초물가격과 행사가격 양자 중에서 하나를 계약시 설정한 일정기간 동안(옵션 유효기간 내에)에 움직인 기초물가격의 평균값으로 결정한다. 평균가격은 단순 옵션기간 동안의 대상물 가격에 대한 산술평균이나 가중평균을 사용한다.

---

1) '아시아'라는 이름은 아시안옵션의 최초 출처가 Bankers Trust의 일본 동경사무소였던 데에서 유래되었다.

즉,

$$\text{표준 콜옵션의 만기가치} = \max[S_T - X,\ 0]$$

$$\text{평균 콜옵션의 만기가치} = \max[S_{AVG} - X,\ 0]$$

이다. 여기서 S_T는 만기 때의 현물가격이고, S_{AVG}는 옵션 계약기간 동안의 현물가격의 평균값이다.

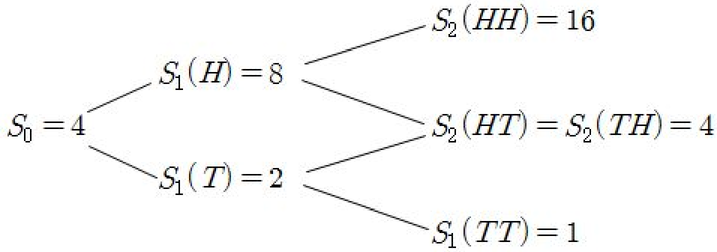
평균옵션에서는 특정한 날짜들의 가격에 보다 큰 가중치가 부여되기도 한다. 평균가격의 변동성이 가격의 변동성보다 항상 작기 때문에 평균옵션의 프리미엄은 그에 상응하는 일반적인 옵션의 프리미엄보다 작다.

평균옵션의 대표적인 용도는 일정기간 중 빈번한 또는 주기적 현금흐름이 발생할 때 또는 현금흐름의 발생 여부와 그 시기가 불확실할 때, 그 현금흐름이 가격(금리, 환율 등)변동 위험에 노출되어 있는 경제주체가 이를 헤지하기 위한 것이다.

두 가지 예를 들어보겠다. 하나는 어떤 수출업자가 수출대금을 외화로 1년간 여러 번에 걸쳐 분할 수금할 예정이며 수금할 때마다 즉시 원화로 환전할 예정일 때, 수출업자가 환율 대상으로 1년 만기의 평균옵션을 이용하면 환율이 수금할 때마다 크게 달라질 위험을 줄여 평균환율을 보장받을 수 있다는 것이다. 다른 예는 한 기업이 1년간 자금차입 가능성과 그 시기 등에 대해 자신이 없을 때, 예상 금융비용도 불확실해지는데, 이때 1년 만기로 금리 대상 평균옵션을 이용하면 금리의 급격한 변동위험을 줄일 수 있다는 것이다.

< 평균옵션(아시안옵션) 가치계산의 예 >

$S_0 = 4,\ u = 2,\ d = \frac{1}{2},\ r = \frac{1}{4}$인 이항모형을 바탕으로 알아보자.



그러면 위험중립확률은 $\tilde{p} = \frac{1}{2} = \tilde{q}$가 된다. 행사가격이 $K = 4$라 하고 $n = 0,1,2$에 대해 시간 0와 시간 n사이의 주식가격의 합을 $Y_n = \sum_{k=0}^{n} S_k$라 하자. 그러면 시간 2에서 옵션 이득이

$$v_2(s,y) = \left(\frac{1}{3}y - 4\right)^+$$

인 평균옵션의 가격 V_0와 옵션판매자의 위험을 헤지하기 위해서 사야 할 주식수 Δ_0를 결정해 보자. 이 옵션은 옵션이득이 만기일의 주식가격보다는 주식의 평균가격에 따라 결정된다. $S_n = s, Y_n = y$일 때 시간 n에서의 옵션가격을 $v_n(s,y)$로 나타낸다고 하자.

상황 $w_1 \cdots w_n$에서 옵션가격 v_n은

$$v_n(w_1 \cdots w_n) = \frac{1}{1+r}\left\{\tilde{p}v_{n+1}(w_1 \cdots w_n H) + \tilde{p}v_{n+1}(w_1 \cdots w_n T)\right\}$$이다.

시간 n에서 주식가격이 $S_n(w_1 \cdots w_n) = s$이고 n까지의 주식가격의 합이 $Y_n = y$이면 시간 $n+1$에서의 주식가격은

$$S_{n+1}(w_1 \cdots w_n H) = uS_n(w_1 \cdots w_n) = us,$$

$$S_{n+1}(w_1 \cdots w_n T) = dS_n(w_1 \cdots w_n) = ds$$

이고 $Y_{n+1}(w_1 \cdots w_n H) = \sum_{k=0}^{n} S_k(w_1 \cdots w_k) + S_{n+1}(w_1 \cdots w_n H) = y + us,$

$$Y_{n+1}(w_1 \cdots w_n T) = \sum_{k=0}^{n} S_k(w_1 \cdots w_k) + S_{n+1}(w_1 \cdots w_n T) = y + ds$$ 이다.

따라서 $v_n(s,y) = \frac{1}{1+r}\left\{\tilde{p}v_{n+1}(us, y+us) + \tilde{p}v_{n+1}(ds, y+ds)\right\}.$

$S_2(HH) = 16$일 때 $y = 4+8+16 = 28$이므로

$$v_2(16,28) = \left(\frac{1}{3}y - 4\right)^+ = \frac{28}{3} - 4 = \frac{16}{3},$$

$S_2(HT) = 4$일 때 $y = 4+8+4 = 16$이므로

$$v_2(4,16) = \left(\frac{1}{3}y - 4\right)^+ = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3},$$

$S_2(TH) = 4$일 때 $y = 4+2+4 = 10$이므로

$$v_2(4,10) = \left(\frac{1}{3}y - 4\right)^+ = (\frac{10}{3} - 4)^+ = 0,$$

$S_2(TT) = 1$일 때 $y = 4+2+1 = 7$이므로

$$v_2(1,7) = \left(\frac{1}{3}y - 4\right)^+ = (\frac{7}{3} - 4)^+ = 0$$

이므로

$$v_1(8,12) = \frac{4}{5}\left\{\tilde{p}v_2(16, 12+16) + \tilde{p}v_2(4, 12+4)\right\} = \frac{4}{5}\left(\frac{16}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3},$$

$$v_1(2,6) = \frac{4}{5}\left\{\tilde{p}v_2(4, 6+4) + \tilde{p}v_2(1, 6+1)\right\} = 0.$$

따라서

$$v_0(4,4)=\frac{4}{5}\left\{\tilde{p}v_2(8,12)+\tilde{p}v_2(2,6)\right\}=\frac{4}{5}\left(\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}\right)=\frac{16}{15}.$$

가 된다.

< 평균옵션의 가격결정 프로그램 >

평균옵션, 즉 아시안옵션의 일반적인 가격결정 프로그램은 다음과 같다. 이 것은 Maple13으로 프로그래밍 하였다.

```
Asian:= proc(S0::numeric, N::posint)

        local i, j,k, u, d,r,tmp,StockPrice, SumStockPrice, OptionPayoff,
              StockShare,StrikePrice ;
        local p,q,s,m,a,b,h,tmp1,tmp2;
        u := 2.; d := evalf(1./u); StrikePrice := 4.; r:=1/4.;
        p:=(1+r-d)/(u-d); q:=1.-p;
        OptionPayoff:=array(0..N,0..2^N);
        StockPrice:= array(0..N,0..2^N);
        SumStockPrice:= array(0..N,0..2^N);
        StockShare:=array(0..N,0..2^N);
        a:=array(0..N); b:=array(0..N);
        StockPrice[0,0]:=4.;
        a[0]:=0;
```

```
for i from 1 to N do
        a[i]:= 2^i-1; b[i]:=4*2^i;
od;

for i from 1 to N  do
        for j from  0 to (2^i-1)       do
        if irem(j,2)=0 then
        StockPrice[i,a[i]-j] := 2* StockPrice[i-1,a[i-1]-j/2];
        else
        StockPrice[i,a[i]-j]:= 2^(-1)* StockPrice[i-1,a[i-1]-(j-1)/2];
        end if;
        od;
od;

SumStockPrice[0,0]:=4.;
for i from  1 to N  do
        for j from 0 to 2^i-1    do
        if irem(j,2)=0 then
        SumStockPrice[i,a[i]-j]:= SumStockPrice[i-1,a[i-1]-j/2]+2*
        StockPrice[i-1,a[i-1]-j/2];
        else
        SumStockPrice[i,a[i]-j]:= SumStockPrice[i-1,a[i-1]-(j-1)/2]
        +2^(-1)*StockPrice[i-1,a[i-1]-(j-1)/2];
        end if ;
```

```
            od;
        od;

        for j from 0 to 2^N-1  do
        OptionPayoff[N,j]:=max(0,SumStockPrice[N,j]/(N+1.)-StrikePrice);
        od;

        for i from N-1 by -1 to 0 do
            for j from 0 to (2^i-1)  do
            OptionPayoff[i,j]:=1./(1+r)*( p*OptionPayoff[i+1,2*j] +
            q*OptionPayoff[i+1,(2*j+1)]);
            StockShare[i,j]:=(OptionPayoff[i+1,j+1]-
            OptionPayoff[i+1,j])/(StockPrice[i+1,j+1]-StockPrice[i+1,j]);
            od;
        od;

        printf("Option_Price _Time_Zero=%g  \n", OptionPayoff[0,0]);
        printf("Stock_Share_Time_Zero=%g\n", StockShare[0,0]);
end proc:

Asian(4.,2);
```

평균옵션은 외환시장에서 많이 사용된다. 다국적 기업의 위험노출은 미

래의 정해진 날짜의 환율에 노출되기보다는 대부분 일정기간-분기, 반년, 혹은 1년간-동안의 환율변동에 노출되기 쉽다. 따라서 이 경우 일정기간 동안의 평균환율에 대한 옵션이 일반적인 외환옵션보다 더 유용하다. 평균옵션은 Bankers Trust 동경사무소에서 처음 발행되었으며, 평균옵션의 변형된 형태로는 다음과 같은 것들이 있다.

1) 부분평균옵션

평균가격 계산에 필요한 현물가격의 숫자와 시간이 미리 정해지기도 하며, 일반적으로 옵션기간 초부터 시작되거나 아니면 만기 직전의 일정 시점부터 시작되기도 한다. 이처럼 옵션기간 중에 미리 정한 일정 기간 동안의 가격만으로 평균하는 옵션을 부분평균옵션(partial average options)이라 한다.

2) 평균행사가격 옵션

평균옵션의 변형으로 평균행사가격 옵션이 있다. 이것은 행사가격을 미리 정하는 것이 아니라 옵션 계약기간 동안의 평균 현물가격을 행사가격으로 한다. 즉,

$$\text{평균행사가격 콜옵션의 만기가치} = \max[0,\ S_T - S_{AVG}]$$

단, S_{AVG}는 옵션 계약기간 중의 평균 현물가격이다.

(2) 장애옵션(barrier option)

장애옵션(barrier option)은 기초자산의 가격이 일정 기간 동안에 일정 수준에 도달했는지 여부에 의하여 이득이 결정되는 옵션이다. 옵션계약에 행사가격이나 만기일에 대한 것뿐만 아니라, 일정한 가격을 지정하여 옵션 계약기간 동안에 현물가격이 이 가격에 도달한 적이 있을 경우에는 옵션이 소멸되거나 또는 비로소 옵션이 발효되는 옵션을 통틀어서 장애옵션이라 하며, 여기에서 지정되는 일정한 가격을 촉발가격(trigger price)이라 한다. 장애옵션은 기초자산의 가격이 일정 수준(촉발가격)에 도달하면 효력이 소멸되는 넉아웃옵션(knock-out option)과 기초자산의 가격이 촉발가격에 도달하면 옵션이 발효되는 넉인옵션(knock-in option)의 두 가지로 나눌 수 있다.

넉아웃옵션(knock-in option)이 장애옵션 중에서 가장 폭넓게 사용된다. 촉발가격이 계약 시의 현물가격보다 높을 때, 현물가격이 이 촉발가격 이상으로 오르면 옵션은 무효가 된다.(up-and-out). 또는 촉발가격이 계약 시의 현물가격보다 낮을 때, 현물가격이 촉발가격 이하로 떨어지면 옵션은 무효가 된다(down-and-out).

넉아웃옵션(knock-out option)의 가격은 현물가격이 촉발가격에 도달하지 않는 한 일반적인 옵션과 동일하다. 그러나 만약 대상가격이 촉발가격에 도달하면 옵션은 소멸된다. 옵션이 무효가 될 가능성 때문에 넉아웃옵션의 가격은 일반적으로 보통옵션보다 저렴하다. 넉아웃콜옵션의 손익구조는,

옵션 계약기간 중 $S_T > H$ 이면, $\max[0,\ S_T - X]$,

옵션 계약기간 중 한 번이라도 $S_T \le H$이면, 0 혹은 일부의 현금보상

이다. 여기서 H는 촉발가격이다. 옵션이 넉아웃되면 옵션이 무효가 되어 아무런 대가가 없거나 때로는 약간의 현금보상이 이루어진다.

그러므로 넉아웃옵션은 대상자산의 가격변동성이 너무 커서 그 옵션 프리미엄이 매우 큰 경우에 사용될 수 있다.

다운앤아웃(down-and-out) 콜옵션은 대상상품가격이 촉발가격 이상의 수준을 유지하면 절약된 옵션의 프리미엄만큼 일반적인 옵션보다 이익이 되지만, 잠시라도 가격이 그 이하로 내려가면 옵션은 사라진다. 따라서 촉발가격이 현재 가격과 가깝게 설정될수록 일반적인 옵션에 비해 절약되는 프리미엄이 커지지만 잠재적인 수익 가능성은 줄어든다.

다운앤아웃(down-and-out) 콜옵션은 미래에 어떤 자산을 매입해야 할 경우에 유용하다. 예를 들어 밀을 매입해야 하는 밀가루 회사가 있다고 하자. 현재 밀이 한 단위에 100달러 수준이고, 1개월 후에 한 단위당 30달러에 살 수 있는 콜옵션을 매입했다고 하면, 일반적인 콜옵션을 구입하는 것보다 중도에 옵션이 소멸될 가능성이 있으므로 프리미엄은 저렴하다. 옵션기간 중에 밀의 가격이 70달러 이하로 내려가는 일이 없이 올라가게 되면 일반적인 옵션과 같이 만기 때에 그 내재가치만큼 보상을 받으면 된다. 그러나 만일 옵션을 체결하고 보름이 지난 후에 밀의 가격이 70달러 이하로 내려가게 되면, 옵션은 소멸되지만 하락한 가격에 밀을 현물시장에서 매입함으로써 저렴한 가격에 밀을 확보할 수 있다. 따라서 다운앤아웃(down-and-out) 콜옵션의 보유자는 일반옵션 대신에 이것을 보유함으로써 헤지비용을 절감하고, 가격하락 시에는 낮은 가격에 대상자산

을 확보할 수도 있게 됨으로써 옵션이 중간에 소멸되는 불이익을 상쇄시킨다. 다운앤아웃 콜옵션은 1967년부터 미국 내 장외파생상품 시장에서 널리 거래되었다.

다운앤아웃 콜옵션과 함께 많이 사용되는 장애옵션으로 업앤아웃 풋옵션이 있다. 업앤아웃 풋옵션은 행사가격보다 높은 수준에 촉발가격을 설정한 것으로 옵션 계약기간 중에 현물가격이 촉발가격에 도달하면 옵션이 소멸된다. 업앤아웃 풋옵션도 다운앤아웃 콜옵션과 같은 논리로 그 유용성을 이해할 수 있다. 예를 들어, 밀가루 생산업자가 현재 한 단위당 100달러 하는 밀가루를 1개월 후에 100달러에 팔 수 있는 풋옵션을 매입하되, 행사가격보다 높은 수준인 120달러에 촉발가격을 설정한 업앤아웃 풋옵션을 매입하였다고 하자. 만일 가격이 120달러 수준까지 오르는 일 없이 만기에 도달하였다면 일반적인 옵션과 동일하게 취급되지만, 가격이 120달러 이상으로 오르면 풋옵션은 무효가 된다. 그러나 오른 가격으로 매도할 수 있어 옵션 효력이 상실된 것을 보장받을 수 있다.

이처럼 넉아웃옵션(knock-out option)의 보유자는 가격이 오르든 떨어지든 큰 손실 없이 일정한 수익을 확보할 수 있을 뿐만 아니라, 넉아웃 조건이 가미되는 것만큼 프리미엄을 절감할 수 있다. 업앤아웃 풋옵션은 1980년대 말 이후에 장외파생상품 시장에 등장하였고, 당시에 유럽식 업앤아웃 풋옵션이 내재된 니케이 지수 연동 채권이 일본 투자자들에게 매우 인기가 있었다.

넉아웃옵션(knock-out option)은 촉발가격에 도달하지 않는 한 유효한 반면, 넉인옵션(knock-in option)은 촉발가격에 도달하지 않는 한 효력이 없다가 촉발가격에 도달하면 효력이 생긴다. 따라서 일반적인 옵션은 아래와 같이 분해할 수 있다.

일반적인 옵션＝넉아웃옵션＋넉인옵션

이러한 관계식은 넉아웃옵션의 가격과 넉인옵션의 가격을 둘 다 계산할 필요를 줄여준다. 즉, 하나를 알고 있으면 다른 하나는 위의 관계로부터 계산할 수 있다. 넉인옵션과 넉아웃옵션을 결합시켜 복잡한 손익구조를 만들어낸 상품의 예를 들어보자.

< KIKO 옵션 >

우리나라에서 중소수출업체들이 추가적인 비용 없이 환위험을 줄일 수 있다고 하여 KIKO라는 파생상품을 매수했다가 환율이 급변동하는 바람에 큰 손실을 입은 사례가 있다. KIKO는 선도거래에 이색옵션인 넉인옵션(knock-in option)이나 넉아웃옵션(knock-out option) 등을 복잡하게 합성한 상품으로 knock-in-knock-out 옵션의 약어이다. 통화옵션거래의 한 방식으로 환율이 일정 범위 안에서 움직일 경우 미리 약정한 환율에 약정금액을 팔 수 있도록 한 파생상품이다. 환율이 상하 일정한 범위 내에 있을 경우 시장가보다 높은 지정환율(행사가)로 외화를 팔 수 있는 통화옵션이다. 또한 환율이 지정한 범위 하단을 내려가더라도 계약이 무효(knock out barrier)가 되어서 기업은 손실을 입지 않는다. 그러나 환율이 급등하여 지정환율 상단(knock in barrier)를 넘어가면 계약금액의 2, 3배를 시장가보다 낮은 지정환율로 팔아야 하므로 기업이 손실을 입게 된다. 환리스크를 헤징하기 위한 방안으로 활용되고 있으나 환율 급등 시에는 엄청난 손실을 초래한다.

KIKO 계약 시에는 아래의 다섯 가지 경우의 수가 가능하다.

ⅰ. 환율이 한 번이라도 정해진 범위 아래로 떨어지는 경우
  : 계약 무효(knock out).

ⅱ. 환율이 한 번이라도 정해진 범위 이상으로 올라가도 만기환율이 약정환율보다 낮은 경우 : KIKO 계약을 한 기업은 약정금액을 약정환율에 매도.

ⅲ. 환율이 한 번이라도 정해진 범위 이상으로 올라가고 만기환율이 약정환율보다 높은 경우 : 기업은 약정금액의 몇 배를 약정환율로 매도(knock in) 몇 배인지는 계약조건에 따라 다름.

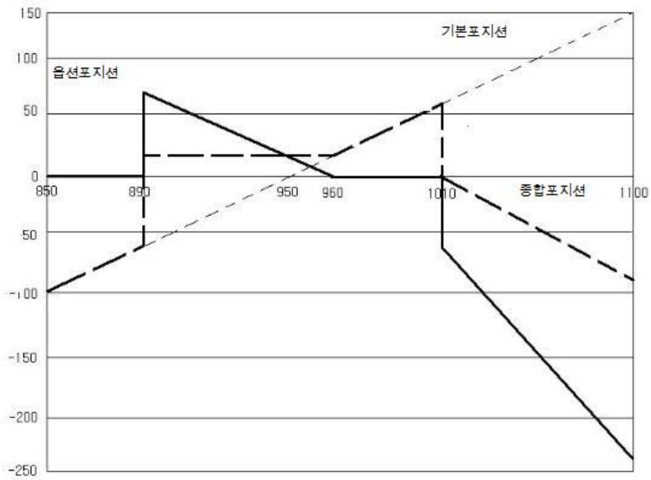
ⅳ. 달러화가 정해진 범위 안에서 움직이다가 만기 시 약정환율 이하로 떨어지는 경우 : 기업은 약정환율에 약정금액을 팔아 환차익.

ⅴ. 달러가 정해진 범위 안에서 움직이다가 만기 시 약정환율 이상으로 올라가는 경우 : 계약 무효, 기업은 시장 환율로 달러 매도.

수출 중소기업들의 민원 제기는 세 번째 경우에서 비롯되었다. 일방적인 하락세를 기록해왔던 환율이 급등세를 연출하자 환율 하락을 전망하고 KIKO 계약을 했던 중소기업들이 수출로 벌어들인 달러화를 시장 환율 수준보다 터무니없이 낮은 가격으로 매도해야 하는 상황에 직면하였다.

KIKO는 현재 시장환율(현물환율)보다 5원 이내 높은 수준에서 행사가격(strike price) 혹은 약정환율이 설정된다. 이 행사가격을 기준으로 상하 30~40원 정도의 간격을 두고 상하단 장애(barrier)가 설정된다. 환율 하락에 맞춰 짜여질 때는 행사가격과 장애의 간격이 위보다 아래가 더 넓어질 수 있다. 수출업체들에게 맞춰진 KIKO는 환율이 등락을 거듭하다 장애에 닿

았을 경우, 상단이냐 혹은 하단이냐에 따라 결과가 달라진다. <그림 3.1>은 KIKO의 손익을 분석한 그래프이다. 현재 환율이 950원인데 약정환율을 960원으로 하고 knock in knock out 범위를 890원에서 1100원으로 설정하고 1억 달러의 KIKO 계약을 체결할 경우로 knock in 기준을 넘어설 경우 계약금액의 2배를 물어야 하는 조건이다.



< 그림 3.1 KIKO 옵션의 손익구조 >

<그림 3.1>의 가로는 환율, 세로는 손익을 나타낸 것이다. 실선이 이 옵션의 손익을 나타낸 것이다. 환율이 약정환율인 960원 밑으로 떨어질 경우 이익이 늘어나지만 890원 밑쪽에서는 계약이 무효가 되어 이익도 없고 손실도 없다. 960원에서 1010원 사이는 손실이 나도 옵션을 행사하지 않으면 되기 때문에 역시 이익도 없고 손실도 없다. 다만 1010원을 넘어서면 손실이 걷잡을 수 없이 불어난다. 가는 점선은 달러화 자산의 기초 거래를 나타낸 것이고 굵은 점선은 환 헤지를 감안한 실제 손익을 나타낸 것이다. 만약 달

러화 자산을 그냥 들고 있으면 환율이 오를수록 이익이 나고 내릴수록 손해가 난다. 환 헤지를 하는 것은 환율 하락에 따른 손실을 줄이기 위해서다. 굵은 점선을 보면 890원과 960원 사이에서는 10원씩 고정적인 이익이 나고 960원에서 1010원 사이에서는 환율이 오를수록 최대 60원까지 이익이 난다. 문제는 이 경우도 1010원이 넘으면 환율 상승에 따른 이익은커녕 오히려 손해가 난다는데 있다.

정리하면 환율이 지금보다 더 떨어질 가능성에 대비하기 위해 환율이 오를 경우 이익을 포기하거나 손실을 볼 위험을 감수한다는 것이다. 물론 은행은 환율이 떨어질 경우에 대비하여 다양한 형태의 반대 포지션을 확보하고 있기 때문에 어느 경우에나 양쪽에서 수수료만 얻으면 된다. KIKO는 환율이 하락할 때 이를 보전하거나 오히려 이익을 낸다는 매력이 있지만 환율이 일정 구간을 넘어설 경우 2배 이상의 손실을 봐야 하는 위험이 있다.[2)]

상황	옵션	결과
계약기간 중 한번이라도 knock out 환율 아래로 떨어진 경우	계약 소멸	수출대금은 환위험에 노출

2) 2007년 말 상황을 고려하여 KIKO의 프리미엄을 계산해 보면(당시 환율 960원, 넉아웃풋과 넉인콜의 촉발가격은 각기 890원과 1,010원, 행사가격은 각기 960원과 1,010원, 환율변동성 30%, 만기 1년, 한국금리 5%, 미국금리 4.5%로 가정), 넉아웃 풋옵션의 매수자이자 넉인 콜옵션의 매도자인 KIKO 가입자(국내 수출업체)가 받아야 할 프리미엄은 달러당 100원 이상된다. 1억 달러의 KIKO에 가입한 업체라면 200억 원(왜냐하면 풋옵션과 콜옵션이 1대 2로 결합되었기 때문)을 받았어야 한다. 전체적으로 KIKO 거래규모가 100억 달러 정도이므로 총 2조 원 이상의 프리미엄을 원발행자인 외국계 은행이 국내 수출업체에게 지급해야 했다.

계약기간 중 한번이라도 knock in 환율 위쪽으로 올라선 경우	계약금액의 2배를 행사환율로 매도	매도해야 하는 달러가 수출대금의 2배이므로 모자라는 달러는 시장에서 비싸게 사서 행사환율로 매도(또는 그 차액만큼의 원화금액 지급)로 손실 발생
knock in 환율과 knock out 환율 사이에서 움직이다가 만기 시 행사환율 이하로 끝난 경우	행사환율로 수출대금을 매도	행사환율과 시장환율 차이만큼 이익 발생
knock in 환율과 knock out 환율 사이에서 움직이다가 만기 시 행사환율 위에서 끝난 경우	시장환율로 수출대금을 매도	즉 옵션거래를 하지 않은 상황이 된다. 수출대금 환위험에 노출

KIKO 매수자로서는 비용 없이 환헤지가 가능하고 경우에 따라서는 환율이 하락해도 이익을 볼 수 있다는 매력적인 상품으로 포장되어 있다. 하지만 환율하락 시의 이익 가능성은 제한된 반면 환율상승 시의 손실 가능성은 무한하다. 환율이 예상보다 하락하면 모든 이익이 사라지고, 예상보다 상승하면 큰 손실을 봐야 하는 이중의 위험을 안고 있다는 것을 KIKO 매수자들이 제대로 알고 있지 못했다.

환율하락 시에 손해 볼 위험이 있는 은행은 knock-out으로 손실 폭을 제

한해 두었지만, 환율상승 시에 손해 볼 위험이 있는 업체들은 무한한 위험에 그대로 노출되어 있는 구조이다. 결국 은행의 손실 가능성은 제한적이고, 경우에 따라서는 손실이 없어지면서도 은행의 이익 가능성은 무한하게 열어 두었다. 반대로 기업체는 이익 가능성은 제한적인데 손실 가능성은 무한하다.

이 상품은 2007년부터 2008년 초까지 중소수출업체들과 외국계 은행 사이에서 많이 거래되었는데, 2008년 정부가 수출증대를 위해 고환율정책을 무리하게 추진하는 바람에 KIKO 포지션을 가지고 있던 중소수출업체들이 막대한 손해를 보았다. 2008년 상반기 말 중소기업의 평가손실이 1조 5,393억 원이었다(오버헤지 4,016억 원 포함).

< 장애옵션을 이용한 예금(웨딩케이크 Style) >

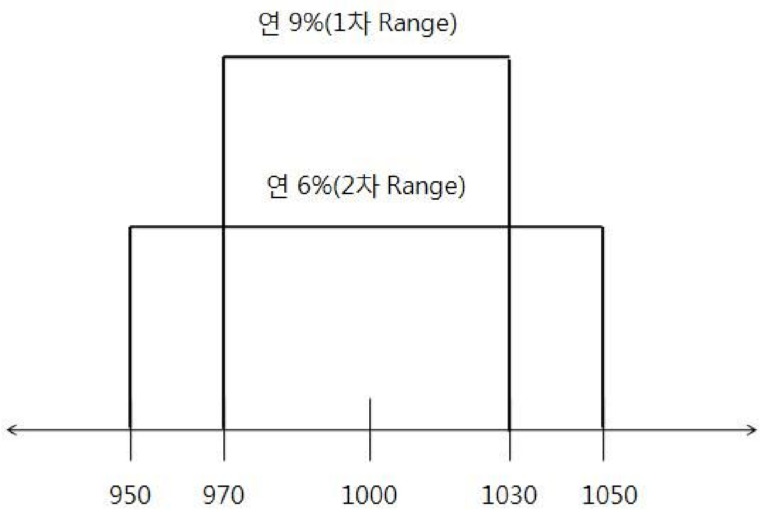
Ⅰ. 상품 내용

- 만기 : 6개월(현재FX 1,000원 가정)
- 원금보존추구형(자산운용사 수익증권 형태로 판매)
- 수익구조
  - 1차 Range : 상/하방 ±30원, Range 내에 있을 경우 연 9% 지급, 장중 1회라도 Barrier를 Hit할 경우 2차 Range로 이동.
  - 2차 Range : 상/하방 ±50원, Range 내에 있을 경우 연 6% 지급, 장중 1회라도 Barrier를 Hit할 경우 모든 옵션 소멸(0%).

Ⅱ. 시장에의 영향

투자자에게 가장 좋은 수익률인 9%를 보장하는 1차 Range의 상·하방 중 만기 이전에 혹시 Hit한다 하더라도 당시 은행 정기예금 금리보다 높

은 수준인 6%를 달성할 수 있는 Range가 더 넓어지는 구조로 설계됨으로써 은행권 투자자를 상대로 안정성이 부각되었다. 위와 같이 대부분 변형된 Range형 상품들이 많았다. 그러나 이후 미 달러약세에 따라 원/달러 환율이 단기간에 1,000원 이하로 급격히 하락하면서 Range형 환율연동상품에 투자한 투자자들의 투자수익율이 저조하였다. 이로 인해 투자자 및 판매 창구에서 환율연동상품을 꺼려하는 분위기가 형성되었고, 주가연동상품과 달리 투자의 선순환구조가 이루어지지 못하였다.



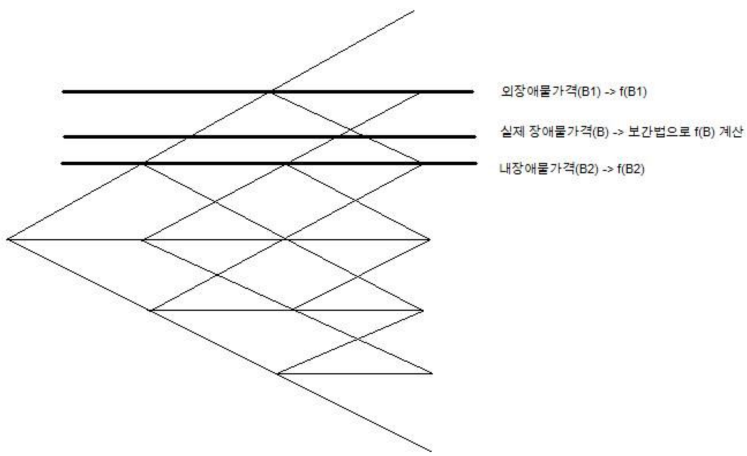
< 그림 3.2 웨딩케이크의 수익구조 >

이러한 장애옵션(barrier option)의 가격결정은 어떻게 되는지 알아보자.

< 삼항나무 모형을 이용한 장애옵션(barrier option)의 가격결정 >

경로종속형인 장애옵션의 가격은 이항 및 삼항나무 모형의 각 노드에서 옵션가격의 계산이 가능하다. 트리 모형의 각 노드에서의 주가와 실제 장애물가격이 정확하게 일치하지 않기 때문에 정확한 평가가격을 계산하기 위해서는 시간노드를 많이 설정하여야 한다. 삼항나무 모형이 이항나무 모형보다 훨씬 더 효율적이기 때문에 삼항나무 모형을 이용하여 장애옵션의 가격을 계산해 본다.

<그림 3.3>에서 보면 실제 장애물 가격이 삼항나무 상에 존재하지 않는다. 노드와 일치하는 외장애물가격(B1)과 내장애물가격(B2)를 실제 장애물가격(B)이라 가정하고 옵션가치 $V(B1)$과 $V(B2)$를 각각 구한 후에 선형 보간법을 이용해 실제 장애물가격에 해당하는 옵션가치 $V(B)$을 계산한다.



< 그림 3.3 삼항나무 모형의 장애물가격 >

(I) Knock-Out 장애 옵션

장애물가격(B)이 현재 주식가격보다 작은 경우(*Down and Out*)에 옵션가격을 만기시점에서 현재시점까지 역으로 계산할 때 각 노드의 주가 $S_{i,j}$가 B이하(*Up and In*경우는 B이상)이면 옵션가격 $V_{i,j}$은 0, B이상이면 옵션가격 $V_{i,j}$은 일반 바닐라옵션 계산 방법으로 구한다. 장애물가격(B)이 트리상에 존재하지 않을 경우에는 각각 외장애물가격(B1)과 외장애물가격(B2)을 구한 후 그에 따른 각각의 옵션가격을 구하고 선형 보간법을 이용해 실제 장애물가격에 해당하는 옵션가격을 계산한다.

Maple13으로 만든, 이것의 일반적인 가격결정 프로그램은 다음과 같다.

```
EuropeanPutKnock := proc( S0::numeric, StrikePrice::numeric,
        Barrier::numeric, N::posint)
        local i, j, u, d,r,m, tmp,StockPrice,  OptionPayoff, ST,
        Minvalue,total;
        local Deltat,T,pu,pd, pm,q,sigma,f,d1,d2,tmp1,tmp2,BS_price, temp;
        local H1, H2, OBOptionPayoff,  IBOptionPayoff,SPT,FinalPrice;
        sigma:=0.3;  T:=0.5; r:= 0.05; Deltat:=evalf( T/N); q:=0.01;
        u :=exp(sigma*sqrt(3*Deltat)); d := evalf(1./u);
        u:= sqrt(Deltat/(12*sigma^2))*(r-q-sigma^2/2) + 1./6 ;
        pd:= -sqrt(Deltat/(12*sigma^2))*(r-q-sigma^2/2) + 1./6 ;
        pm:=2/3.;
        OptionPayoff:=array(0..2*N,0..2*N);
        ST:=array(0..2*N);SPT:=array(0..2*N);
```

```
for i from 0  to N do
        for j from  0 to 2*i       do
                StockPrice[i,j] := S0*u^j*d^i;
        od;
od;

for j from  2*N by -1 to 0 do
        ST[j]:= abs(Barrier - StockPrice[N,j]);
        SPT[j]:=StockPrice[N,j];
od;

temp:= ST[2*N];
for j from  2*N-1 by -1 to 0 do
        tmp:=ST[j];
        Minvalue:=min(temp,tmp); temp:= Minvalue;
od;

total:=0;
for j from 0 to 2*N do
        if ST[j] = Minvalue then break end if;
        total:=total+1;
od;
```

```
if SPT[total] = Barrier or SPT[0] > Barrier or SPT[2*N]
        <Barrier then  H1:=SPT[total]; H2:=SPT[total];
elif SPT[total]>Barrier then
        H1:=SPT[total-1]; H2:=SPT[total];
        ## H1:outside of barrier, H2:inside of barrier
else
        H1:=SPT[total]; H2:=SPT[total+1];
end if;

## Option Payoff outside of Barrier  f(H1)  (H1<Barrier<H2)
for j from  2*N by -1 to 0 do
        if SPT[j] > H1    then
                OptionPayoff[N,j]:=max(0,StrikePrice - SPT[j]);
        else
                OptionPayoff[N,j]:=0.;
        end if;
od;

for i from N by -1 to 1 do
        for j from 0 to 2*(i-1)  do
        if StockPrice[i-1,j] >H1 then
        OptionPayoff[i-1,j]:=
        exp(-r*Deltat)*(pu*OptionPayoff[i,j+2]
        +pm*OptionPayoff[i,j+1]+pd* OptionPayoff[i,j]);
```

```
        else
        OptionPayoff[i-1,j]:=0.;
        end if;
        od;
od;

OBOptionPayoff:=OptionPayoff[0,0];

## Option Payoff f(H2) inside of Barrier
for j from  2*N by -1 to 0 do
        if SPT[j] > H2   then
        OptionPayoff[N,j]:=max(0,StrikePrice - SPT[j]);
        else
        OptionPayoff[N,j]:=0.;
        end if;
od;

for i from N by -1 to 1 do
        for j from 0 to 2*(i-1)  do
        if StockPrice[i-1,j] > H2   then
        OptionPayoff[i-1,j]:=
        exp(-r*Deltat)*(pu*OptionPayoff[i,j+2]
        +pm*OptionPayoff[i,j+1]+pd* OptionPayoff[i,j]);
        else
```

```
            OptionPayoff[i-1,j]:=0.;    end if;
            od;
        od;

        IBOptionPayoff:=OptionPayoff[0,0];
        FinalPrice:=OBOptionPayoff
        +(OBOptionPayoff-IBOptionPayoff)/(H1-H2)*(Barrier-H1);
        printf("Final Option_Price_Time_Zero=%g\n",FinalPrice);

        end proc:

EuropeanPutKnock(1000.,1000.,700, 350);
```

위 프로그램의 결과는 다음과 같다.

Final Option_Price_Time_Zero=46.3127

(Ⅱ) Knock-In 장애 옵션

Knock-In 장애 옵션의 가격은 다음 3단계를 거쳐 계산된다.

첫째, Knock-In 장애에 도달하였다고 가정하고 각 노드별 옵션가격 $V_{i,j}^{hit}$을 구한다. 주가가 Knock-In 장애에 도달하면 바닐라옵션평가와 동일하게 계산된다.

둘째, Knock-In 장애에 도달하지 않았다고 가정하고 만기 때의 옵션이득 V_T를 구한다.

셋째, 만기 때의 옵션이득 V_T를 초기값으로 하여 현재시점까지 역으로 옵션가치를 계산한다. 장애물가격(B)이 현재가격보다 크게 설정돼 있는 경우(*Up and In*)에 각 노드의 주가가 B이상(*Up and Out*인 경우 B 이하)이면 옵션가격은 첫 단계에서 구한 옵션가격 $V_{i,j}^{hit}$로 대체하여 계산된다.

이 경우도 Knock-Out 장애 옵션과 같이 노드와 일치하는 외장애물가격(B1)과 내장애물가격(B2)를 실제 장애물가격(B)이라 가정하고 옵션가치 $V(B1)$과 $V(B2)$를 각각 구한 후에 선형 보간법을 이용해 실제 장애물가격에 해당하는 옵션가치 $V(B)$을 계산한다.

Maple13으로 만든, 이것의 일반적인 가격결정 프로그램은 다음과 같다.

```
EuropeanCallKnockIn := proc( S0::numeric, StrikePrice::numeric,
        Barrier::numeric, N::posint)
        local i, j, u, d,r,m, tmp,StockPrice,  OptionPayoff1,
StockShare,ST,
        Minvalue,total;
        local Deltat,T,pu,pd, pm,q,sigma,f,d1,d2,tmp1,tmp2,BS_price,  L,
        temp;
        local H1, H2, OBOptionPayoff,
        IBOptionPayoff,SPT,FinalPrice,OptionPayoff2;
        sigma:=0.3;  T:=0.5; r:= 0.05; Deltat:=evalf( T/N); q:=0.01;
        Digits:= 20;
```

```
u :=exp(sigma*sqrt(3*Deltat)); d := evalf(1./u);
pu:= sqrt(Deltat/(12*sigma^2))*(r-q-sigma^2/2) + 1./6 ;
pd:= -sqrt(Deltat/(12*sigma^2))*(r-q-sigma^2/2) + 1./6 ;
pm:=2/3.;
OptionPayoff1:=array(0..2*N,0..2*N);
OptionPayoff2:=array(0..2*N,0..2*N);
StockShare:=array(0..2*N,0..2*N);
L:=array(0..2*N);ST:=array(0..2*N);SPT:=array(0..2*N);

for i from 0  to N do
        for j from  0 to 2*i     do
                StockPrice[i,j] := S0*u^j*d^i;
        od;
od;

for j from  2*N by -1 to 0 do
        ST[j]:= abs(Barrier - StockPrice[N,j]);
        SPT[j]:=StockPrice[N,j];
od;

temp:= ST[2*N];
for j from  2*N-1 by -1 to 0 do
        tmp:=ST[j];
        Minvalue:=min(temp,tmp); temp:= Minvalue;
```

```
        od;

        total:=0;      L:=[seq(ST[j],j=0..2*N)];
        for j in L  do
                if j = Minvalue then break end if; total:=total+1;
        od;

        if SPT[total]= Barrier or SPT[0] > Barrier or SPT[2*N]
        <Barrier then
                H1:=SPT[total];  H2:=SPT[total];
        elif SPT[total] > Barrier then
                H1:= SPT[total]; H2:=SPT[total-1];
        ## H1:outside barrier, H2:inside barrier
        else
                H1:=SPT[total+1]; H2:=SPT[total]  end if;

printf("H2=%g\n", H2);
## First Step: caculate  OptionPayoff1

        for j from  2*N by -1 to 0 do
                tmp:=  SPT[j]-StrikePrice;
                OptionPayoff1[N,j]:=max(0,tmp);
        od;
```

```
for i from N by -1 to 1 do
        for j from 0 to 2*(i-1)  do
        OptionPayoff1[i-1,j]:=
        exp(-r*Deltat)*(pu*OptionPayoff1[i,j+2]
        +pm*OptionPayoff1[i,j+1]+pd* OptionPayoff1[i,j]);
        od;
od;

##Second Step: Option Payoff outside Barrier  f(H1)  (H1>Barrier>H2)
for j from  2*N by -1 to 0 do
        if SPT[j] >= H1    then
        tmp:=  SPT[j]-StrikePrice;
        OptionPayoff2[N,j]:=max(0,tmp);
        else
        OptionPayoff2[N,j]:=0.    end if;
od;

for i from N by -1 to 1 do
        for j from 0 to 2*(i-1)  do
        OptionPayoff2[i-1,j]:=
        exp(-r*Deltat)*(pu*OptionPayoff2[i,j+2]
        +pm*OptionPayoff2[i,j+1]+pd* OptionPayoff2[i,j]);
        if StockPrice[i-1,j]>= H1 then
        OptionPayoff2[i-1,j]:=OptionPayoff1[i-1,j] end if;
```

```
        od;
    od;

## Option Payoff f(H2) inside Barrier
    for j from  2*N by -1 to 0 do
        if SPT[j] >= H2   then
        OptionPayoff2[N,j]:=max(0,SPT[j]-StrikePrice);
        else
        OptionPayoff2[N,j]:=0.  end if;
    od;

## Step3:
    for i from N by -1 to 1 do
        for j from 0 to 2*(i-1)  do
        OptionPayoff2[i-1,j]:=
        exp(-r*Deltat)*(pu*OptionPayoff2[i,j+2]
        +pm*OptionPayoff2[i,j+1]+pd*OptionPayoff2[i,j]);
        if StockPrice[i-1,j] >= H1 then
        OptionPayoff2[i-1,j]:=OptionPayoff1[i-1,j] end if;
        od;
    od;

    IBOptionPayoff:=OptionPayoff2[0,0];
```

```
        for i from N by -1 to 1 do
                for j from 0 to 2*(i-1)  do
                OptionPayoff2[i-1,j]:=
                exp(-r*Deltat)*(pu*OptionPayoff2[i,j+2]
                +pm*OptionPayoff2[i,j+1]+pd* OptionPayoff2[i,j]);
                if StockPrice[i-1,j] >= H2 then
                OptionPayoff2[i-1,j]:=OptionPayoff1[i-1,j] end if;
                od;
        od;

        OBOptionPayoff:=OptionPayoff2[0,0];

        FinalPrice:= IBOptionPayoff
        +(IBOptionPayoff-OBOptionPayoff)/(H1-H2)*(Barrier-H1);
        printf("Final Option_Price_Time_Zero=%g\n",FinalPrice);

        end proc:

##showstat(EuropeanCallKnockIn);
##stopat(EuropeanCallKnockIn);
EuropeanCallKnockIn(1000.,1000.,1300, 300);
```

위 프로그램의 결과는 다음과 같다.

Final Option_Price_Time_Zero=62.1065

이러한 장애옵션(barrier option)은 경계값(촉발가격)을 어떻게 설정하는가에 따라 몇 가지 유형으로 나뉜다.

1) 부분장애옵션(partial barrier option)

일반적인 장애옵션(barrier option)과 같이 촉발가격을 건드리면 무효화하거나 유효화되는 것은 동일하지만, 이 조건이 발효되는 기간을 옵션의 만기까지 전체기간으로 설정하지 않고 옵션 계약기간 중 일부 기간에만 적용하는 것을 부분장애옵션(partial barrier option)이라 한다. 즉, 옵션 계약기간을 몇 개의 작은 구간으로 나누어서 장애를 차별적으로 적용한다. 예를 들어, 옵션 계약기간은 1개월인데, 처음 2주 동안에 대해서만 장애옵션의 조건을 적용하고 그 외의 기간에 대해서는 조건을 적용하지 않는다.

2) 외부장애옵션

장애옵션 중에서 촉발되는 조건을 대상자산이 아닌 다른 것으로 정해 놓은 경우이다. 예를 들어, 금리가 10% 이상이 되면 통화옵션이 무효화되도록 하는 것처럼, 통화옵션에 대하여 환율이 아닌 금리에 대하여 촉발가격을 설정한다. 혹은 원/달러 간의 통화옵션에 대하여 일정한 수준의 금값을 촉발가격으로 설정하는 경우도 이에 해당된다.

예를 들어, S를 원래 옵션의 대상물 가격이라 하고, R을 넉아웃 대상물의 가격이라고 하자. 이 경우 외부장애옵션의 손익구조는,

옵션 계약기간 중 $R_t > H$ 이면, $\max[0,\ S_T - X]$,

옵션 계약기간 중 한 번이라도 $R_t \le H$ 이면, 0 혹은 일부의 현금보상

이 된다. X는 행사가격이고 H는 외부 촉발가격이다.

원칙적으로, 외부장애옵션은 뒤에서 다룰 대상자산 옵션에 속한다. S와 R간의 상관관계가 옵션의 가치에 반영되어야 하기 때문이다.

3) 다중장애옵션(multiple barrier option)

지금까지는 촉발가격으로 하나의 가격만 설정하는 것을 다루었는데, 다중장애옵션(multiple barrier option)은 이 촉발가격을 여러 개 지정하는 것이다. 즉, H_i의 장애를 설정한다. 단, $i=1, 2, \cdots, n$ 이다. 다중장애옵션 중에서 가장 흔한 것이 니케이지수[3]에 대하여 상위 촉발가격을 건드리면 무효가 되도록 장애를 설정하거나, 그 반대로 하위 촉발가격을 건드리면 유효해지도록 설정할 수 있다. 다른 예로는 원유옵션에서 유가가 배럴당 $120 이상으로 올라가면 무효로 하고, 유가가 배럴당 $80 이하로 내려가면 유효화하는 방식도 있다.

4) 곡률경계옵션(curvillinear barrier option)

곡률경계옵션(curvillinear barrier option)은 장애옵션(barrier option)의 촉발가격을 일정한 수준으로 정하지 않고 촉발가격 수준을 시간과 대상물 가격의 함수가 되도록 하는 것이다. 이러한 곡률경계옵션(curvillinear barrier option) 매수자는 만기가 가까워지더라도 안심할 수 없다. 가장 흔한 형태가 지수함수 형태로 촉발가격을 설정하는 것이다. 즉,

3) 니케이지수는 도쿄 증권거래소의 주요 주가 지수이다. 1971년 이래로 니혼케이자이 신문이 거의 매일 산출해내고 있으며, 이 지수는 주가-가중치(price-weighted)의 에버리지로 지수의 구성 종목들은 매년 재검토된다. 니케이지수는 1950년 9월 7일부터 산출되기 시작하였고, 1949년 5월 16일을 소급 기점으로 치며, 1989년 12월 29일 3만 8957.44의 장중 사상 최고치, 3만 8915.87의 종가 최고치를 기록하였다.

$$H_{lower} = H_L e^{\delta_L \tau}$$
$$H_{upper} = H_U e^{\delta_U \tau} \qquad (t \le \tau \le T)$$

단, H_L, H_U, δ_L, δ_U 는 상수이고, τ는 잔존만기이다. 이러한 경계값을 넉아웃 혹은 넉인의 조건으로 설정한다.

예를 들면, 6개월 만기 업앤아웃 풋옵션에서 첫 1개월간은 촉발가격의 수준을 변화시킨다. 이처럼 촉발가격이 갈수록 낮아지는 업앤아웃 풋옵션은 단순 업앤아웃 옵션보다도 프리미엄이 낮다.

(3) 룩백옵션(lookback option)

룩백옵션(lookback option 또는 No Regrets Option)은 평균행사가격 옵션과 마찬가지로 행사가격을 옵션계약시점이 아닌 옵션만료시점 또는 행사시점(미국식 옵션의 조기행사시)에 결정한다. 결정방법은 주어진 기초물이 계약시점에서 정한 기간(lookback period)동안 거친 가격변동과정중에서 옵션 보유자에게 가장 유리한 가격을 행사가격으로 택하는 것이다. 즉, 콜옵션의 경우 보유자는 만기일 이전에 실현된 기초자산의 가격중 가장 낮은 가격으로 매입할 수 있으며, 풋옵션의 경우에는 옵션기간중 실현된 가장 높은 가격으로 매도할 수 있다.

이 옵션은 가격이 비싼 것이 단점이지만 아메리칸 옵션의 경우 발생할 수 있는 행사오류와 유로피언 옵션의 경우 만기에만 권리를 행사함으로써 발생할 수 있는 최적유동성의 실현불가능성을 만회할 수 있다는 이점이 있다.

룩백옵션은 보유자에게 옵션 계약기간 동안 가장 유리한 대상자산 가격을 행사가격으로 사용할 수 있도록 하는 경로종속형 옵션(path-dependent option)이다. 따라서

$$\text{룩백 콜옵션의 가치} = \max[S_T - S_{low},\ 0]$$
$$\text{룩백 풋옵션의 가치} = \max[S_{high} - S_T,\ 0]$$

단, S_{low}는 계약기간 중 가장 낮은 현물가격이고, S_{high}는 계약기간 중 가장 높은 현물가격이다. 이러한 룩백옵션은 변동 행사가격 옵션(floating-strike option)으로도 알려져 있다.

룩백옵션은 어떠한 금융자산에 대해서도 사용될 수 있지만, 지금까지는 기본적으로 주식이나 외환거래에서 많이 사용되어 왔다. 룩백옵션의 보유자는 미국식 옵션에 있는 모든 권리를 가질 뿐 아니라 추가적인 권리도 가지고 있다. 즉, 룩백옵션에서는 행사 여부를 결정하기에 앞서 그동안의 모든 가격 데이터를 검토하여 가장 유리한 가격을 선택할 수 있다. 따라서 룩백옵션의 가치는 미국식 옵션의 가치와 같거나 그보다 크다. 대상자산 가격의 변동성이 클수록 룩백옵션의 수익도 커진다. 일반적으로 룩백옵션은 일반옵션 프리미엄의 약 2배 이상이다.

<룩백옵션의 가치계산의 예>

$S_0 = 4,\ u = 2,\ d = \dfrac{1}{2},\ r = \dfrac{1}{4}$인 이항모형을 바탕으로 알아보자.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & S_2(HH)=16 \\
 & S_1(H)=8 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0=4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(HT)=S_2(TH)=4 \\
 & S_1(T)=2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_1(TT)=1
\end{tikzcd}$$

그러면 위험중립확률은 $\tilde{p}=\dfrac{1}{2}=\tilde{q}$가 된다. 시간 3에서 옵션 이득이

$$V_3 = \max_{0 \le n \le 3} S_n - S_3$$

인 룩백옵션의 가격 V_0와 옵션판매자의 위험을 헤지하기 위해서 사야할 주식수 Δ_0를 결정해 보자.

시간 3에서 옵션의 가치는

$$V_3(HHH) = S_3(HHH) - S_3(HHH) = 32 - 32 = 0,$$

$$V_3(HHT) = S_2(HH) - S_3(HHT) = 16 - 8 = 8,$$

$$V_3(HTH) = S_1(H) - S_3(HTH) = 8 - 8 = 0,$$

$$V_3(HTT) = S_1(H) - S_3(HTT) = 8 - 2 = 6,$$

$$V_3(THH) = S_3(THH) - S_3(THH) = 0,$$

$$V_3(THT) = S_2(TH) - S_3(THH) = 4 - 2 = 2,$$

$$V_3(TTH) = S_0 - S_3(TTH) = 4 - 2 = 2,$$

$$V_3(TTT) = S_0 - S_3(TTT) = 4 - \frac{1}{2} = 3.5 \qquad \text{이고}$$

시간 2에서 옵션의 가치는

$$V_2(HH) = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_3(HHH) + \frac{1}{2}V_3(HHT)\right] = \frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 8\right] = 3.2,$$

$$V_2(HT)=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_3(HTH)+\frac{1}{2}V_3(HTT)\right]=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 6\right]=2.4,$$

$$V_2(TH)=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_3(THH)+\frac{1}{2}V_3(THT)\right]=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 2\right]=0.8,$$

$$V_2(TT)=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_3(TTH)+\frac{1}{2}V_3(TTT)\right]=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 3.5\right]=2.2$$

가 된다.

또한 시간 1에서 옵션의 가치는

$$V_1(H)=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_2(HH)+\frac{1}{2}V_2(HT)\right]=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\times 3.2+\frac{1}{2}\times 2.4\right]=2.24,$$

$$V_1(T)=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_2(TH)+\frac{1}{2}V_2(TT)\right]=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\times 0.8+\frac{1}{2}\times 2.2\right]=1.2.$$

따라서 룩백옵션의 파는 가격 V_0는

$$V_0=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}V_1(H)+\frac{1}{2}V_1(T)\right]=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}\times 2.24+\frac{1}{2}\times 1.2\right]=\mathbf{1.376}\text{이고}$$

사야 할 주식수 Δ_0는

$$\Delta_0=\frac{V_1(H)-V_1(T)}{S_1(H)-S_1(T)}=\frac{2.24-1.2}{8-2}=\frac{1.04}{6}=\mathbf{0.1733}.$$

이제 $V_0=1.376$의 초기자금을 가지고 $\Delta_0=0.1733$의 주식을 산 포트폴리오의 가치를 생각해보자.

$$\begin{aligned}X_1(H)&=\Delta_0 S_1(H)+(1+r)(V_0-\Delta_0 S_0)\\&=0.1733\times 8+\frac{5}{4}\times(1.376-0.1733\times 4)\\&=1.3867+0.8533=2.24\\&=V_1(H).\end{aligned}$$

마찬가지로 계산하면

$$\begin{aligned} X_1(T) &= 0.1733 \times 2 + \frac{5}{4} \times (1.376 - 0.1733 \times 4) \\ &= 0.3467 + 0.8533 = 1.2 \\ &= V_1(T). \end{aligned}$$

이렇게 된다.

< 룩백옵션(lookback option)의 가격결정 프로그램 >

Maple13으로 만든, 룩백옵션의 일반적인 가격결정 프로그램은 다음과 같다.

```
Lookback:= proc(S0::numeric, N::posint)
    local i, j,k, u, d,r,tmp,StockPrice, MaxStockPrice, OptionPayoff,
    StockShare,StrikePrice ;
    local p,q,s,m,a,b,h,tmp1,tmp2;
    u := 2.; d := evalf(1./u); StrikePrice := 4.; r:=1/4.;
    p:=(1+r-d)/(u-d); q:=1.-p;
    OptionPayoff:=array(0..N,0..2^N);
    StockPrice:= array(0..N,0..2^N);
    MaxStockPrice:= array(0..N,0..2^N);
    StockShare:=array(0..N,0..2^N);
    a:=array(0..N); b:=array(0..N);
    StockPrice[0,0]:=4.;
    a[0]:=0;
```

```
for i from 1 to N do
        a[i]:= 2^i-1; b[i]:=4*2^i;
od;

for i from 1 to N  do
        for j from  0 to (2^i-1)        do
        if irem(j,2)=0 then
        tmp1:=irem(j,2);h:=a[i]-j; k:=a[i-1]-j/2;
        StockPrice[i, h] := 2* StockPrice[i-1,k];
        elif irem(j,2)=1 then
        tmp2:=irem(j,2);
        StockPrice[i,a[i]-j]:= 2^(-1)* StockPrice[i-1,a[i-1]-(j-1)/2];
        fi;
        od;
od;

MaxStockPrice[0,0]:=4.;
for i from  1 to N  do
        for j from 0 to 2^i-1    do
        if irem(j,2)=0 then
        h:= a[i]-j; k:= a[i-1]-j/2;
        MaxStockPrice[i,a[i]-j]:=max(
        2*StockPrice[i-1,k],MaxStockPrice[i-1,k]);
```

```
                elif irem(j,2)=1 then     k:= a[i-1]-j/2;
                MaxStockPrice[i,a[i]-j]:=MaxStockPrice[i-1,a[i-1]-(j-1)/2]
;               fi;
                od;
        od;

        for j from 0 to 2^N-1   do
                tmp:=   MaxStockPrice[N,j]-   StockPrice[N,j];
                OptionPayoff[N,j]:=max(0.,   tmp   );
        od;

        for i from N-1 by -1 to 0 do
                for j from 0 to (2^i-1)   do
                OptionPayoff[i,j]:=1./(1+r)*( p*OptionPayoff[i+1,2*j] +
                q*OptionPayoff[i+1,(2*j+1)]);
                #   StockShare[i,j]:=(OptionPayoff[i,j+1]-
                OptionPayoff[i,j])/(StockPrice[i,j+1]-StockPrice[i,j]);
                od;
        od;

        printf("\n");
        printf("Option_Price _Time_Zero=%g   \n", OptionPayoff[0,0]);
##showstat(Lookback);
#stopat(Lookback);
```

Lookback(4.,2);

룩백옵션(lookback option)에도 변형된 형태가 있다.

1) 제1 부분 룩백옵션

부분장애옵션(partial barrier option)과 마찬가지로 룩백의 기간을 전체 옵션 계약기간이 아닌 부분적인 기간에만 허용한다. 예를 들어, 1년 계약의 옵션에 대해서 만기 직전 4개월간의 가격만 룩백을 적용할 수 있다.

2) 제2 부분 룩백옵션

룩백옵션(lookback option)에서 적용할 행사가격을 옵션 계약기간 중 가장 유리한 가격을 적용하되, 선택된 행사가격에 대한 일정 비율을 적용하여 옵션가치를 계산하도록 하는 것이다. 예를 들어, 제2 부분 룩백 콜옵션의 손익구조는,

$$\max[0,\ S_T - \lambda S_{low}] \qquad (0 < \lambda < 1)$$

와 같다. 이 특수 옵션은 부분변동 행사가격 옵션(variable floating-strike option)이라 불리기도 한다.

3) 수정 룩백옵션

일반적인 룩백옵션과는 달리 행사가격은 고정시키고 대상물의 가격을 가장 유리한 가격으로 설정하는 것이다. 즉,

$$수정\ 룩백\ 콜옵션의\ 가치 = \max[S_{high} - X]$$

$$수정\ 룩백\ 풋옵션의\ 가치 = \max[X - S_{low}]$$

단, S_{high}는 옵션 계약기간 중 가장 높은 가격, S_{low}는 옵션 계약기간 중 가장 낮은 가격이다. 이러한 수정 룩백옵션에 대해서도 부분 룩백옵션 혹은 부분변동 행사가격 옵션(variable floating-strike option)의 방식이 적용될 수 있다.

(4) 래더옵션(ladder option)

래더옵션의 특성은 옵션기간 중에 행사가격을 재조정하는 것이다. 재조정조건은 기초물가격 기준이다. 즉, 계약시점에서 행사가격을 정하지만 동시에 기초물가격에 대해 단계적인 일련의 가격수준(콜옵션의 경우 행사가격보다 높고, 풋옵션의 경우 행사가격보다 낮음)을 미리 설정해 놓고 옵션가간 중에 기초물 시가가 그 중 각 수준에 도달할 때마다 그 시점에 상관없이 그 기초물 시가를 새로운 행사가격으로 변경한다. 이는 미리 정해 놓은 시점에 이를 때마다 그 시점의 기초물의 가격수준이 어떠하든 그 수준을 그대로 새로운 행사가격으로 채택하는 클리켓옵션과 대조적이다. 그러나 행사가격의 재조정시마다 그 직전 재조정 시점과 당 재조정 시점간에 형성된 옵션의 내재가치는 실현된 것으로 인정되어 옵션보유자에게 지급이 보장되는 것은 같다.

래더옵션의 설계 시에 정하는 중요한 요소 둘은 행사가격 재조정방향과 재조정 횟수이다. 이 중 행사가격 재조정방향의 설정은 재조정을 기초

물 시가가 상승(콜의 경우) 또는 하락(풋의 경우)할 때만 하는 경우와 상승과 하락 양 방향 모두 하는 경우 중에 선택할 수 있다.

래더옵션은 미리 정해 둔 가격을 기준으로 해서 옵션의 가치가 결정되는데, $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 의 n개 계단가격(Ladder)을 설정하였다고 하면, 래더옵션(ladder option)의 가치는,

$$\text{래더 콜옵션의 가치} = \max[0,\ S_T - \min(L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n,\ S_T)]$$

$$\text{래더 풋옵션의 가치} = \max[\max(L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n,\ S_T) - S_T]$$

가 된다. 래더옵션에서는 행사가격이 미리 지정되지 않기 때문에, 변동행사가격 래더옵션(floating-strike ladder option)이라고도 한다.

1) 수정 래더옵션

래더옵션(ladder option)의 변형으로 수정 래더옵션이 있다. 행사가격을 선택할 수 있는 일반적인 래더옵션과는 다르게, 수정 래더옵션은 행사가격이 고정된다. 즉,

$$\text{수정 래더 콜옵션의 가치} = \max[0,\ \max(L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n,\ S_T) - X]$$

$$\text{수정 래더 풋옵션의 가치} = \max[0,\ X - \min(L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n,\ S_T)]$$

이다.

2) 스텝록래더옵션(step-lock ladder option)

스텝록래더옵션(step-lock ladder option)은 미리 일련의 가격들을 설정

해 두고, 대상물의 가격이 단계적으로 이 가격에 도달하면 행사가격을 재확정하며, 향후에 가격이 어떻게 변하든 관계없이 그 순간의 내재가치의 지급을 보증하는 옵션이다. 예를 들어, 옵션 계약 초기의 행사가격이 50이고, 래더 콜옵션의 행사가격 재확정 가격층이 55, 60, 65 등으로 설정되어 있다고 하면, 가격이 한 번이라도 넘어서면 행사가격은 55로 재설정되고 5(=55-50)의 수익은 지급이 보장된다. 계속해서 가격이 60을 넘어서면 행사가격이 60으로 재설정되고 5(=60-55)의 수입이 추가로 보장된다. 만기 때 대상물 가격이 새롭게 설정된 가격 이하에서 끝난다고 해도 그 전에 확정된 수입은 지급된다. 가격이 55를 건드리는 순간 행사가격이 55로 조정되면서, 5의 수입이 보장된다. 만기 때의 가격이 55이하로 마감했다면, 초기의 행사가격 50보다는 높으나, 재설정된 행사가격 55보다 낮으므로 만기 시의 차액지급은 없다. 결과적으로 이 래더옵션에서는 5의 수입이 발생한다.

(5) 클리켓옵션(cliquet option)

클리켓옵션(cliquet option) 혹은 래칫옵션(rachet option)은 옵션기간 중에 행사가격이 주기적으로 재설정되는 것이 특징이다. 계약시점에 행사가격을 정하면서 이를 옵션기간 중에 몇 번 재조정하기로 하고 일련의 날짜를 설정하여 그 때마다 그 시점에 형성된 기초물 시가로 행사가격을 대체시킨다. 행사가격의 재조정시점마다 그 직전 재조정 시점과 당 재조정 시점간에 형성된 옵션의 내재가치는 실현된 것으로 인정되어 옵션 보유자에게 지급이 보장된다. 어떤 재조정시점에 기초물 시가가 직전 재조

정 시점의 기초물 시가보다 하락한 경우라면 내재가치발생 없이 행사가격만 하락 조정된다. 단, 이 경우에도 그 이전의 재조정 시마다 확보된 옵션내재가치 축적액은 그대로 보장된다. 클리켓옵션은 프랑스에서 처음 개발되어 CAC40 지수[4)]에 대하여 발행되었다.

예를 들어, 어떤 클리켓옵션의 최초 행사가격을 100으로 정한 후, 첫째 재조정 시점에 기초물 시가가 105로 나타나면 내재가치 5가 인정되어 지급이 보장되며 행사가격은 105로 조정된다. 둘째 재조정 시점에 기초물 시가가 103으로 하락하면 새로운 내재가치는 없이 행사가격만 103으로 변경된다. 셋째 재조정 시점에 기초물 시가가 106으로 반등하면 새로운 내재가치가 3발생하며 행사가격은 106으로 재조정된다. 끝으로 만기에 이르러 기초물 시가가 105로 형성되면 옵션은 새로운 내재가치 없이 소멸된다. 옵션 보유자가 확보한 내재가치 총이익은 8(=5+3)이 된다. 이 예에서 투자자가 클리켓옵션 대신, 일반옵션을 사서 만기까지 보유했다면 내재가치 이익은 5에 그치게 된다.

클리켓옵션은 옵션계약기간 중에 얻어지는 내재가치를 만료시점의 내재가치와 무관하게 최대한 확보하려는 투자자(특히, 펀드운용자)에게 매력적일 수 있다. 그 대신 이 옵션은 일반적인 옵션에 비해 상대적으로 훨씬 가격이 높다는 단점을 가진다.

클리켓옵션을 합성하는 하나의 방법으로는 만료시점이 각각 다른 일련의 선도옵션을 집중시키는 것이 있다. 이를 이용하면 클리켓옵션의 가치

---

4) CAC 40 주가지수는 프랑스 증권거래소협회(SBF)에서 1988년 6월 15일부터 산출·발표하기 시작하였다. 이 지수의 기준시점은 1987년 12월 31일을 1,000으로 하고 있으며, 채용종목은 40종목으로서 파리증권거래소에 상장된 40개의 우량주식으로 구성되어 있는데 산출방식은 부분시가총액 방식이다. CAC 40 주가지수선물은 1988년에 파리금융선물거래소(MATIF)에 상장되었으며 거래단위는
지수 $\times F.Fr$ 200이다.

결정을 다음과 같이 할 수 있다.

$$\max(S_{t_1}-K,0)e^{r(T-t_1)}+\max(S_{t_2}-S_{t_1},0)e^{r(T-t_2)}+\cdots+\max(S_T-S_{T-1},0)$$

(6) 샤우트옵션(shout option)

샤우트옵션은 클리켓옵션과 래더옵션처럼 옵션 행사가격을 일단 계약 시점에 정한 후, 옵션기간 중에 재조정하며 해당 분기 내재가치를 옵션 보유자가 확보하는 것이 특징이다.

재조정 시점은 클리켓옵션의 경우, 미리 계약 시에 정한 날이며 래더옵션의 경우는 약정한 가격수준에 기초물 시가가 도달할 때이다. 그러나 샤우트옵션의 경우, 행사가격의 재조정 시점은 옵션 보유자가 원하는 임의의 시점이다. 아무 때나 보유자가 유리하다고 판단하는 시점에서 옵션 매도자에게 통보하여 최적으로 판단한 수준으로 행사가격을 바꿀 수 있다.

예를 들어 샤우트옵션을 매입하면서 최초 행사가격을 100으로 정한 후, 기초물 가격이 110으로 상승하자 옵션보유자가 110으로 행사가격을 통보하면 그 시점의 내재가치 10을 확보하면서 행사가격을 변경시킬 수 있다. 옵션 보유자의 총수입은 앞의 10에 더해 옵션을 만기까지 보유하거나 행사할 경우에 그 시점에서 얻는 새로운 내재가치까지 포함한다.

일반적인 사우트옵션에서는 행사가격이 샤우트된 수준에서 결정되므로 변동적이다. 하지만 수정 샤우트옵션에서는 행사가격은 미리 고정되어 있고, 대상물 가격이 가장 유리한 수준이라고 판단될 때 옵션 보유자가 샤우트함으로써 옵션의 가치가 정해지도록 한다. 샤우트옵션은 룩백옵션과

여러 면에서 동일한 속성을 갖지만 훨씬 저렴하다.

(7) 캡(cap)과 플로어(floor)

캡(cap)과 플로어(floor)는 동일한 대상에 대하여 행사가격도 동일하지만, 중복되지 않는 일련의 계약기간을 갖는 옵션 묶음으로 대표적인 장외파생상품의 하나이다. 캡(cap)은 변동금리가 일정 수준, R_{cap} 이상으로 상승하는 것으로 인한 금리비용 증가로부터 보호해주는 보험을 제공하면서 금리하락에 따른 이익은 그대로 누릴 수 있도록 한다. 캡은 일반적으로 일련의 소캡(caplets)으로 구성되는데, 각 소캡의 손익은

$$\text{소캡의 손익} = A_{\tau} \times \max[R_{\tau} - R_{cap},\ 0] \times (ACT/360)$$

이다. A_{τ}는 소캡 적용기간에 해당되는 명목원금, R_{τ}는 소캡 적용기간 말의 변동금리 수준이다. 캡 전체의 손익은 소캡의 손익의 합이다.

플로어(floor)는 변동금리가 일정 수준 R_{floor}이하로 내려가는 것으로 인한 금리수입 감소 위험으로부터 보호해 주는 보험을 제공하면서, 금리상승에 따른 혜택을 누릴 수 있도록 해 준다. 플로어도 캡과 마찬가지로 일련의 소플로어(floorlet)로 구성되며, 각 소플로어의 손익은

$$\text{소플로어의 손익} = A_{\tau} \times \max[R_{floor} - R_{\tau},\ 0] \times (ACT/360)$$

이다. 플로어 전체의 손익은 소플로어 손익의 합계이다.

3. 다중 대상자산 옵션

다중요소 파생상품(multifactor derivatives)은 상관리스트(correlation risk)를 포함하는 파생상품이다. 이러한 상관리스크는 새로운 리스크이다. 지금까지 다루어 온 파생상품의 가치는 하나의 금융자산 가격의 행태에 의해서 결정되는 데에 비하여 다중요소 파생상품은 2개 이상의 금융자산 가격의 상관관계에 의하여 결정된다. 상관관계 리스크를 포함하는 다중요소 파생상품의 대표적인 것으로는 레인보우옵션, 디프와 콴토, 바스켓 옵션 등이 있다.

다중 대상자산 옵션은 대상자산이 2개 혹은 그 이상인 옵션이다. 이러한 다중 대상자산 옵션은 각 대상자산의 변동성뿐만 아니라 상관관계에 의해서도 영향을 받는다. 앞에서 설명한 외부장애옵션도 이 다중 대상자산 옵션으로 분류될 수 있다.

(1) 레인보우옵션(rainbow option)

레인보우옵션(rainbow option 또는 better of options)의 가장 평범한 형태는 둘 또는 그 이상의 자산 중에서 실적이 가장 좋은 것의 손익구조에 따라 가치가 결정되는 것이다. 이러한 레인보우옵션은 같은 종류의 자산을 여럿 포함하고 있는데, 이를테면 여러 개의 주가지수 중에서 가장 좋은 실적을 투자자가 취하게 된다. n개의 자산을 포함한

$$n-\text{color best rainbow options의 가치} = \max[S_1^T,\ S_2^T,\ S_3^T,\ \cdots,\ S_n^T,\ X]$$

이다. 단, X는 만기 시의 잠재적인 수입이 될 수 있는 현금 고정액이다. S_1^T, S_2^T, S_3^T, $\cdots$, S_n^T는 각 자산(n개)의 만기 때의 가치이다.

예를 들면, 어떤 투자자가 독일 주가지수 DAX[5]와 영국 주가지수 FTSE[6] 사이에서 어느 것에 투자할지를 고민하고 있다면, 이 투자자는 두 주가지수 중에서 실적이 좋은 것의 손익을 지불하는 two-color의 레인보우옵션을 매수하는 것이 좋다. 만약 FTSE가 11% 상승하고 DAX가 5% 상승하였다면, 투자자는 11%의 실적을 받게 된다. 이러한 레인보우옵션의 가치는

$$2-\text{color best rainbow option의 가치} = \max[DAX,\ FTSE]$$

레인보우옵션은 서로 다른 종류의 자산을 포함하기도 한다. 주가지수의 실적과 채권의 실적을 포함하여 이 중 좋은 실적이 보유자에게 지불된다. 주식에 투자할지 아니면 채권에 투자할지에 대해 망설이던 투자자는 일정기간 후에 양자 중에서 실적이 좋은 쪽의 성과를 지불하는 옵션에 투

5) DAX 지수(Deutscher Aktien IndeX, German stock index)는 프랑크푸르트 증권거래소에 상장된 주식 중 30개 기업을 대상으로 구성된 종합 주가 지수이다. 대상 기업은 시가총액을 기준으로 가장 큰 30개 기업이 선정된다. DAX 지수의 기준일은 1987년 12월 30일로, 이 날의 지수를 1,000으로 산정하고 1988년 7월 1일부터 발표가 시작되었다.

6) FTSE(Financial Times Stock Exchange Index) 지수는 영국의 유력경제지 파이낸셜 타임스지와 런던증권거래소가 공동으로 소유하고 있는 FTSE 인터내셔널사가 작성해 발표하는 세계 주가지수로 줄여서 'FT지수'라고도 한다. 전 세계를 대상으로 투자하는 대형 펀드 특히 유럽계 펀드 운용에 주요 기준으로 사용되고 있다. 외국 투자기관들이 해외 투자 시에 각국별 투자 비중을 결정하는 기준으로 FTSE 지수에서 특정국가의 비중이 높아지면 외국인 투자가 그만큼 확대될 가능성이 커진다.

자하는 것이 좋다. 옵션 만기 때 주가지수가 12% 상승하고 채권은 4% 상승하였다면, 이 레인보우옵션의 보유자는 주가지수의 실적인 12%에 근거한 수익을 받게 될 것이다. 만일 주가지수 수익률은 −3%이고 채권수익률은 5%라고 하면, 이 레인보우옵션은 5%를 지급한다. 이러한 레인보우옵션의 발행자는 주가지수의 상승이익을 추구하되, 주가하락 시에 채권수익률 이상을 얻을 수 있도록 하는 포트폴리오 보험이나 옵션거래로 헤지할 것이다.

두 자산의 더 높은 실적에 따라 결정하는 것과 더불어 두 자산의 실적 중에서 더 낮은 실적에 따라 결정되는 것도 있다. 예를 들면, n개의 자산으로 구성된 n-color 옵션 중에서 가장 실적이 낮은 수익률을 지급하는 레인보우옵션의 가치는

$$n\text{−color worst rainbow options의 가치} = \min[S_1^T,\ S_2^T,\ S_3^T,\ \cdots,\ S_n^T,\ X]$$

이다.

혹은 두 자산의 실적의 합이나 차에 의해서 결정되는 것도 있다. 스프레드 레인보우옵션(spread rainbow options) 혹은 줄여서 스프레드옵션은 보유자에게 두 자산의 실적 간의 차를 받도록 한다. 예를 들어, DAX를 보유하고 있는 투자자가 FTSE로 포지션을 바꾸고자 할 때 스프레드옵션을 매입했다고 하면, 이 옵션은 두 지수의 수익률의 차에 따라 지불하되 이 경우 FTSE가 DAX보다 수익률이 높을 때만 지불된다고 하자.

$$\text{스프레드 레인보우 옵션의 가치} = \max[FTSE - DAX,\ 0]$$

만일 FTSE가 12% 오르고 DAX가 7% 올랐다고 하면, 보유자는 그 수익률의 차이인 5%를 받게 될 것이다. 이러한 형태의 옵션이 DAX 포트폴리오와 함께 보유된다면 투자자는 옵션 매수 비용을 제외하고는 결국 FTSE의 수익을 받게 되는 것이다. 예를 들어, DAX 인덱스 펀드를 운용하는 펀드매니저가 DAX보다는 FTSE 수익률이 높은 것으로 예상될 때 DAX 펀드를 해체하고 FTSE 지수펀드를 새로 구성하기보다는 스프레드 옵션을 매수하는 것이 더 효율적일 수 있다. 레인보우옵션에는 다음과 같은 변형 형태가 있다.

1) 미니맥스옵션(Options on the Max 또는 Min of a Assets)

$$\text{Call on the Max의 가치} = \max[\max(S_1^T,\ S_2^T,\ S_3^T,\ \cdots,\ S_n^T) - X,\ 0]$$

$$\text{Put on the Max의 가치} = \max[X - \min(S_1^T,\ S_2^T,\ S_3^T,\ \cdots,\ S_n^T),\ 0]$$

이다. 즉, Call on the Max의 가치는 n개의 대상자산 중에서 가장 높은 것을 선택하여 이것의 가격과 행사가격 X간의 차이로부터 구한다. 마찬가지로 Put on the Max의 가치는 n개의 자산 중에서 가장 낮은 대상자산의 가격을 행사가격에서 차감하여 구한다.

예를 들면, 5개 주식의 수익률을 대상으로 하고, 행사가격이 10%인 Call on the Max에서 5개 주식이 옵션기간 중에 각기 5%, 9%, −7%, −13%, 15%의 수익률을 기록하였다면 15%의 수익률이 지급된다.

2) 포트폴리오옵션

포트폴리오옵션은 바스켓옵션과 매우 유사하지만 사용하는 가중치가

서로 다른데, 포트폴리오옵션에서는 각 자산의 수량을 가중치로 사용한다. 예를 들어, 주식에 대한 콜 포트폴리오옵션의 경우

$$\text{콜 포트폴리오 옵션의 가치} = \max\left[\sum_{i=0}^{n} n_i S_i^T - X,\ 0\right]$$

이다. 단, n_i는 S_i 주식의 수량이다. (n_i는 전체 포트폴리오에서의 비중이 아니다)

3) 다중 행사가격옵션

다중 행사가격옵션(multi-strike options)은 여러 개의 행사가격을 가지고 있다. 콜옵션의 경우

$$\text{콜 다중 행사가격 옵션의 가치} = \max[S_1^T - X_1,\ S_2^T - X_2,\ \cdots,\ S_n^T - X_n,\ 0]$$

이다. 풋옵션은 반대의 경우로 생각하면 된다.

4) 피라미드옵션

피라미드옵션(pyramid options)은 각 자산의 가치와 해당 행사가격 간의 차이의 절대값을 차곡차곡 더한 값과 특정 행사가격 간의 차이를 구하여 계산하는 것이다.

콜 피라미드 옵션의 가치

$$= \max[\,|\,S_1^T - X_1\,| + |\,S_2^T - X_2\,| + \cdots + |\,S_n^T - X_n\,|\; X,\ 0]$$

풋 피라미드 옵션의 가치

$$= \max[\,X - |\,X_1 - S_1^T\,| + |\,X_2 - S_2^T\,| + \cdots + |\,X_n - S_n^T\,|,\ 0]$$

5) 마돈나옵션

마돈나옵션은 피라미드옵션과 비슷한 수익구조를 가진다. 즉, 미리 정한 행사가격을 n차원 평면에 찍고, 만기시점에 자산가격을 다시 찍은 후 두 점 사이의 거리가 커질수록 손익이 커지게 된다.

마돈나 콜옵션의 가치

$$= \max\left[\sqrt{(S_1^T - X_1)^2 + (S_2^T - X_2)^2 + \cdots + (S_n^T - X_n)^2} - X,\ 0\right]$$

이다. 마돈나 풋옵션은 반대로 생각하면 된다.

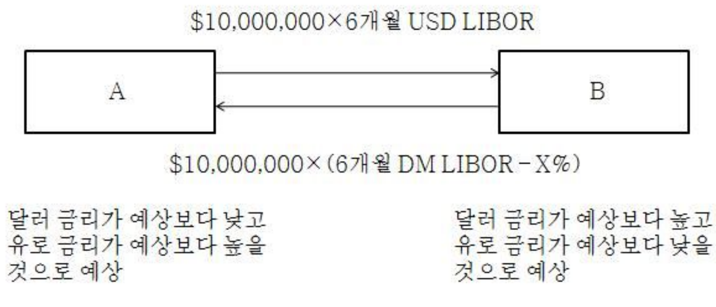
(2) 디프와 콴토

디프스왑(differential swap 또는 diff swap)은 베이시스스왑[7]의 일종으

7) 베이시스스왑이란, 변동금리끼리의 스왑을 말한다. 일반적으로 금융시장에서 변동금리의 기준이 될 수 있는 금리로서는 LIBOR, T-Bill 수익률, CP금리 또는 프라임 레이트 등인데, 차입자들이 이러한 시장에서 자금을 차입하고자 하는 경우,

로 거래하는 한쪽이 특정 통화표시 변동금리이자를 지급하고 상대방은 다른 통화로 표시된 변동금리(기준금리)에다 일정률의 마진을 가감한 금리로 변동금리이자를 지급하며, 지급통화는 서로 같은 통화로 하는 형태이다. 디프스왑은 사용자에게 외환리스크 노출 없이 두 시장의 금리차를 노릴 수 있게 한다.

1990년대 초에는 달러금리가 매우 낮았으나 수익률 곡선이 가파른 우상향이었고, 마르크 금리는 매우 높았으나 수익률 곡선이 가파른 우하향이었던 시기에 매우 인기가 높았다. 예를 들어, A(달러금리를 주는 쪽)는 달러금리가 예상보다 낮은 수준에 머무르고 마르크 금리는 예상보다 높은 수준에 머무를 것으로 예상한 반면에, B(유로 금리를 주는 쪽)는 그 반대로 예상하여 계약을 맺었다고 하면, 이러한 투자자들에게는 <그림 3.4>과 같은 디프스왑이 유용하다.



< 그림 3.4 디프스왑의 거래구조 >

각 해당금리시장에의 접근용이성이나 차입자의 신용상태 등에 따라 차입금리에 차등이 발생하며, 이때 이들 금리의 스프레드를 이용한 스왑거래를 실행함으로써 계약당사자간에 자금조달비용의 경감은 물론 특정 금융시장에의 접근을 보다 용이하게 하는 효과가 있다. 또한 각 시장 간의 불균형도 조정되는 부수적인 효과도 거둘 수 있다. 현재 이용되는 베이시스레이트 스왑은 미국의 프라임레이트와 LIBOR간 또는 1개월 LIBOR와 6개월 LIBOR간 스왑 등이다.

투자자 A는 명목원금 1천만 달러에 대하여 6개월마다 6개월 USD LIBOR[8] 금리를 투자자 B에게 지급하고, 투자자 B는 6개월마다 6개월 Euro LIBOR에서 일정금리차를 조정한 금리를 투자자 A에게 지급한다. 이러한 투자자들에게 디프스왑이 제공됨으로써 거래하는 명목원금이 모두 달러이다. 따라서 미국 내 투자자들에게는 금리차를 노리는 베이시스 거래를 환위험에 대한 노출 없이 행할 수 있다.

하나의 통화로 이루어지므로 통화스왑이라 할 수도 없고, 달러에 독일 유로 금리를 적용하므로 금리스왑이라 할 수도 없는 형태이다. 디스프왑을 헤지하거나 해제하고자 할때, 디스프왑의 매도자는 미달러화로 표시된 유로 금리 리스크를 유로로 표시된 수단으로 헤지할 필요가 있다. 당시의 환율이 초기의 헤지규모를 정하겠지만, 끊임없는 환율변화로 헤지규모가 계속 변할 것이다. 이러한 헤지 조정 비용을 계산하기 위해서는 디프옵션 매도자는 유로 LIBOR($rr_{€}$)와 환율($S_{€/\$}$) 간의 상관관계, 즉 공분산 $Cov(r_{€}, S_{€/\$})$에 대한 가정을 세워야 한다. 이것이 디프스왑과 같은 다중요소 파생상품을 매도하고자 하는 딜러가 직면하는 추가적인 리스크이다. 그래서 디스프왑의 헤지를 위해서는 콴토옵션이라는 매우 복잡한 금융수단의 가격을 결정해야 하는 문제가 남는다.

---

8) LIBOR는 국제금융시장의 중심지인 영국 런던에서 우량은행끼리 단기자금을 거래할 때 적용하는 금리를 말한다. 런던은행간 금리(London inter-bank offered rates)의 머리글자를 따서 리보(LIBOR)라고 부른다. 국제금융시장의 기준금리로 활용되고 있으며 금융기관이 외화자금을 들여올 때 기준으로 삼는 금리이다. 외화차입기관의 신용도에 따라 금리가 달라지는데 신용도가 낮을수록 더 높은 금리가 붙는다. 이때 가산금리(spread)가 붙었다고 표현한다. 예를 들어 리보가 연 8.5%인데 실제 지급해야 할 금리가 연 9.5%라면 그 차이인 1%가 가산금리로 금융기관의 수수료 수입이 된다. 가산금리가 높게 적용되는 것은 국제금융시장에서 은행의 대외신인도가 그만큼 떨어지고 있다는 의미이다.

콴토옵션(quanto option)은 투자자가 서로 다른 통화로 표시되는 자산을 보유할 때 생기는 외환 리스크를 제거하고자 하는 옵션이다. 수익은 하나의 대상자산 가격에 의해서 결정되지만 위험은 다른 자산의 가격에 의해 결정되는 것으로 수량조정옵션(Quantity-Adjusting Option)의 약자이다.

예를 들어, 독일 주가지수(DAX)를 살 수 있는 권리를 주는 유럽식 옵션을 살 경우 이 옵션의 미달러화 가치는

$$S_T \times \max[0,\ DAX - X]$$

이다. 이것은 환율 S_T, 환율의 변동성, 환율과 대상자산(DAX) 간의 상관관계의 영향을 받는다. 외환 리스크를 제거한 옵션은 환율을 옵션이 발행된 날의 환율 S_0로 고정시킴으로써 가능하다. 즉,

$$S_0 \times \max[0,\ DAX - X]$$

가 된다. 그러므로 투자자는 보유하고 있는 대상자산의 통화가 자국의 통화보다 절상되는 것에 의한 손실 리스크를 피할 수 있지만, 역으로 자국통화가 절상될 경우의 혜택은 포기해야 한다. 디프스왑과 마찬가지로 콴토옵션 매도자에게는 상관리스크(correlation risk)가 추가된다.

(3) 바스켓옵션

바스켓옵션(basket option)은 레인보우옵션의 한 변형으로 개별자산의 가치에 대해서가 아니라 특정한 자산들로 구성된 그룹의 총가치에 근거하여 수익이 계산되는 옵션이다. 여러 자산과 연관된 옵션 중에서 가장 보편적인 것으로 이득이 자산포트폴리오 또는 바스켓의 가치에 의존하는 옵션이다. S_1^T, S_2^T, S_3^T, $\cdots$, S_n^T이 n개의 서로 다른 대상자산의 만기 때의 가치라 하고, ω_1, ω_2, ω_3, $\cdots$, ω_n을 각 자산의 전체 포트폴리오에 대한 비중(가중치)이라 하면 바스켓옵션의 손익은

$$\max\left[\sum_{i=0}^{n} w_i S_i^T - X,\ 0\right]$$

로 나타낼 수 있다. 행사가격은 가중평균치에 대한 $(1\pm\alpha\%)$로 계산한다. α는 상수이다.

바스켓옵션은 포트폴리오의 이론을 응용한 것으로 주로 외환시장에서 많이 사용되며, 기준통화에 대하여 여러 통화로 구성된 통화의 묶음을 대상물로 한 옵션이다. 바스켓을 구성하는 자산들의 가격이 완전한 양의 상관관계를 가지지 않는 한 변동성이 작아지므로 개별옵션보다 프리미엄이 저렴하다.

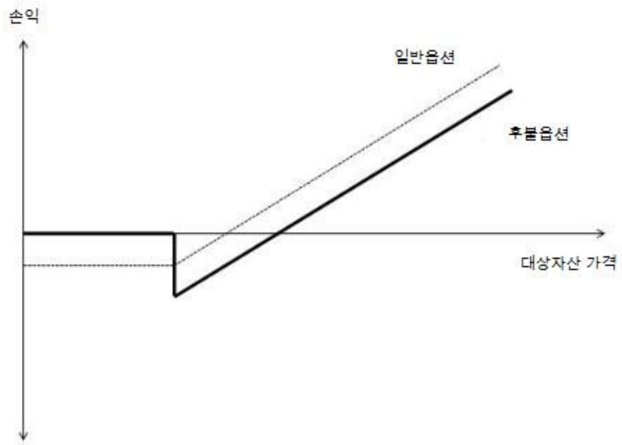
예를 들면, 세계 각국에 상품을 수출하는 수출업자가 달러나 엔화, 유로화 등에 대해 원화의 가치가 상승하는 것을 피하고자 할 때 두 가지 방법이 있다. 하나는 달러화나 엔화 및 유로화에 대한 각각의 풋옵션을 매입하는 것이고, 다른 하나는 이 세 통화로 구성된 바스켓에 대한 옵션

을 매입하는 것이다. 이들 세 통화가 완전한 상관관계를 가지지 않는 한, 바스켓 가치의 변동성은 개별통화에 대한 변동성보다 작을 것이기 때문에 옵션은 각각의 통화에 대한 개별옵션 가치의 합계보다는 저렴하다.

4. 계약조건이 변형된 옵션

(1) 후불옵션(pay later option)

후불옵션(pay later option)은 조건부 프리미엄옵션(contingent premium option) 혹은 제로 프리미엄옵션(zero premium option)이라고도 한다. 혹은 COD(cash-on-delivery)라고도 한다. 이름에서 알 수 있듯이 이 옵션 매수자는 조건에 따라 프리미엄을 지급하기도 하고 지급하지 않기도 한다. 이 옵션은 옵션매입자가 옵션 가치의 지불을 매입시점에 하지 않고 옵션이 행사되는 경우에만 하는 형태이다. 그런데 이 행사는 만기(유럽식 옵션의 경우) 또는 원하는 시점(미국식 옵션의 경우)에 옵션이 내가격이면 무조건 해야 하며, 이는 행사로 옵션 보유자가 얻을 옵션 내재가치가 그가 지불해야 할 옵션 가격보다 작은 경우에도 해당한다. 물론, 옵션이 배내가격 상태로 만료되면 옵션은 행사되지 않고 옵션 매입자는 옵션 가격를 지불할 의무가 없으며 이는 이 옵션이 보유자에게 주는 최대 장점이다. 후불옵션의 매입자의 손익구조는 <그림 3.5>와 같다.



< 그림 3.5 후불 콜옵션의 매입자의 손익구조 >

옵션 매도자가 프리미엄을 받을 수 없는 경우도 있기 때문에 일반옵션보다 프리미엄이 비싸다. 보통 후불옵션의 프리미엄은 일반적인 옵션 프리미엄의 두 배 정도이다. 혹은 후불옵션의 프리미엄은 일반옵션의 프리미엄을 그 델타로 나누 값을 이용하여 대략적으로 구하기도 한다.

만기 때에 대상자산의 가격이 감소하면 조건부 후불옵션 매수자는 프리미엄을 지불하지 않는다. 그러나 만일 대상자산의 가격이 그대로 있거나 상승하면, 옵션은 자동적으로 형성되고 매수자는 만기일의 현물가격과 행사가격의 차이보다 처음에 정했던 프리미엄이 크다면 그 차에서 프리미엄을 뺀 만큼 지불해야 한다. 그러나 현물가격이 행사가격보다 높은 상태로 마감되어 충분히 큰 폭으로 오른 상태에서 마감되지 못하면 당초 정했던 프리미엄과 현물가격 상승분 간의 차이만큼 매입자에게 손실이 발생한다. 후불 콜옵션의 가치는

$S_T > X$ 이면, $S_T - X - premium$

$S_T \leq X$ 이면, 0

이다. 여기에서 'premium'은 이 후불옵션의 가치이다.

(2) 이원옵션(binary option)

이원옵션(binary option)은 디지털옵션(digital option)이라고도 하며, 이 옵션은 만료 또는 행사시 보유자에게 일반적인 옵션과 달리 내가격 정도에 비례하는 금액이 아니라 사전에 약정한 다른 일정 조건하에 일정금액을 지급하도록 한다.

이 옵션의 구체적인 계약조건에는 여러 가지 형태가 있을 수 있지만 그 중 중요한 몇 가지를 살펴본다.

ⅰ. 전무옵션(all-or-nothing option) : 이 옵션은 만료시 내가격상태일 경우에만 고정된 계약금액을 지급하며 그 외 경우에는 일반적인 옵션과 마찬가지로 무가치하게 소멸된다. 이원옵션의 기본적인 유형으로서 현금이원(cash-or-nothing) 옵션이라고도 부른다.

ⅱ. 자산무옵션(asset-or-nothing) : 이것은 위 옵션과 마찬가지로 만료시 내가격상태가 아니면 무가치해지지만 내가격상태로 만료될 때에는 계약시약정한 고정된 금액이 아니라 만료시점의 기초물 시가에 해당하는 금액을 지불하는 형태이다. 이 옵션의 변형 하나는 만료시점의 지불금액으로 기초물시가 전액이 아니라 이로부터 사전에 약정한 일정

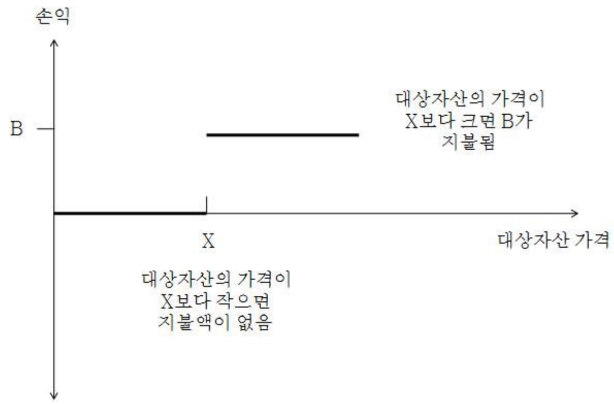
한 고정금액을 뺀 금액으로 하는 형태이며 이는 digital-gap 옵션이라 고도 한다.

iii. 일촉옵션(one-touch option) : 여기서는 옵션이 만료시점에 이르는 도중에 한 번이라도 내가격 상태에 도달한 적이 있으면 고정된 약정금액을 지급하며 그 외의 경우에는 무가치하게 소멸된다. 약정금액의 지불시점은 내가격 상태 도달시점 직후 또는 옵션의 만료시점으로 한다.

iv. 구간옵션(range option) : 이 유형은 옵션이 만료나 행사시 기초물가격이 사전에 정한 특정구간 내에 위치하면 약정된 고정금액을 지급하며 그 외의 경우에는 무가치하게 소멸된다.

v. 시간옵션(timing option) : 이 옵션의 만료시나 행사시 옵션 보유자가 지급받는 금액은 옵션 구입시점부터 만료나 행사시까지와 기간 동안 기초물가격이 사전에 정한 특정구간이나 영영 내에 위치하는 거래일수에 비례하는 금액이 된다.

이원옵션은 대상물의 가격이 정해진 행사가격에 도달하면 고정액이 보유자에게 지불되는 옵션이다. 일반적인 옵션과 마찬가지로 이원 옵션에도 콜과 풋이 있다. 이원 콜옵션에 대해서는 만기 때에 대상자산의 가격이 행사가격보다 높을 때 미리 정한금액을 지불하고, 풋옵션에 대해서는 만기 때에 대상자산의 가격이 행사가격보다 낮을 때 미리 정한 금액을 지불하게 된다. <그림 3.6>의 경우는 유럽식 일반옵션과 비슷한 이원옵션이다.



< 그림 3.6 이원옵션의 손익구조 >

이원옵션 중에서 전무옵션과 자산무옵션의 가치평가는 일반적인 옵션의 가치평가모형을 이용하여 쉽게 할 수 있다. 콜을 예로 들면 이론적으로 일반적인 콜의 매입은 자산무옵션의 매입과 동시에 전무옵션을 매도하면 합성할 수 있다. 이에 따라 유럽식 이익부 기초물 대상 블랙-숄즈 콜옵션모형으로부터 다음과 같이 자산무옵션과 전무옵션의 가치평가식을 끌어낼 수 있다.

유럽식 이익부 기초물 대상 콜옵션의 가치 =

$$e^{-qT}SN(d_1) - e^{-rT}KN(d_2)$$

자산무 콜옵션의 가치 = $e^{-qT}SN(d_1)$

전무 콜옵션의 가치 = $e^{-rT}QN(d_2)$

(여기서 Q는 만료시 지급하는 고정금액)

5. 중첩옵션

일정한 프리미엄을 주고 미래의 정해진 시점에 특정한 옵션을 사거나 팔 수 있는 권리를 매수자에게 부여하는 옵션을 옵션의 옵션(option on option) 혹은 중첩옵션(compound option)이라 한다. 위험에 대한 대비가 필요할 수도 있고 필요치 않을 수도 있는 불확실한 상황에서는 중첩옵션이 유리하다. 위험발생 여부가 불확실할 때에 위험에 대한 헤지를 위하여 옵션을 매수했는데, 만일 위험이 발생하지 않는다면 옵션을 매입한 것으로 인해 손해가 발생할 수 있다. 이러한 경우에는 위험을 헤지하기 위해 직접 그 위험에 대한 옵션을 매입하기보다는 이를 위한 옵션을 살 수 있는 옵션을 매입하는 것이 더 저렴하다. 즉, 위험발생 여부의 불확실성에 대한 헤지를 위하여 중첩옵션이 사용될 수 있다. 중첩옵션은 콜옵션에 대한 콜옵션, 콜옵션에 대한 풋옵션, 풋옵션에 대한 콜옵션, 풋옵션에 대한 풋옵션 등으로 분류될 수 있다. 일반적으로 중첩옵션은 보통 옵션보다 변동성에 대하여 훨씬 더 민감하게 반응한다.

콜옵션(子 콜옵션 : 대상자산에 대한 옵션)에 대한 콜옵션(母 콜옵션 : 대상자산에 대한 옵션의 옵션)의 가치를 보기 위해 자 콜옵션의 가치를 Q라 하자. 그러면

$$\text{모 콜옵션의 가치} = \max[Q_t - X_M,\ 0 \mid t]$$

이다. 단, 모 콜옵션의 만기는 t, X_M은 모 콜옵션의 행사가격, Q_t는 자 콜옵션의 t시점에서의 가치이다. 그리고 자 콜옵션의 만기가치는

$$Q = \max[S_T - X_S,\ 0 \mid T > t]$$

이다. S_T는 대상자산의 만기가격이고, X_S는 자 콜옵션의 행사가격, $T(>t)$는 자 콜옵션의 만기이다.

예를 들어, 한국기업이 중국에 대형 올림픽 경기장을 건설하는 프로젝트에 참여한다고 하자. 이 프로젝트를 수주 받으면 외환 리스크에 노출되므로 이 비용을 입찰비용 산정에 포함시켜야 한다. 그러나 입찰에 실패할 수도 있으므로 미리 선도계약을 맺거나 불필요해질 수도 있는 옵션에 대하여 비싼 프리미엄을 지불하는 것을 원치 않을 것이다. 게다가 변동이 심한 환율에 대한 옵션 프리미엄 비용이 가산되어야 하는데 이 비용을 모두 가산하게 되면 입찰 경쟁력이 떨어질 수 있다. 이러한 경우 위안화를 팔 수 있는 풋옵션을 직접 매입하기보다는 그러한 풋옵션을 살 수 있는 콜옵션을 매입하는 것이 훨씬 저렴하다. 수주 받게 되면 이 중첩옵션을 행사할 것이지만, 수주에 실패하면 원래의 옵션보다 훨씬 저렴한 중첩옵션의 프리미엄만 손해 보면 된다.

중국정부가 발주한 올림픽 경기장 건설에 입찰하는 한국 건설업체의 경우, 낙찰여부는 3개월 후에 결정되고, 수주 받은 후 2년 후에 만기가 되는 위안화 매도권의 풋옵션을 매입할 필요가 있다. 양국 간의 환율 및 금리가 아래와 같다고 하자.

원/위안 환율	170원	원화 금리	연 7%
변동성	15%	위안화 금리	연 10%

위와 같은 조건하에서의 행사가격이 170원이고 만기가 2년 후인 풋옵

션의 프리미엄이 12.25원/위안이라고 하자. 이러한 풋옵션에 대한 콜옵션과 원래의 풋옵션을 비교하면 <표 3.2>과 같다.

구분	중첩옵션	기초옵션
종류	풋옵션에 대한 콜옵션	위안화에 대한 풋옵션
만기	지금부터 3개월 후	지금부터 2년 후
행사가격	위안당 12.25원	위안당 170원
프리미엄	위안당 2.30원	위안당 12.25원

< 표 3.2 중첩옵션과 기초옵션의 비교 >

기초옵션은 위안화에 대한 풋옵션이지만, 중첩옵션은 그러한 풋옵션을 살 수 있는 콜옵션이다. 기초옵션의 만기는 2년이지만, 중첩옵션의 만기는 입찰결과가 공표되는 3개월 후가 된다. 기초옵션의 행사가격이 170원이며 이에 대한 프리미엄이 위안당 12.25원인데, 중첩옵션의 행사가격은 12.25원이고 중첩옵션에 대한 프리미엄은 위안당 2.30원으로 기초옵션 프리미엄의 1/5 이하이다. 중첩옵션으로 헤지한 후 낙찰되었을 때에는 결과적으로 14.55원의 프리미엄이 지출되는 것이다.

기초옵션의 프리미엄이 위안당 12.25원이라고 해도 만일 수주가가 10억 위안이라고 하면 풋옵션 프리미엄만 122억 5,000만 원이 된다. 이 금액이 입찰단계에서 비용에 가산된다면 입찰경쟁력에 큰 영향을 줄 것이다. 게다가 이러한 비용을 들여 풋옵션을 매입했는데 수주 받지 못한다면 프리미엄 손실이 적지 않다. 이 기간 중에 위안화가 절상되면 풋옵션의 가치

도 하락할 위험이 있다. 옵션으로 헤지하는 목적은 노출된 환위험을 상쇄시키고자 하는 것인데, 기초 환포지션이 발생하지 않으면 매입한 옵션 자체가 환위험에 노출되기 때문에 문제를 해결하는 것이 아니라 오히려 문제를 일으키게 된다.

대부분의 중첩옵션은 외환시장이나 금리시장에서 사용되고, 주식시장에서도 일부 사용된다. 중첩옵션에 대한 가장 중요한 요소는 모 옵션과 자옵션의 변동성이기 때문에 중첩옵션은 변동성 증가 쪽에 베팅하기 위한 거래에 많이 사용된다. 중첩옵션에 대한 변형 형태로 캡션과 플로어션이 있다.

캡션(caption) 혹은 캡에 대한 옵션(options a cap)은 금리스왑 곡선의 형태와 변동성에 대한 예측을 반영한다. 만약 USD LIBOR 수익률 곡선의 경사가 급하다면, 가까운 장래에 단기금리가 상승할 것임을 시사하므로 캡 매수자의 비용이 클 것이다. 앞으로 수익률 곡선의 기울기가 완만해지고 변동성이 작아질 것이라 예상하는 헤저는 캡을 당장 사기보다는 나중에 사는 것이 비용을 절감할 수 있을 것으로 생각할 것이다. 이러한 헤저는 캡을 사기보다는 캡션을 매수함으로써 비용을 절감할 뿐 아니라 예상이 빗나갔을 경우의 손실도 일정 한도로 제한할 수 있다.

플로어션(floortion)이나 플롭션(floption)은 플로어에 대한 옵션이다.

제 4 장 결 론

전 세계적으로 금융환경의 급격한 변화를 겪게 되면서 금융기관은 물론 모든 기업의 재무위험이 증가하고 그에 따라 위험을 효율적으로 관리할 수 있는 파생상품에 대한 관심이 높아지고 있다. 현재 한국의 파생상품시장은 15년이 되어가며, 하루에 64조원이 거래되는 시장으로 급성장했다. 1996년 파생상품시장의 첫 거래 당시, 거래금액이 1500억여 원 수준이었던 것을 감안하면 괄목할 만한 성장세다. 이렇듯, 파생상품 거래량은 2년 연속 세계 1위를 차지하고 있다.

금리, 주가, 환율 등 기초자산의 가격이나 자산가치 지수의 변동에 의해 그 가치가 결정되는 금융계약인 파생상품은, 구체적으로 선물, 옵션, 스왑 등을 말한다. 이러한 파생상품시장이 급성장하는 이유는 파생상품을 이용함으로써 가격변동에 대한 위험을 회피할 수 있고, 시장참가자들에게 거래시장 가격에 대한 정보를 미리 제공하여 합리적인 의사결정을 가능하게 한다. 또한 필요시마다 보유 또는 보유예정 자산의 구성을 탄력적으로 조정할 수 있어 자금 흐름에 탄력성을 제고시키며, 일부 증거금으로 계약자산의 전부를 보유한 것과 같은 효과를 얻을 수 있어 비용절감 효과를 기대할 수 있고, 시장참가자들에게 위험전가의 용이, 저렴한 비용 등으로 금융시장의 효율성을 증대시킨다는 기능 때문이라 생각된다.

파생상품 중에서 특히 이색옵션에 관하여 알아보았는데, 이색옵션에 대하여 알아보기 전에 옵션의 가격결정 모형에 관하여 알아보았다. 옵션은 기초자산을 미리 정해놓은 가격으로 미래 일정한 시점에 가서 사거나 팔

수 있는 권리가 내재된 상품이다. 이러한 옵션의 기능으로는 헤지, 투자위험 제한, 다양한 투자전략, 레버리지 효과의 네 가지가 있다. 헤지는 옵션의 만기일에 기초자산의 가격변동에서 오는 위험을 회피할 수 있는 기능이고, 투자위험 제한 기능은 옵션을 매수함으로써 이익의 폭은 제한이 없으나 손실은 프리미엄으로 제한되는 보험효과이다. 다양한 투자전략은 기초자산의 가격변동과 연계하여, 풋/콜, 만기일, 행사가격 등을 선택하는 등의 다양한 투자전략을 구사할 수 있다. 마지막으로 레버리지 효과는 적은 투자자금으로 큰 이익을 얻을 수 있는 레버리지가 큰 투자수단의 기능을 가진다. 이러한 옵션의 가격을 도출할 수 있는데, 이항나무 모형, 블랙-숄즈 모형, 삼항나무 모형을 바탕으로 옵션의 가격결정모형을 알아보았다.

마지막으로 다양한 이색옵션의 종류와 특성에 관하여 알아보았다. 이색옵션은 대표적인 장외옵션의 예로 거래소에서 거래되는 전형적인 옵션과는 달리 특이한 구조를 갖는 옵션을 말하며, 다양한 구조와 투자목적에 사용할 수 있도록 투자자의 다양한 요구에 맞게 맞춤식으로 제공되는 옵션이다. 이색옵션은 크게 시간종속옵션, 가격경로 종속옵션, 다중 대상자산 옵션, 계약조건이 변형된 옵션, 중첩옵션으로 나눌 수 있다.

시간종속옵션은 다른 옵션들보다 특히 시간에 더욱 민감하거나 시간에 종속적인 옵션으로, 옵션의 가치가 시간에 따라 달라지는 옵션이다. 선택자옵션(chooser option)과 선도옵션(forward option)이 시간종속옵션에 속한다. 선택자옵션은 매입시점에 콜인지 풋인지를 정하지 않고, 매입 후 일정시점(옵션 만료 이전 또는 만료시)에 이르러 매입자가 유리한 쪽으로 선택지정을 할 수 있는 옵션이다. 선도옵션은 지연옵션(delayed option)이

라고도 하며, 옵션 가격 지불은 현재에 하지만 옵션 계약의 효력발생 여부는 미래의 일정시점으로 연기하는 형태이다.

경로종속옵션(path-dependent option)은 옵션의 만기가치가 옵션만기일의 대상물 가격수준뿐 아니라 옵션계약기간 동안의 대상물 가격의 변화과정에 의해서도 영향을 받는 옵션으로 평균옵션(average option), 장애옵션(barrier option), 룩백옵션(lookback option), 래더옵션(ladder option), 클리켓옵션(cliquet option), 샤우트옵션(shout option), 캡(cap)과 플로어(floor)가 이에 속한다. 평균옵션은 아시안옵션(asian option)이라고도 하며, 행사시나 만료시 수익결정에서 그 시점의 기초물가격과 행사가격 중에서 하나를 계약 시에 설정한 일정기간 동안(옵션 유효기간 내에)에 움직인 기초물가격의 평균값으로 옵션의 가치를 결정하는 옵션이다. 이항모형을 바탕으로 이 옵션의 가치계산을 해보았고, Maple13으로 평균옵션의 일반적인 가격결정을 프로그래밍 하였다. 장애옵션은 기초자산의 가격이 일정 기간 동안에 일정 수준에 도달했는지 여부에 의하여 이득이 결정되는 옵션이다. 얼마 전에 중소수출업체들이 추가적인 비용 없이 환위험을 줄일 수 있다고 하여 매수했다가 환율이 급변동하는 바람에 큰 손실을 입은 KIKO 옵션이 장애옵션 상품이다. KIKO는 knock-in-knock-out 옵션으로, 환율이 일정 범위 안에서 움직일 경우 미리 약정한 환율에 약정금액을 팔 수 있도록 한 파생상품이다. 환율이 상하 일정한 범위 내에 있을 경우 시장가보다 높은 지정환율(행사가)로 외화를 팔 수 있으며, 환율이 지정한 범위 하단을 내려가더라도 계약이 무효가 되어서 기업은 손실을 입지 않는다. 그러나 환율이 급등하여 지정환율 상단을 넘어가면 계약금액의 2, 3 배를 시장가보다 낮은 지정환율로 팔아야 하므로 기업이 손실을 입게 된다. 환리스크를 헤징하기 위한 방안으로 활용되고 있으나 환

율 급등 시에는 엄청난 손실을 초래한다. 장애옵션을 이용한 예금으로 웨딩케이크 스타일도 있다. 원금보존추구형 상품으로 1, 2차 Range를 설정해 두고, 투자자에게 높은 수익률을 보장하는 1차 Range의 상·하방 중 만기 이전에 혹시 Hit한다 하더라도 당시 은행 정기예금 금리보다 높은 수익률을 보장하는 2차 Range가 있어 은행권 투자자를 상대로 안정성이 부각된 상품이다. 그러나 미 달러약세에 따라 환율이 하락하면서 투자수익율이 저조하여, 주가연동상품과 달리 투자의 선순환구조가 이루어지지 못하였다. 이러한 장애옵션을 삼항나무 모형을 바탕으로 Maple13으로 일반적인 가격결정을 프로그래밍을 하였다. 룩백옵션(lookback option 또는 No Regrets Option)은 평균행사가격 옵션과 마찬가지로 행사가격을 옵션계약시점이 아닌 옵션만료시점 또는 행사시점(미국식 옵션의 조기행사시)에 결정한다. 결정방범은 주어진 기초물이 계약시점에서 정한 기간 동안 거친 가격변동과정 중에서 옵션보유자에게 가장 유리한 가격을 행사가격으로 택하는 것이다. 룩백옵션의 가치계산을 이항모형을 바탕으로 해보았고, 일반적인 가격결정 프로그래밍도 Maple13으로 해보았다. 래더옵션(ladder option)은 옵션기간 중에 행사가격을 재조정하는 것이 특징이다. 기초물가격을 기준으로 재조정하며, 계약시점에 행사가격을 정하지만 기초물가격에 대해 단계적인 일련의 가격수준(콜옵션의 경우 행사가격보다 높고, 풋옵션의 경우 행사가격보다 낮음)을 미리 설정해 놓고 옵션기간 중에 기초물 시가가 그 중 각 수준에 도달할 때마다 그 시점에 상관없이 그 기초물 시가를 행사가격으로 변경한다. 행사가격의 재조정시마다 그 직전 재조정 시점과 당 재조정 시점간에 형성된 옵션의 내재가치는 실현된 것으로 인정되어 옵션보유자에게 지급이 보장된다. 클리켓옵션은 래칫옵션(rachet option)이라고도 하며, 옵션기간 중에 행사가격이 주기적으로

재설정되는 것이 특징이다. 행사가격의 재조정시점마다 그 직전 재조정 시점과 당 재조정 시점간에 형성된 옵션의 내재가치는 실현된 것으로 인정되어 옵션 보유자에게 지급이 보장된다. 어떤 재조정시점에 기초물 시가가 직전 재조정 시점의 기초물 시가보다 하락한 경우라면 내재가치발생 없이 행사가격만 하락 조정된다. 샤우트옵션은 클리켓옵션과 래더옵션처럼 옵션 행사가격을 일단 계약시점에 정한 후, 옵션기간 중에 재조정하며 해당 분기 내재가치를 옵션 보유자가 확보하는 것이 특징이다. 샤우트옵션의 행사가격 재조정 시점은 옵션 보유자가 원하는 임의의 시점으로, 보유자가 최적으로 판단한 수준으로 행사가격을 바꿀 수 있다. 마지막으로 캡과 플로어는 동일한 대상에 대하여 행사가격도 동일하지만, 중복되지 않는 일련의 계약기간을 갖는 옵션 묶음이다.

다중 대상자산 옵션은 옵션의 대상물이 하나가 아닌 복수로서 옵션의 가치가 복수의 대상물의 가격수준과 대상물 간의 상관관계에 의해 결정된다. 대표적인 것으로 레인보우옵션, 디프와 콴토, 바스켓옵션 등이 있다. 레인보우옵션(rainbow option)은 둘 또는 그 이상의 자산 중에서 실적이 가장 좋은 것의 손익구조에 따라 가치가 결정되는 것이다. 레인보우옵션의 변형 형태로 미니맥스옵션, 포트폴리오옵션, 다중 행사가격옵션, 피라미드옵션, 마돈나옵션이 있다. 디프스왑(differential swap 또는 diff swap)은 베이시스스왑의 일종으로 거래하는 한쪽이 특정 통화표시 변동금리이자를 지급하고 상대방은 다른 통화로 표시된 변동금리(기준금리)에다 일정률의 마진을 가감한 금리로 변동금리이자를 지급하며, 지급통화는 서로 같은 통화로 하는 것이다. 콴토옵션(quanto option)은 투자자가 서로 다른 통화로 표시되는 자산을 보유할 때 생기는 외환 리스크를 제거하고자 하는 옵션이다. 바스켓옵션(basket option)은 레인보우옵션의 한 변형

으로 개별자산의 가치에 대해서가 아니라 특정한 자산들로 구성된 그룹의 총 가치에 근거하여 수익이 계산되는 옵션이다.

계약조건이 변형된 옵션은 일반적인 옵션의 거래 조건 중에서 어떤 특정 조건을 변형시킨 옵션이다. 후불옵션과 이원옵션이 이에 속한다. 후불옵션(pay later option) 또는 조건부 프리미엄 옵션(contingent premium option) 또는 제로 프리미엄 옵션(zero premium option)은 옵션매입자가 옵션 가치의 지불을 매입시점에 하지 않고 옵션이 행사되는 경우에만 하는 것이다. 이원옵션(binary option)은 디지털 옵션(digital option)이라고도 하며, 이 옵션은 만료 또는 행사시 보유자에게 일반적인 옵션과 달리 내가격 정도에 비례하는 금액이 아니라 사전에 약정한 다른 일정 조건하에 일정금액을 지급하도록 한다.

중첩옵션(compound option)은 옵션에 대한 옵션이다. 일정한 프리미엄을 주고 미래의 정해진 시점에 특정한 옵션을 사거나 팔 수 있는 권리를 매수자에게 부여하는 옵션을 옵션의 옵션(option on option) 혹은 중첩옵션(compound option)이라 한다.

일반적인 옵션에서 옵션의 계약조건, 예를 들어 행사가격, 만기시점, 현물가격 산정방법, 손익시점 등에 변화를 주어 다양한 위험-손익구조를 나타내는 이색옵션이 출현하였고, 금융기관 위주로 장외시장에서 거래되었다. 이와 같은 현상은 일반옵션이 계약조건의 표준화로 일반 투자자의 보편적인 위험-손익구조 충족에는 별다른 문제가 없지만 기관투자자 등의 특수한 형태의 위험-손익구조를 충족시키기에는 부족함에 따른 것으로 보인다. 위에서 언급한 이색옵션은 일반적인 옵션을 합성하는 것보다 상대적으로 저렴하고, 거래소가 존재하지 않기 때문에 고객의 요구에 따라

유연하고 다양한 구조를 가질 수 있으며, 필요에 따라 매우 탄력적으로 조절할 수 있다는 특성이 있음을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] 강태훈, 금융선물옵션과 장외파생상품, 시그마프레스 (2009)

[2] 김운섭, 강철준, 노상규, 파생금융상품의 이해, 한국금융연수원 (2009)

[3] 유인금, 김정태, 한눈에 보는 파생상품, 팜파스 (2008)

[4] 이창복, 윤창현, 금융선물·옵션거래, 한국금융연수원 (2008)

[5] 이필상, 정은호, 조한용, 선물·옵션, 법문사 (2005)

[6] Barles, G., Daher, C., Romano, M., Convergence of numerical schemes for parabolic equations arising in finance theory, Math. Models Methods Appl. Sci. 5 125 – 143. (1995)

[7] Barone-Adesi, G. & Whaley, R. E. Efficient analytic approximation of American option values. Journal of Finance, 42, 301 – 320. (1987)

[8] B. Goldman, H. Sosin, and M. A. Gato, "Path-Dependent Options : Buy at the Low, Sell at the High", Journal of Finance, 34 (1979)

[9] Black, F. & Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81, 637 – 659. (1973)

[10] Boyle, P. P. Options: A Monte Carlo Approach, Journal of Financial Economics, 4, 323 – 328. (1977)

[11] Boyle, P. P. Option valuation using a three-jump process. International Options Journal, 3, 7 – 12. (1986)

[12] Cox, J. C., Ross, S., & Rubinstein, M. Option pricing: A simplified approach. Journal of Financial Economics, 7, 229-264. (1979)

[13] Easton, S. A. A note on modified lattice approaches to option pricing. Journal of Futures Markets, 16, 585-594. (1996)

[14] Gerbessiotis, A.V., Trinomial-tree based parallel option price valuations, Parallel Algorithms Appl. 18 181 - 96. (2003)

[15] Harrison, J. M., & Kreps, D., Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. Journal of Economic Theory, 20, 381-408. (1979).

[16] Harrison, J. M., & Pliska, S. R., Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. Stochastic Processes and their Applications, 11, 323-337. (1981)

[17] Hull, J. C., Options, Futures, & Other Derivatives, Prentice-Hall, Inc. (2000)

[18] Hull, J. C., & White, A. The use of control variate technique in option-pricing. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 23(2), 237 - 251. (1988)

[19] Jarrow, R., & Rudd, A. Option pricing. Homewood, IL: Dow Jones - Irwin. (1983)

[20] Jarrow, R., Volatility: New Estimation Techniques for Pricing Derivatives, Risk Books, London, (1998)

[21] Jiang, L., Dai, M., Convergence of binomial tree methods for European/American path-dependent options, J. SIAM Numer. Anal. 42

[22] J. Ingersoll, Theory of Financial Dedision Making, (Towata, NJ : Rowman and Littlefield, 1987)

[23] John C. Hull, Fundamentals of Futures and Options Markets + Derivagem, Prentice Hall (2007)

[24] Lax, P. D., Richtmyer, R. D., Survey of the stability of linear finite difference equations. Comm. Pure Appl. Math. 9 267-293 (1956)

[25] Markowitz, H., (1959), Portfolio Selection: Efficient diversification of investment. John Wiley www.wiley.com

[26] R. Geske, "The Valuation of Compound Options", Journal of Financial Economics, 7 (1979)

[27] Richtmyer, R.D., Morton, K.W., Difference Methods for Initial-Value Problems, Interscience Publishers, New York, 1994.

[28] R. Merton, "Theory of Rational Option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (1973)

[29] Rubinstein, M., On the relation between binomial and trinomial option pricing models, Berkely Research Program in Finance Working Paper RPF-292, 2000. This paper is available on-line at: <http://hass.berkeley.edu/finance/WP/rpflist.html>.

[30] Salih N. Neftci, An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Academic Press (1996)

[31] Steven E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model, Springer (2004)

[32] Steven E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous time Model, Springer (2004)

ABSTRACT

A Study on Types and Characteristics of The Various Exotic Options

An, Yeon Hwa
Major in finance · insurance
The Graduate School of Education
Sungshin Women's University
Supervised By Kim, Ju Hong Ph.D.

We study derivatives. Investors are growing more and more interested in derivatives because of a globally sudden change in financial environment. So, it becomes more important for us to study the derivatives. First, we examine significance and functions of derivatives. Second, we research pricing model of options that is a kind of derivatives with using option pricing model based on binary tree model, Black-Scholes model and trinomial tree model. Finally, we investigate exotic options which is a type of over-the-counter options. They have unique structures and are different from the general options that deal on the Exchange. We investigate types and characteristics of the various exotic options. The exotic options are offered properly to

investors for their varied demands as they are able to use diverse structures and investment purposes.

부　　록

< 격자모델과 블랙-숄즈 방정식의 관계 >

이항나무 모델의 자산변동은 기하학적 브라운 운동의 근사(approximation)이므로 짧은 시간간격 Δt동안 현재 자산가격이 S가 $S_u = Su$로 오르고 $S_d = Sd$로 내리는 두 가지 경우를 가정한다. S_u로 오를 때의 전이확률(transition probability)을 p_u라 하면 S_d로 내릴 때의 전이확률은 $p_d = 1 - p_u$가 된다. 이항나무 모형이 수렴하기 위해서 다음과 같은 조건들을 가정한다.

(i) 점프(jump)는 자산가격의 크기와는 독립적이다.
(ii) 이항분포의 평균은 대수정규분포의 평균과 같다.
(iii) 이항분포의 분산은 대수정규분포의 분산과 같다.
(iV) 확률 p_u와 p_d는 $0 < p_u < 1,\ 0 < p_d < 1$이어야 한다.

자산가격이 대수정규분포(lognormal distribution)을 따른다고 가정하면 평균과 분산은 각각

$$E(S_{\Delta t}) = Se^{r\Delta t}, \quad Var(S_{\Delta t}) = S^2 e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)$$

이므로 가정으로부터

$$S_u p_u + S_d p_d = Se^{r\Delta t} \quad \Rightarrow \; up_u + dp_d = e^{r\Delta t}, \qquad \text{(부록.1)}$$

$$S_u^2 p_u + S_d^2 p_d - (Se^{r\Delta t})^2 = S^2 e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1)$$

$$\Rightarrow\ u^2 p_u + d^2 p_d = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}, \qquad (부록.2)$$

$$p_u + p_d = 1,\ 0 < p_u, p_d < 1. \qquad (부록.3)$$

네 개의 미지수 u, d, p_u, p_d에 세 개의 식이 존재함으로 $u = 1/d$의 조건을 추가하면 모든 미지수를 구할 수 있다.

(부록.3)식을 (부록.1)식에 대입하여 p_u에 관해 풀면

$$p_u = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \qquad (부록.4)$$

이다. (부록.2)식으로부터

$$e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} = u^2 p_u + d^2 p_d\ = (p_u u + p_d d)u + (p_u u + p_d d)d - ud. \qquad (부록.5)$$

(부록.1)식을 (부록.5)식에 대입하여 정리하면

$$u + \frac{1}{u} = e^{(r+\sigma^2)\Delta t} + e^{-r\Delta t} = 2 + \sigma^2 \Delta t + O(\Delta t^2).$$

근의 공식을 이용해 u에 관해 풀면

$$u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}(\sigma\sqrt{\Delta t})^2.$$

$\Delta t^{3/2}$이상인 항들을 무시하면

$u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}(\sigma\sqrt{\Delta t})^2 + O(\Delta t^{3/2}) = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$로 나타낼 수 있다. 조건 $u = 1/d$는 자산가격이 오르고 내리든지, 내리고 오르든지 하면 본래 가격으로 되돌아오는 역할을 하며 꼭 이런 조건일 필요는 없다. 위에서 구한 p_u, u, d를 만족하는 모델이 콕스, 로스, 루빈스타인 모형(CRR)이다[12]. 또한 $p_u = 1/2 = p_d$라 두고 식 (부록.1), (부록.2), (부록.3)을 만족하는 u, d를 구하

면 $O(\Delta t^{3/2})$의 오차를 무시하면

$$u = e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}},$$

$$d = e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

가 된다. 이것을 랜들만-바터(Rendleman-Bartter, RB) 모형이라 한다[20, 25]. 또한 RB모형은 위험중립세상에서 주식가격 S가 기하학적 브라운 운동

$$\frac{dS_t}{S} = rdt + \sigma dW_t$$

을 따른다는 조건으로부터 구할 수 있다. 이토 보조정리에 의해 기하학적 브라운 운동은

$$d\ln(S_t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t$$

로 변환된다. 따라서 양변을 적분하면

$$\ln(S_t/S_0) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t.$$

그러므로 $\boldsymbol{E}[\ln(S_t/S_0)] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \qquad Var(\ln(S_t/S_0)) = \sigma^2 t$가 된다.

R을 기간 $(0,t)$동안의 연속복리 수익률이라 하면

$$S_t = S_0 e^{Rt}.$$

따라서 $Rt = \boldsymbol{E}[\ln(S_t/S_0)] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$이므로 $R = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$가 된다.

$S_u/S = u,\ S_d/S = d$이므로

$$p_u \ln(u) + p_d \ln(d) = \boldsymbol{E}[ln(S_{\Delta t}/S)] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t,$$

$$p_u^2 \ln(u) + p_d^2 \ln(d) - (p_u \ln(u) + p_d \ln(d))^2 = (1-p_u)p_u(\ln(u) - \ln(d))^2$$

$$= Var[\ln(S_{\Delta t}/S)] = \sigma^2 \Delta t.$$

위의 두식을 $p_u=1/2=p_d$라 두고 u, d에 관해 풀면

$$u=e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}},\quad d=e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

가 된다.

Δt에 관해 테일러 전개를 하면 다음과 같다.

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=1+\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t+O(\Delta t^{3/2}),$$

$$d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}=1-\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t+O(\Delta t^{3/2}),$$

$$p_u=\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}=\frac{1}{2}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}+O(\Delta t^{3/2}),$$

$$p_d=1-p_u=\frac{1}{2}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}+O(\Delta t^{3/2}),$$

$$p_u(u-1)+p_d(d-1)=r\Delta t+O(\Delta t^2),$$

$$p_u(u-1)^2+p_d(d-1)^2=\sigma^2\Delta t+O(\Delta t^2).$$

<정리> 부록.1 $Pu=f$가 주어진 편미분방정식(partial differential equation)이고 $P_{\Delta t,\Delta x}v=f$가 주어진 유한차분식(finite difference scheme)이라 하자. 만약 $\phi(S,t)$가 무한번 미분이 가능한 매끈한 함수(smooth function)에 대해

$$\Delta t\to 0,\ \Delta x\to 0\text{이면}\quad P\phi-P_{\Delta t,\Delta x}\phi\to 0$$

을 만족하면 유한차분식은 편미분방정식과 '일치성이 있다(consistent)'라고 한다.

1단계 콕스-로스-루빈스타인(CRR) 이항나무 모형을 고려하자. $\Delta t=T/N$

이라 하고 $V^n(S)$를 자산가격 S와 시간 $n\Delta t$에서의 옵션가격이라 하자. 그러면

$$V^n(S) = e^{-r\Delta t}[p_u V^{n+1}(Su) + p_d V^{n+1}(Sd)]. \qquad \text{(부록.6)}$$

이제 $P_{\Delta t, \Delta S}\phi$, $F_{\Delta t}\phi(S,t)$, $P\phi$를 각각 다음과 같이 정의하자.

$$P_{\Delta t, \Delta S}\phi = \frac{F_{\Delta t}\phi(S,t) - \phi(S,t)}{\Delta t},$$

$$F_{\Delta t}\phi(S,t) = e^{-r\Delta t}[p_u\phi(Su, t+\Delta t) + p_d\phi(Sd, t+\Delta t)],$$

$$P\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2\phi}{\partial S^2} + rS\frac{\partial\phi}{\partial S} - r\phi = 0. \qquad \text{(부록.7)}$$

$\phi(Su, t+\Delta t)$, $F_{\Delta t}\phi(S,t)$를 $(S, t+\Delta t)$근방에서 테일러 전개하면

$$\phi(Su, t+\Delta t) = \phi(S, t+\Delta t) + \frac{\partial\phi(S, t+\Delta t)}{\partial S}(u-1)S$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi(S, t+\Delta t)}{\partial S^2}(u-1)^2 S^2 + \cdots.$$

$$F_{\Delta t}\phi(S,t) = e^{-r\Delta t}\Big[(p_u + p_d)\phi(S, t+\Delta t) + S\frac{\partial\phi(S, t+\Delta t)}{\partial S}\{p_u(u-1) + p_d(d-1)\}$$
$$+ \frac{S^2}{2}\frac{\partial^2\phi(S, t+\Delta t)}{\partial S^2}p_u(u-1)^2 + p_d(d-1)^2\} + \cdots\Big]$$
$$= (1 - r\Delta t)\Big[\phi(S, t+\Delta t) + S\frac{\partial\phi(S, t+\Delta t)}{\partial S}\big(r\Delta t + O(\Delta t^2)\big)$$
$$+ \frac{S^2}{2}\frac{\partial^2\phi(S, t+\Delta t)}{\partial S^2}(\sigma^2\Delta \mathrm{t} + \mathrm{O}(\Delta \mathrm{t}^2)) + \cdots\Big]$$
$$= \Big[\phi(S, t+\Delta t) + r\Delta t S\frac{\partial\phi(S, t+\Delta t)}{\partial S}$$

$$+\Delta t\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2\phi(S,t+\Delta t)}{\partial S^2}+O(\Delta t^2)+\cdots\Big]-r\Delta t\phi(S,t+\Delta t).$$

$F_{\Delta t}\phi-\phi$는

$$F_{\Delta t}\phi-\phi=\phi(S,t+\Delta t)-\phi(S,t)+r\Delta tS\frac{\partial\phi(S,t)}{\partial S}$$

$$+\Delta t\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2\phi(S,t)}{\partial S^2}-r\Delta t\phi(S,t)+O(\Delta t^2)\cdots$$

와 같이 표현되므로 $P_{\Delta t,\Delta S}\phi=P\phi+O(\Delta t)$가 된다.

따라서 다음 정리가 성립한다.

<정리> 부록.2 이항나무 모형 (부록.6)은 그에 대응하는 포물선 편미분 방정식 (부록.7)과 일치성이 있다.

$V(x,t+\Delta t)$를 (x,t)근방에서 테일러 전개하면

$$V(x,t+\Delta t)=V(x,t)+\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}\Delta t^2+\cdots$$이므로

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}=\frac{V(x,t+\Delta t)-V(x,t)}{\Delta t}+O(\Delta t).$$

마찬가지로 계산하면

$$V(x+\Delta x,t)=V(x,t)+\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2}+O(\Delta x^3),\qquad \text{(부록.8)}$$

$$V(x-\Delta x,t)=V(x,t)-\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2}+O(\Delta x^3).\qquad \text{(부록.9)}$$

(부록.8)식에서 (부록.9)식을 빼고 정리하면

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}=\frac{V(x+\Delta x,t)-V(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}+O(\Delta x).$$

(부록.8)식과 (부록.9)식을 더하고 정리하면

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = \frac{V(x+\Delta x,t) - 2V(x,t) + V(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x).$$

블랙-숄즈 편미분 방정식 (부록.7)에서 $\phi = V$라 두고 변수변환 $x = \ln S$를 하면

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0. \qquad \text{(부록.10)}$$

$V_j^n = V(e^{j\Delta x}, n\Delta t)$라 하고 (부록.10)식을 유한 차분식으로 나타내면

$$\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{V_{j+1}^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} - rV_j^n = 0.$$

윗식을 V_j^n에 관해 정리하면

$$V_j^n = \frac{1}{1+r\Delta t}\left[\left(1 - \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2}\right)V_j^{n+1} + \left(\frac{\sigma^2 \Delta t}{2\Delta x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)V_{j+1}^{n+1}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\sigma^2 \Delta t}{2\Delta x^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)V_{j-1}^{n+1}\right]. \qquad \text{(부록.11)}$$

(부록.11)에서 $1 - \frac{\sigma^2 \Delta t}{\Delta x^2} = 0$이라 두면 $\frac{\sigma^2 \Delta t}{2\Delta x^2} = \frac{1}{2}$이고 $\frac{\Delta t}{2\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}$이므로

$$V_j^n = \frac{1}{1+r\Delta t}\left[\left(\frac{1}{2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}\right)V_{j+1}^{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}\right)V_{j-1}^{n+1}\right] \text{(부록.12)}$$

$$= \frac{1}{1+r\Delta t}\left[p_u V_{j+1}^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}\right] = e^{-r\Delta t}\left[p_u V_{j+1}^{n+1} + p_d V_{j-1}^{n+1}\right] + O(\Delta t^2)$$

가 된다. 따라서 다음의 정리가 성립한다.

<정리> 부록.3 이항나무 모형 (부록.6)은 $O(\Delta t^2)$의 오차로 유한차분식 (부록.12)와 대등하다(equivalent).

$u:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$인 적분가능한 함수라 하자. u의 푸리에 변환(Fourier transform) $\hat{u}$는

$$\hat{u}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\theta x}u(x)dx$$

로 정의된다. 또한 푸리에 역 변환 공식(Fourier Inversion Formula)은

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\theta x}u(\theta)d\theta$$

로 정의된다.

격자 함수(grid function)는 격자점에서 정의된 함수를 말한다. 격자 간격이 h인 격자점에서 정의된 격자 함수 $v=(\ldots,v_{-2},v_{-1},v_0,v_1,v_2,\ldots)$에 대한 푸리에 변환과 푸리에 역변환 공식은

$$\hat{v}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-imh\theta}v_m h,\quad v_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{\pi/h}e^{imh\theta}\hat{v}(\theta)d\theta.$$

<정리> 부록.4 (L^2-노름) 격자 간격이 h인 격자점에서 정의된 격자 함수 $v=(\ldots,v_{-2},v_{-1},v_0,v_1,v_2,\ldots)$와 $u:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$ 인 적분 가능한 함수에 대해

$$\|v\|=\left(\mathrm{h}\sum_{\mathrm{m}=-\infty}^{\infty}|\mathrm{v_m}|^2\right)^{1/2},\qquad \|u\|=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

로 정의된다.

V_j^n을 유한 차분식 $V_j^n=\dfrac{1}{1+r\Delta t}\left[p_u V_{j+1}^{n+1}+p_d V_{j-1}^{n+1}\right]$ (부록.13)

의 해라고 하자. 그러면 (부록.13)식에 푸리에 역변환 공식

$$V_j^n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{\pi/h}e^{ijh\theta}\hat{V}^n(\theta)d\theta,\quad h=\Delta x\text{을 적용하여 정리하면}$$

$$\hat{V}^n(\theta) = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(p_u e^{ih\theta} + p_d e^{-ih\theta}\right)\hat{V}^{n+1}(\theta)$$이 된다.

또한 $g(h\theta) = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(p_u e^{ih\theta} + p_d e^{-ih\theta}\right)$라 두면 $\hat{V}^n(\theta) = g(h\theta)\hat{V}^{n+1}(\theta)$가 된다.

$\hat{V}^n(\theta) = g(h\theta)\hat{V}^{n+1}(\theta) = g(h\theta)^2\hat{V}^{n+2}(\theta) = \cdots = g(h\theta)^{N-n}\hat{V}^N(\theta)$의 관계식을 만족한다. 일반적으로 $\hat{V}^n(\theta) = g(\Delta x\theta, \Delta t, \Delta x)^{N-n}\hat{V}^N(\theta)$의 관계식을 만족하며 $g(\Delta x\theta, \Delta t, \Delta x)$를 증폭 요소(amplification factor)라 한다.

<정리> 부록.5 (파스발 정리(Parseval Theorem))

$$\|u(x)\| = \|\hat{u}(\theta)\|, \qquad \|\hat{v}\| = \|v\|.$$

여기서 $\|\hat{v}\|^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{v}(\theta)|^2 d\theta.$

$\| V^n\|^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{V}^n(\theta)| d\theta = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |g(h\theta)|^{2(N-n)} |\hat{V}^N(\theta)|^2 d\theta$이므로 $|g(h\theta)|^2 \le 1$이면 파스발의 정리에 의해

$$\| V^n\|^2 \le \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\hat{V}^N(\theta)|^2 d\theta = \|\hat{V}^N\|^2 = \| V^N\|^2.$$

유한차분식의 해 V^n의 L_2-노름은 초기값 V^N의 L_2-노름보다 항상 같거나 작게 되어 V^n의 값은 안정적이 된다.

<정리> 부록.6 (안정성(Stability)) 다음 조건

$$|g(\Delta x\theta, \Delta t, \Delta x)| \le 1 + K\Delta t$$

을 만족하는 θ, Δt, Δx와 독립적인 상수 K가 존재하면 상수 계수를 가진 1단계 유한차분식이 안정적(stable)이라고 한다.

$|g(h\theta)| \le 1$인지를 알아보면

$$|g(h\theta)|^2 = \frac{1}{(1+r\Delta t)^2}\left|\left(p_u e^{ih\theta} + p_d e^{-ih\theta}\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{(1+r\Delta t)^2}\left|\left(p_u \cos(h\theta) + p_d \cos(h\theta)\right) + i\left(p_u \sin(h\theta) - p_d \sin(h\theta)\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{(1+r\Delta t)^2}\left|\{\mathrm{p}_\mathrm{u}^2 + \mathrm{p}_\mathrm{d}^2 + 2\mathrm{p}_\mathrm{u}\mathrm{p}_\mathrm{d}(2\cos^2(h\theta) - 1)\}\right|$$

$$= \left|\frac{1+\alpha^2\Delta t}{4(1+r\Delta t)^2} + \frac{1-\alpha^2\Delta t}{2(1+r\Delta t)^2}(2\cos^2(h\theta) - 1)\right|.$$

$\Delta t \to 0$일 때 $|g(h\theta)|^2 \to \left|\cos^2(h\theta) - \frac{1}{4}\right| \le 1$이므로 Δt가 충분히 작으면 $|g(h\theta)| \le 1$이 되게 할 수 있다.

여기서 $p_u = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{\Delta t}$, $p_d = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\sqrt{\Delta t}$, $\alpha = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$.

따라서 Δt를 작게 잡으면 유한차분식 (부록.12)는 안정적이다.

<정리> 부록.7 (잘 제기된(well-posed) 문제) 편미분방정식의 초기값 $u(T,x)$ 문제가 잘 제기되었다(well-posed)란 것은 어떠한 해 $u(t,x)$가

$$\|u(t,x)\| \le C_T \|u(T,x)\|, \quad 0 \le t \le T$$

를 만족하는 상수 C_T가 존재하는 것이다.

<정리> 부록.8 (락스의 대등정리(Lax's equivalence theorem)[10]) 잘 제기된 선형 초기값 편미분방정식을 근사하는 유한차분식이 안정적(stable)이고 일치성(consistent)이 있을 필요충분조건은 수렴한다(convergent)는 것이다.

락스의 대등정리에 의해 이항나무모델 (부록.6)은 Δt를 적당히 작게 잡으면 수렴한다.