윤 기 헌 교수지도

석사학위청구논문

기하적 대상이 갖는 대수적 성질에 대한 연구

2010

성신여자대학교 교육대학원

교육학과 수학교육전공

채 혜 정

기하적 대상이 갖는 대수적 성질에 대한 연구

윤 기 헌 교수지도

이 논문을 석사학위논문으로 제출함

2010년 5월

성신여자대학교 교육대학원
교육학과 수학교육전공
채 혜 정

인 준 서

채혜정의 석사학위 논문으로 인준함

심사위원 ____________________ 印

심사위원 ____________________ 印

심사위원 ____________________ 印

성신여자대학교 교육대학원

논 문 개 요

본 논문에서는 거리공간에서 거리를 보존하는 전사함수로서 등거리변환을 정의하고 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$에서의 등거리변환이 갖는 성질에 대하여 살펴보고 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$의 등거리변환군과 등거리변환군의 유한부분군에 대하여 논한다. 그리고 이의 예로써 $\mathbb{R}^3$에 놓여있는 정다면체의 대칭군을 다룬다.

이를 이용하여 중학교 1학년 기하영역의 정다면체와 관련된 단원을 효과적으로 지도하기 위한 학습지도안을 작성한다.

차 례

제 1 장

Introduction

기하학에서 어떤 점의 집합이 등거리 변환을 통해 또다른 집합이 될 때 두 집합을 합동이라 한다. 본 논문에서는 Elmer G. Rees의 Notes on Geometry[1]를 바탕으로 거리공간에서 거리를 보존하는 전사함수로서 등거리변환을 정의하고 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$에서의 등거리변환과 $\mathbb{R}^2$에서의 등거리변환으로 구성된 유한군을 정리하고 내용을 좀 더 보충해보았다.

본 논문의 구성은 다음과 같다.

제2장에서는 선형군 $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$, $SO(n)$, $T_+(n)$과 노름에 대해 알아보고 거리공간에서 거리를 보존하는 전사함수로서 등거리변환을 정의한다. 그리고 $T_+(n)$이 $GL(n,\mathbb{R})$의 부분군임을 보인다. 또한 Gram-Schmidt process를 이용하여 $GL(n,\mathbb{R})$의 원소를 $O(n)$의 원소와 $T_+(n)$의 원소의 행렬곱으로 유일하게 표현됨을 보인 후, 이를 통해 $GL(n,\mathbb{R})$은 $O(n) \times T_+(n)$과 위상동형임을 보인다.

아핀공간과 아핀함수에 대해 정의하고 함수 f가 아핀함수이면 함수 f는 선형사상과 평행이동의 합성으로 표현가능함을 보인다.

제3장에서는 $\mathbb{R}^n$에서의 등거리변환이 갖는 일반적인 성질을 다루었다. $\mathbb{R}^n$에서 $(n-k)$차원 아핀공간을 고정하는 등거리변환은 k개의 초평면에 대한 반사의 합성으로 표현가능하다. 또한 $\mathbb{R}^n$에서 등거리변환은 직교변환과 평행이동의 합성으로

이루어진다. 이를 통해 본 장에서는 모든 등거리변환은 아핀변환임을 보인다.

2차원에서 등거리변환은 항등변환 외에도 고정점 여부와 향(orientation)에 따라 평행이동, 회전, 반사, 미끄럼반사가 있다. 그리고 $\mathbb{R}^2$에서 등거리변환군의 유한부분군은 정이면체군과 순환군이 있음을 보인다. 또한 3차원에서의 등거리변환은 항등변환 외에도 고정점 집합의 차원과 향(orientation)에 따라 평행이동, 회전, 반사, 미끄럼반사, 회전하는 반사 그리고 꼬임이 있음을 보인다.

제4장에서는 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체가 있음을 보인다. 또한 원점을 중심으로 하는 정다면체의 대칭군, 회전군을 알아보고 이들이 대칭군, 교대군과 군동형임을 보인다.

중학교 기하 영역에서는 자연 현상이나 실생활의 상황을 통해 평면과 공간 및 평면도형과 입체도형의 개념을 직관적으로 이해한다. 또한 여러 가지 도형의 성질을 학생의 수준에 따라 직관적으로 혹은 연역적 추론을 통해 이해하고 탐구하며, 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결하는 학습 활동이 필요하다[4].

제5장에서는 제 2, 3, 4장에서 알아본 여러 가지 변환과 정다면체의 성질을 중학교 수학 1학년 정다면체 단원수업에 응용시켜볼 수 있음을 소개한다. 학생이 직접 정다면체를 만들어 보며 조작활동을 통해 정다면체 다섯가지와 정다면체의 쌍대성을 이용하여 정다면체의 면, 꼭지점의 갯수를 구할 수 있음을 소개한다.

제 2 장

선형군과 Affine공간

제 1 절 선형군

유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$에서의 여러가지 선형군과 등거리변환에 대해 알아보고, Gram-Schmidt process를 이용하여 일반선형군 $GL(n,\mathbb{R})$과 직교군 $O(n)$의 관계를 알아보자.

정의 2.1. 실계수성분인 $n \times n$행렬들의 집합을 $M(n,\mathbb{R})$라 정의한다.

$n \times n$ 행렬들의 집합 $M(n,\mathbb{R})$은 n^2차원 실벡터공간으로 볼 수 있고, 따라서 $\mathbb{R}^{n^2}$에 정의된 유클리드 거리함수로 부터 온 위상을 갖고 있는 거리공간으로 볼 수 있다. 행렬식(determinant)

$$\det : M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

은

$$\det((a_{ij})) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}\sigma} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

로 정의되고 $M(n,\mathbb{R})$을 유클리드 거리공간으로 보면 이 함수는 연속함수가 된다.

정의 2.2. $M(n,\mathbb{R})$의 부분집합

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$$

는 행렬곱셈에 대하여 군을 이룬다. 이 때, 군 $GL(n,\mathbb{R})$을 일반선형군(General linear group)이라 한다.

정의 2.3. $GL(n,\mathbb{R})$의 부분군

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) | \det A = 1\}$$

을 특수선형군(Special linear group)이라 한다.

$A, B \in SL(n,\mathbb{R})$에 대하여

$$\det(AB^{-1}) = (\det A)(\det B)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1$$

이므로 $AB^{-1} \in SL(n,\mathbb{R})$이 된다. 따라서 $SL(n,\mathbb{R})$은 $GL(n,\mathbb{R})$의 부분군이다. 또한, $SL(n,\mathbb{R}) = \ker(\det)$이므로 $GL(n,\mathbb{R})$의 정규부분군이고, $n^2 - 1$차원을 가진다.

정의 2.4. 임의의 벡터 $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$에 대하여 $< \mathrm{x}, \mathrm{y} >= \mathrm{x}^t\mathrm{y}$ 를 x와 y의 내적(inner product)이라 한다.

정의 2.5. 임의의 벡터 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$에 대하여 $\|\mathrm{x}\| = \sqrt{< \mathrm{x}, \mathrm{x} >}$ 를 만족하는 $\|\mathrm{x}\|$를 노름(norm)이라 한다.

정의 2.6. 임의의 벡터 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$에 대하여 유클리드 거리(metric) d는 $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|$ 로 정의된다.

유클리드 거리는 평행이동해도 변하지 않는다.

참고 2.7. [2] 유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$에서 내적 $<\mathrm{x},\mathrm{y}>$를 정의할 때, 다음을 만족한다. x, y, z $\in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$일 때,

i) $<\mathrm{x}+\mathrm{y},\mathrm{z}>=<\mathrm{x},\mathrm{z}>+<\mathrm{y},\mathrm{z}>$

ii) $<\lambda\mathrm{x},\mathrm{y}>=\lambda<\mathrm{x},\mathrm{y}>$

iii) $<\mathrm{x},\mathrm{y}>=<\mathrm{y},\mathrm{x}>$

iv) $<\mathrm{x},\mathrm{x}>=0 \Leftrightarrow \mathrm{x}=0$

정의 2.8. 선형변환 $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$가 임의의 x, y $\in \mathbb{R}^n$에 대하여

$$<T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})>=<\mathrm{x},\mathrm{y}>$$

를 만족하면 T를 직교(orthogonal)라 한다.

참고 2.9. [2]

1. $\mathbb{R}^n$의 기저(basis) $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$가

$$<e_i,e_j>=\begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j, \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$$

를 만족할 때 정규직교기저(orthonormal basis)라 한다.

2. 직교변환 T의 행렬표현을 A라 하면 $T(\mathrm{x})=A\mathrm{x}$이고 $A^tA=I$이므로

$$<T(\mathrm{x}),T(\mathrm{y})>=\mathrm{x}^tA^tA\mathrm{y}=\mathrm{x}^t\mathrm{y}$$

가 된다.

정의 2.10. 거리공간 (X, d)에서 정의된 전사함수(onto) $f : X \longrightarrow X$가

$$d(f(\mathrm{x}), f(\mathrm{y})) = d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \quad \text{for all} \quad \mathrm{x}, \mathrm{y} \in X$$

를 만족할 때, f를 등거리변환(isometry)이라한다.

정리 2.11. *[1] $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 이 선형등거리변환이면 노름이 보존되고, T는 직교변환이다.*

증명 T가 선형등거리변환이므로 임의의 x, y $\in \mathbb{R}^n$에 대하여

$$\begin{aligned} < T(\mathrm{x}-\mathrm{y}), T(\mathrm{x}-\mathrm{y}) > &=< T(\mathrm{x}) - T(\mathrm{y}), T(\mathrm{x}) - T(\mathrm{y}) > \\ &= \|T(\mathrm{x}) - T(\mathrm{y})\|^2 \\ &= d(T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y}))^2 \\ &= d(\mathrm{x}, \mathrm{y})^2 \\ &=< \mathrm{x}-\mathrm{y}, \mathrm{x}-\mathrm{y} > \end{aligned}$$

가 성립한다. T가 선형변환이므로 $T(0) = 0$이다. 따라서 임의의 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$에 대하여

$$\|T(\mathrm{x})\|^2 = d(T(\mathrm{x}), T(0))^2 = d(\mathrm{x}, 0)^2 = \|\mathrm{x}\|^2$$

이 성립한다. 그러므로

$$< T(\mathrm{x}-\mathrm{y}), T(\mathrm{x}-\mathrm{y}) >=< \mathrm{x}-\mathrm{y}, \mathrm{x}-\mathrm{y} >$$

로 부터 임의의 $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$에 대하여

$$< T(\mathrm{x}), T(\mathrm{y}) >=< \mathrm{x}, \mathrm{y} >$$

를 얻고 따라서 T는 직교변환이다. $\square$

정의 2.12. $n \times n$ 직교행렬의 집합

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | A^t A = I\}$$

을 직교군(Orthogonal group)이라 한다.

여기서 A가 직교이면 $\det(A) = \pm 1$이다. 왜냐하면 $\det(A^t) = \det(A)$이므로

$$1 = \det(I) = \det(A^t A) = \det(A^t)\det(A) = (\det(A))^2$$

이기 때문이다. 따라서 $\det : O(n) \longrightarrow \{\pm 1\}$이고 $\ker(\det) = \{A \in O(n) | \det A = 1\}$은 $O(n)$의 정규부분군이 된다.

정의 2.13. 군 $O(n)$의 정규부분군

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$$

을 특수직교군(Special orthogonal group)이라 한다.

$SO(n)$은 지표(index)가 2인 O(n)의 부분군이다.

참고 2.14 (Gram-Schmidt process[2]). 일차독립기저로부터 직교기저를 얻는 과정을 Gram-Schmidt process라 말한다. $\mathbb{R}^n$의 부분공간 W의 기저 $\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n$에 대하여

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{x}_1, \quad \mathrm{v}_k = \mathrm{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (< \mathrm{x}_k, \mathrm{v}_i > / < \mathrm{v}_i, \mathrm{v}_i >) \mathrm{v}_i, \quad 2 \le k \le n$$

와 같이 정의하면, $\mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_n$는 W의 직교기저(orthogonal basis)이 된다.

정의 2.15.

$$T_+(n) = \{(\mathrm{a}_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R}) | \mathrm{a}_{ij} = 0 \quad \text{if} \quad i > j, \quad \mathrm{a}_{ii} > 0 \quad \forall i = 1, \cdots, n\}$$

참고 2.16. $A \in T_+(n)$일 때, $\det(A) = \prod_{i=1}^n \mathrm{a}_{ii}$이다.

정리 2.17. $T_+(n)$은 $GL(n, \mathbb{R})$의 *부분군이다.*

증명 $A \in T_+(n)$이라 하자. 그러면 $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii} > 0$이므로 $A \in GL(n, \mathbb{R})$이다. 따라서 $T_+(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$이다. 또한 행렬 A의 성분은 $i = j$일 때, $a_{ii} > 0$이고, $i > j$일 때는 $a_{ij} = 0$이다. 만약 $A, B \in T_+(n)$이면 $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$이다.

i) $i > j$이면 $i > k$일 때는 $a_{ik} = 0$이고, $k \ge i > j$일 때는 $b_{kj} = 0$이므로 $(AB)_{ij} = 0$.

ii) $i = j$이면 $(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ii} b_{ii} > 0$.

이므로 $AB \in T_+(n)$.

이제 $AB = I$인 $B \in T_+(n)$가 존재함을 보이자.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

라 하자. 그러면

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{in} \\ \sum_{i=2}^n a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=2}^n a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=2}^n a_{2i}b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} = I$$

이고 $a_{nn} > 0$이므로 $a_{nn}b_{nk} = 0,\ 1 \le k \le n-1$로부터 $b_{nk} = 0,\ 1 \le k \le n-1$이다.

그러면 $(n-1)$번째 행은 $(a_{n-1n-1}b_{n-11} \quad a_{n-1n-1}b_{n-12} \quad \cdots \quad a_{n-1n-1}b_{n-1n})$이고 $a_{n-1n-1} \neq 0$이므로 $b_{n-1k} = 0, 1 \le k \le n-2$이다. 이 방법을 반복적으로 적용하면 $b_{ij} = 0,\ i > j$임을 보일 수 있다. 따라서 $a_{kk}b_{kk} = 1$로부터 $b_{kk} = \frac{1}{a_{kk}} > 0$이다.

그러므로 $B \in T_+(n)$이고 $T_+(n)$은 $GL(n,\mathbb{R})$의 부분군이다. □

정리 2.18. *[1] $A \in GL(n,\mathbb{R})$에 대하여 $A = BC$를 만족하는 $B \in O(n)$, $C \in T_+(n)$이 유일하게 존재한다.*

증명 $A = [a_1 a_2 \cdots a_n]$이라 하자. 그러면 Gram-Schmidt process에 의해 정규직교기저인 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} b_1 =& \frac{a_1}{\|a_1\|} \\ b_2 =& \frac{a_2 - < a_2, b_1 > b_1}{\|a_2 - < a_2, b_1 > b_1\|} \\ &\vdots \\ b_n =& \frac{a_n - \sum_{i=1}^{n-1} < a_n, b_i > b_i}{\|a_n - \sum_{i=1}^{n-1} < a_n, b_i > b_i\|} \end{aligned}$$

그러므로 $[b_1 b_2 \cdots b_n] = B \in O(n)$이고 $B = AT_1$으로 표현할 수 있다. 여기서

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|a_1\|} & * & \cdots & * \\ 0 & \frac{1}{\|a_2 - <a_2, b_1> b_1\|} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\|a_n - \sum_{i=1}^{n-1} <a_n, b_i> b_i\|} \end{pmatrix} \in T_+(n)$$

이고 $T_+(n)$은 군이므로 $T_1^{-1} = C \in T_+(n)$라 하면

$$A = BC, \quad B \in O(n), C \in T_+(n)$$

가 성립한다.

이제 유일하게 존재함을 보이자. A를 분해하여 각각 B_1C_1와 B_2C_2가 있다고 가정하자. 그러면 $D = B_2^{-1}B_1 = C_2C_1^{-1}$는 $O(n) \cap T_+(n)$에 있게 된다. 그러나 $O(n) \cap T_+(n) = \{I\}$로 유일하게 된다. 왜냐하면 $D \in O(n) \cap T_+(n)$이라면 $T_+(n)$이 군이므로 $D^t = D^{-1} \in T_+(n)$이다. D^t는 하삼각행렬이므로 D는 대각행렬이며 $D = D^t$이다. 그래서 직교성에 의해 $D^2 = I$이며 D의 대각성분은 ± 1이다. $D \in T_+(n)$의 대각성분은 양수이므로 $D = I$이다. □

따름정리 2.19. *$GL(n, \mathbb{R})$은 $O(n) \times T_+(n)$과 위상동형(homeomorphic)이다.*

증명 $A \in GL(n, \mathbb{R})$에 대하여 $A = BC$, $B \in O(n)$, $C \in T_+(n)$인 유일한 B, C가 존재한다. 따라서 함수

$$f : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow O(n) \times T_+(n), \quad f(A) = (B, C)$$

이 잘 정의된다. $A_1, A_2 \in GL(n, \mathbb{R})$에 대하여 $f(A_1) = f(A_2)$이면 $f(A_1) = (B_1, C_1) =$

$(B_2, C_2) = f(A_2)$이다. 따라서

$$A_1 = B_1C_1 = B_2C_2 = A_2$$

이므로 f는 단사함수이다.

임의의 $(B, C) \in O(n) \times T_+(n)$에 대하여

$$\det(BC) = \det(B)\det(C) \neq 0$$

이다. 왜냐하면 $B \in O(n)$이므로 $\det(B) = \pm 1$이고 $C \in T_+(n)$이므로

$$\det(C) = c_{11} \times c_{22} \times \cdots \times c_{nn} > 0$$

이다. 따라서

$$BC \in GL(n, \mathbb{R}), \quad f(BC) = (B, C)$$

이므로 f는 전사함수이다.

임의의 $p_{ij} : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longmapsto p_{ij}(A) = (A)_{ij}$에 대하여 $p_{ij} \circ g(B, C) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}$는 연속함수이기 때문에 f의 역함수 $g : O(n) \times T_+(n) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$, $g(B, C) = BC$는 연속함수이다.

함수 f가 연속임을 보이기 위해 함수 $f_1 : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow O(n)$과 $f_2 : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow T_+(n)$이 연속임을 보이면 된다. $f_1 : A \longmapsto B$일 때,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{a}_1}{\|\mathrm{a}_1\|} & \frac{\mathrm{a}_2 - < \mathrm{a}_2, \mathrm{b}_1 > \mathrm{b}_1}{\|\mathrm{a}_2 - < \mathrm{a}_2, \mathrm{b}_1 > \mathrm{b}_1\|} & \cdots & \frac{\mathrm{a}_n - \sum_{i=1}^{n-1} < \mathrm{a}_n, \mathrm{b}_i > \mathrm{b}_i}{\|\mathrm{a}_n - \sum_{i=1}^{n-1} < \mathrm{a}_n, \mathrm{b}_i > \mathrm{b}_i\|} \end{pmatrix}$$

이므로 함수 f_1는 연속이다. $f_2 : A \longmapsto C$일 때,

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\mathrm{a}_1\|} & * & \cdots & * \\ 0 & \frac{1}{\|\mathrm{a}_2 - <\mathrm{a}_2,\mathrm{b}_1>\mathrm{b}_1\|} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\|\mathrm{a}_n - \sum_{i=1}^{n-1} <\mathrm{a}_n,\mathrm{b}_i>\mathrm{b}_i\|} \end{pmatrix}$$

이므로 함수 f_2는 연속이다. 따라서 함수 f도 연속함수이다.

그러므로 $GL(n,\mathbb{R})$은 $O(n) \times T_+(n)$과 위상동형(homeomorphic)이다. □

참고 2.20. 1. $T_+(n)$은 $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$와 위상동형이다.

2. $GL(n,\mathbb{R})$은 $O(n) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$와 위상동형이다.

3. $SL(n,\mathbb{R})$은 $SO(n) \times \mathbb{R}^{(n^2+n-2)/2}$와 위상동형이다.

제 2 절 Affine 공간

이 절에서는 Affine 공간과 그 공간에서 정의된 Affine 함수에 대해 알아본다.

정의 2.21. 임의의 a, b $\in A$와 $\lambda + \mu = 1$를 만족하는 임의의 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$에 대하여 $\lambda \mathrm{a} + \mu \mathrm{b} \in A$를 만족하는 $\mathbb{R}^n$의 부분집합 A를 아핀공간(affine space)라 한다.

일반적으로 임의의 $\mathrm{a}_i \in A$이고, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$에 대하여 $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathrm{a}_i \in A$이다.

참고 2.22. 1. $V \subset \mathbb{R}^n$가 선형부분공간(linear subspace)이면 임의의 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$에 대하여 $V + \mathrm{x} = \{\mathrm{v} + \mathrm{x} | \mathrm{v} \in V\}$는 $\mathbb{R}^n$에서의 아핀공간이다.

2. A가 아핀공간이면 임의의 $\mathrm{a} \in A$에 대하여 $V = A - \mathrm{a} = \{\mathrm{x} - \mathrm{a} | \mathrm{x} \in A\}$는 $\mathbb{R}^n$에서의 선형부분공간이다.

3. 아핀공간 A의 차원(dimension)은 선형부분공간 $A - \mathrm{a}$의 차원으로 정의된다.

정의 2.23. $X \subset \mathbb{R}^n$일 때,

$$\mathrm{Aff}(X) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathrm{x}_i | \mathrm{x}_i \in X, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$$

를 아핀생성(affine span)이라 한다.

정의 2.24. $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \mathrm{x}_i = 0$이고 $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 0$이면 $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$을 만족하는 집합 $X = \{\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_r\}$를 아핀일차독립(affine independent)라 한다.

정의 2.25. $X = \{\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_r\}$이 아핀일차독립일 때, X를 $\mathrm{Aff}(X)$의 아핀기저(affine basis)라 하고 $\mathrm{Aff}(X)$의 차원은 r이다.

참고 2.26. 1. r차원 아핀공간의 아핀기저는 $r+1$개의 원소를 갖는다.

2. $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$이 선형부분공간 V의 기저라면 $\{0, e_1, e_2, \cdots, e_r\}$는 V의 하나의 아핀기저가 된다.

정의 2.27. $\mathbb{R}^n$의 $(n-1)$차원 아핀공간 H를 초평면(hyperplane)이라 한다. 또한 초평면 H가 $\mathbb{R}^n$의 부분공간일 때 H를 선형초평면이라 한다.

참고 2.28. $\mathbb{R}^n$에서의 H가 선형초평면(linear hyperplane)이고 H가 $\mathbb{R}^n$의 부분공간이면 $H = \{\mathrm{x}\}^{\perp}$인 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$이 존재한다.

보조정리 2.29. $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$인 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}^n$*에 대해* $B = \{\mathrm{x} | d(\mathrm{x}, \mathrm{a}) = d(\mathrm{x}, \mathrm{b})\}$는 R^n*에서의 초평면이다.*

정리 2.30. *[1]* H*는* $\mathbb{R}^n$*에서의 초평면이고,* $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$*이면* $\mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z}$*,* $\mathrm{y} \in H$*,* $\mathrm{z} \in H^{\perp}$*를 만족하는* y*,* z*이 유일하게 존재한다.*

증명 $\mathrm{a} \in H$이라 하면 $H - \mathrm{a}$가 선형초평면이고, $H - \mathrm{a} = \{\mathrm{b}\}^{\perp}$인 b가 존재한다. 임의의 $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^n$에 대하여 $\mathrm{x} - \mathrm{a} = \lambda \mathrm{b} + \mathrm{c}$, $c \in H - \mathrm{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$인 유일한 λ와 c가 존재한다. 그러면 $\mathrm{z} = \lambda \mathrm{b}$, $\mathrm{y} = \mathrm{c} + \mathrm{a}$라 하면 $\mathrm{x} = \mathrm{y} + \mathrm{z}$, $\mathrm{y} \in H$, $\mathrm{z} \in H^{\perp}$가 된다.

이제 유일함을 보이자. 임의의 $H^{\perp} = \{\mathrm{x} | < \mathrm{x}, h >= 0, \quad \forall h \in H\}$, z_1, $\mathrm{z}_2 \in H^{\perp}$에 대하여 $< \mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1, h >= 0, \forall h \in H$이므로 $\mathrm{z}_1 - \mathrm{z}_1 \in H^{\perp}$이다. 그러면 y_1, $\mathrm{y}_2 \in H$에 대하여 $< \mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1, \mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_2 >= 0$이므로 $< \mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1 >=< \mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_2 >= 0$이다. 따라서 $\mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2$, $\mathrm{y}_1 = \mathrm{y}_2$이다. □

정의 2.31. 아핀공간 $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$에 대하여 함수 $f : A \longrightarrow B$가 임의의 $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in A$와 $\lambda + \mu = 1$를 만족하는 임의의 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$에 대하여

$$f(\lambda \mathrm{a} + \mu \mathrm{b}) = \lambda f(\mathrm{a}) + \mu f(\mathrm{b})$$

를 만족할 때, f를 아핀함수(affine map)라 한다.

참고 2.32.

1. 아핀함수는 점 a, b를 지나는 직선을 $f(\mathrm{a})$, $f(\mathrm{b})$를 지나는 직선으로 보낸다.
2. $\mathrm{a} \in A$, $\mathrm{b} \in B$이면 $A - \mathrm{a}$와 $B - \mathrm{b}$는 부분공간이고 함수 $L : A - \mathrm{a} \longrightarrow B - \mathrm{a}$이 선형사상이면 $A_L(\mathrm{x}) = L(\mathrm{x} - \mathrm{a}) + \mathrm{b}$로 정의하는 함수 $A_L : A \longrightarrow B$는 아핀함수이다.

정리 2.33. *함수 $f : A \longrightarrow B$가 아핀함수이면*

$$L_f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}+\mathrm{a}) - f(\mathrm{a})$$

로 정의된 함수 $L_f : A - \mathrm{a} \longrightarrow B - f(\mathrm{a})$는 선형사상이다.

증명 $L_f(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = L_f(\mathrm{x}) + L_f(\mathrm{y})$, $L_f(\lambda\mathrm{x}) = \lambda L_f(\mathrm{x})$ 임을 증명해야 한다.

f가 아핀함수이므로 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1$인 $lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$와 $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3 \in A$ 에 대해

$$\begin{aligned}
&f(\lambda_1\mathrm{x}_1 + \lambda_2\mathrm{x}_2 + \lambda_3\mathrm{x}_3)\\
=&f(\lambda_1\mathrm{x}_1 + (1-\lambda_1)(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}\mathrm{x}_2 + \frac{\lambda_3}{1-\lambda_1}\mathrm{x}_3))\\
=&\lambda_1 f(\mathrm{x}_1) + (1-\lambda_1)f(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}\mathrm{x}_2 + \frac{\lambda_3}{1-\lambda_1}\mathrm{x}_3)\\
=&\lambda_1 f(\mathrm{x}_1) + \lambda_2 f(\mathrm{x}_2) + \lambda_3 f(\mathrm{x}_3)
\end{aligned}$$

기 성립한다.

$\mathrm{x}+\mathrm{a}, \mathrm{y}+\mathrm{a}, \mathrm{a} \in A$이고, $\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{a} = (\mathrm{x}+\mathrm{a}) + (\mathrm{y}+\mathrm{a}) - \mathrm{a}$의 계수의 합이 1이므로

$$\begin{aligned}
L_f(\mathrm{x}+\mathrm{y}) &= f(\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{a}) - f(\mathrm{a})\\
&= f((\mathrm{x}+\mathrm{a}) + (\mathrm{y}+\mathrm{a}) - \mathrm{a}) - f(\mathrm{a})\\
&= f(\mathrm{x}+\mathrm{a}) + f(\mathrm{y}+\mathrm{a}) - f(\mathrm{a}) - f(\mathrm{a})\\
&= (f(\mathrm{x}+\mathrm{a}) - f(\mathrm{a})) + (f(\mathrm{y}+\mathrm{a}) - f(\mathrm{a}))\\
&= L_f(\mathrm{x}) + L_f(\mathrm{y})
\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} L_f(\lambda \mathrm{x}) &= f(\lambda \mathrm{x} + \mathrm{a}) - f(\mathrm{a}) \\ &= f(\lambda \mathrm{x} + \mathrm{a} + \lambda \mathrm{a} - \lambda \mathrm{a}) - f(\mathrm{a}) \\ &= f(\lambda(\mathrm{x} + \mathrm{a}) + (1-\lambda)\mathrm{a}) - f(\mathrm{a}) \\ &= \lambda f(\mathrm{x}+\mathrm{a}) + (1-\lambda) f(\mathrm{a}) - f(\mathrm{a}) \\ &= \lambda f(\mathrm{x}+\mathrm{a}) - \lambda f(\mathrm{a}) + f(\mathrm{a}) - f(\mathrm{a}) \\ &= \lambda (f(\mathrm{x}+\mathrm{a}) - f(\mathrm{a})) \\ &= \lambda L_f(\mathrm{x}) \end{aligned}$$

이다. 따라서 L_f는 선형사상이다. □

따름정리 2.34. *함수 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 이 아핀함수면, $L(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) - \mathrm{a}$가 선형사상이 되는 $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^n$가 존재한다.*

증명 함수 f가 아핀함수이면, $f(0) = \mathrm{a}$에 대하여 함수 $L(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) - f(0)$가 선형사상임을 증명해야 한다. 임의의 λ, $\mu \in \mathbb{R}^n$에 대하여

$$\begin{aligned} L(\lambda \mathrm{x}_1 + \mu \mathrm{x}_2) &= f(\lambda \mathrm{x}_1 + \mu \mathrm{x}_2) - f(0) \\ &= f(\lambda \mathrm{x}_1 + \mu \mathrm{x}_2 + (1-\lambda-\mu)0) - f(0) \\ &= \lambda f(\mathrm{x}_1) + \mu f(\mathrm{x}_2) + (1-\lambda-\mu) f(0) - f(0) \\ &= \lambda f(\mathrm{x}_1) + \mu f(\mathrm{x}_2) - \lambda f(0) - \mu f(0) \\ &= \lambda (f(\mathrm{x}_1) - f(0)) + \mu (f(\mathrm{x}_2) - f(0)) \\ &= \lambda L(\mathrm{x}_1) + \mu L(\mathrm{x}_2) \end{aligned}$$

이다. 따라서 함수 L은 선형사상이다. □

제 3 장

$\mathbb{R}^n$에서의 등거리변환

본 장에서는 2장에서 다룬 등거리 변환의 일반적인 성질을 알아본 후 이를 통하여 $\mathbb{R}^2$에서의 등거리 변환은 항등사상외에 평행이동, 반사, 회전, 미끄럼반사 뿐이며, $\mathbb{R}^3$에서의 등거리 변환은 항등사상외에 평행이동, 반사, 회전, 미끄럼반사, 꼬임, 반전, 회전하는 반전 뿐임을 보인다.

제 1 절 등거리변환의 일반적인 성질

정의 3.1. $a \in \mathbb{R}^n$에 대하여

$$T_{\mathrm{a}}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + \mathrm{a}$$

로 정의되는 함수 $T_{\mathrm{a}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$를 평행이동(Translation)이라 한다.

참고 3.2. 1. 평행이동 T_{a}은 $I(\mathbb{R}^n)$에서 위수가 무한이다.

2. 모든 평행이동의 집합은 $I(\mathbb{R}^n)$의 정규부분군이며, $\mathbb{R}^n$과 동형이다.

3. $\mathbb{R}^2$의 평행이동 T_{a}는 거리가 $\|\mathrm{a}\|/2$인 두 초평면 L, M에 대하여 각각의 반사 R_L, R_M의 합성으로 표현된다.

정의 3.3. $\mathbb{R}^n$에서의 초평면 H에 대한 반사(reflection) R_H는 $a \in H$에 대하여

$$R_H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad R_H(\mathrm{x}) = Proj_H(\overrightarrow{a\mathrm{x}}) - (\overrightarrow{a\mathrm{x}} - Proj_H(\overrightarrow{a\mathrm{x}}))$$

로 정의된다.

정리 3.4. *등거리변환* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$*은* $(n+1)$*개의 아핀일차독립인 점들의 집합* $\{\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n\}$*의 상(image)인* $f(\mathrm{a}_0)$, $f(\mathrm{a}_1)$, $\cdots$, $f(\mathrm{a}_n)$*에 의해 유일하게 결정된다.*

증명 두 등거리변환 f, g가 $0 \leq i \leq n$에 대하여 $f(\mathrm{a}_i) = g(\mathrm{a}_i)$가 성립한다고 하자. 그러면 $g^{-1} \circ f$는 $g^{-1} \circ f(\mathrm{a}_i) = \mathrm{a}_i$인 등거리변환이다. 평행이동$T_{-\mathrm{a}_0}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - \mathrm{a}_0$이라 하고 $0 \leq i \leq n$에 대하여 $\mathrm{b}_i = T(\mathrm{a}_i)$라 하자. $h = T_{-\mathrm{a}_0} \circ (g^{-1} \circ f) \circ T_{-\mathrm{a}_0}^{-1}$라 하면 $h(0) = 0$이고

$$h(\mathrm{b}_i) = T_{-\mathrm{a}_0} \circ (g^{-1} \circ f) \circ T_{-\mathrm{a}_0}^{-1}(\mathrm{b}_i) = T_{-\mathrm{a}_0} \circ (g^{-1} \circ f)(\mathrm{a}_i) = T_{-\mathrm{a}_0}(\mathrm{a}_i) = \mathrm{b}_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

이다. h는 등거리변환이므로 $d(\mathrm{x}, 0) = d(h(\mathrm{x}), h(0)) = d(h(\mathrm{x}), 0)$이다. 따라서

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{b}_i) = d(h(\mathrm{x}), h(\mathrm{b}_i)) = d(h(\mathrm{x}), \mathrm{b}_i) \quad \text{for all} \quad 1 \leq i \leq n$$

가 성립한다. $\{\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n\}$이 아핀일차독립이므로

$$\{T_{-\mathrm{a}_0}(\mathrm{a}_1), \cdots, T_{-\mathrm{a}_0}(\mathrm{a}_n)\} = \{\mathrm{b}_1, \cdots, \mathrm{b}_n\}$$

이 $\mathbb{R}^n$의 기저이고 임의의 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$에 대하여

$$< \mathrm{x} - h(\mathrm{x}), b_i >= 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

이므로 $\mathrm{x} - h(\mathrm{x}) = 0$이다. 따라서 모든 $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$에 대하여 $h(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$이므로 $g^{-1} \circ f = id$

이고 $f = g$이다. $\square$

$\mathbb{R}^n$에서 $(n+1)$개의 아핀일차독립인 점으로부터의 거리가 주어지면 점이 유일하게 결정된다. 그러나 n개의 아핀일차독립인 점으로부터 거리가 주어진다고 해서 점이 유일하게 결정되는 것은 아니다.

정리 3.5. *$\mathbb{R}^n$에서의 $(n+1)$개의 아핀일차독립인 점들의 집합*

$$\{\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n\}, \quad \{\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \cdots, \mathrm{b}_n\}$$

이 모든 $1 \le i, j \le n$에 대해 $d(\mathrm{a}_i, \mathrm{a}_j) = d(\mathrm{b}_i, \mathrm{b}_j)$를 만족하면, 모든 $1 \le i \le n$에 대하여 $f(\mathrm{a}_i) = \mathrm{b}_i$ 인 등거리변환 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$이 존재한다.

증명 $\{\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n\}$과 $\{\mathrm{b}_0, \mathrm{b}_1, \cdots, \mathrm{b}_n\}$이 아핀일차독립이므로

$$\{\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_0, \cdots, \mathrm{a}_n - \mathrm{a}_0\}, \ \{\mathrm{b}_1 - \mathrm{b}_0, \cdots, \mathrm{b}_n - \mathrm{b}_0\}$$

가 $\mathbb{R}^n$의 기저가 되고 모든 i, j에 대하여 $< \mathrm{a}_i - \mathrm{a}_0, \mathrm{a}_j - \mathrm{a}_0 > = < \mathrm{b}_i - \mathrm{b}_0, \mathrm{b}_j - \mathrm{b}_0 >$이다. g를 임의의 $1 \le i \le n$에 대하여 $g(\mathrm{a}_i - \mathrm{a}_0) = \mathrm{b}_i - \mathrm{b}_0, \quad 0 \le i \le n$인 선형변환이라 하자.

임의의 x, y에 대하여 $\mathrm{x} - \mathrm{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathrm{a}_i - \mathrm{a}_0)$로 표현되고 g의 선형성에 의해

$$g(\mathrm{x}) - g(\mathrm{y}) = g(\mathrm{x} - \mathrm{y}) = g(\sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathrm{a}_i - \mathrm{a}_0)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathrm{b}_i - \mathrm{b}_0)$$

가 된다. 그러므로

$$d(g(\mathrm{x}), g(\mathrm{y}))^2 = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j < \mathrm{b}_i - \mathrm{b}_0, \mathrm{b}_j - \mathrm{b}_0 > = \sum \lambda_i \lambda_j < \mathrm{a}_i - \mathrm{a}_0, \mathrm{a}_j - \mathrm{a}_0 > = d(\mathrm{x}, \mathrm{y})^2$$

이고 g는 선형등거리변환이다. $f(\mathrm{x}) = T_{-(g(\mathrm{a}_0)-\mathrm{b}_0)} \circ g(\mathrm{x})$라 하면 f는$f(\mathrm{a}_i) = \mathrm{b}_i$, $1 \le i \le n$인 등거리변환이다. □

참고 3.6. 1. R_H는 고정점을 갖는 등거리변환이며, R_H^2는 항등변환이다.($R_H^2(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$)

2. H가 $\overline{\mathrm{ab}}$의 수직이등분인 초평면일 때, R_H는 a와 b를 서로 바꾼다.($R_H(\mathrm{a}) = \mathrm{b}$, $R_H(\mathrm{b}) = \mathrm{a}$)

3. H가 선형초평면일 때, R_H는 직교이고, H에 수직인 단위벡터 a에 대하여 $R_H(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - 2 < \mathrm{x}, \mathrm{a} > \mathrm{a}$이다.

정리 3.7. *[1] 임의의 등거리변환 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$이 $(n-r)$차원인 아핀공간 A에서 항등사상이면 f는 A를 포함하는 최대 r개의 초평면에 대한 반사들의 합성으로 표현할 수 있다. 임의의 등거리변환은 최대 $(n+1)$개 반사의 합성으로 표현할 수 있다.*

증명 A의 $(n-r+1)$개의 아핀일차독립인 점 a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-r}을 확장하여 $\mathbb{R}^n$에서의 $(n+1)$개의 아핀일차독립인 점 a_0, a_1, $\cdots$, a_n을 택하자. $f(\mathrm{a}_i) = \mathrm{b}_i$라 하면 $0 \le i \le n-r$에 대하여 $\mathrm{b}_i = \mathrm{a}_i$이다.

수학적 귀납법을 사용하여 증명하자. $r = 0$일 때는 자명하게 등거리변환 f는 n 차원인 아핀공간 A를 포함하는 최대 0개의 초평면을 가진다.

$r = k$일 때 $(n-k)$차원 아핀공간을 고정하는 등거리변환은 k개의 초평면에 대한 반사의 합성으로 표현된다고 가정하자. 그러면 $r = k+1$일 때, A의 $(n-k)$개의 아핀일차독립인 점 $\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{n-k}$을 $\mathbb{R}^n$에서의 $(n+1)$개의 아핀일차독립인 점 a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-k-1}, a_{n-k}, $\cdots$, a_n로 확장하자.

f가 a_{n-k}를 고정하지 않는다고 하자. 그러면 $f(\mathrm{a}_{n-k}) = \mathrm{b}_{n-k} \neq \mathrm{a}_{n-k}$이므로 H를 $\overline{\mathrm{a}_{n-k}\mathrm{b}_{n-k}}$를 수직이등분하는 초평면이라 하면 a_0, a_1, $\cdots$, $\mathrm{a}_{n-k-1} \in H$이므로

$R_H \circ f(a_i) = a_i,\ 0 \le i \le n-k$이다. $R_H \circ f$는 $(n-k)$차원 아핀공간을 고정하는 등거리변환이므로 가정에 의해 $R_H R_{H_1} \cdots R_{H_k}$로 표현된다. 따라서 $f = R_H R_{H_1} \cdots R_{H_k}$이다. f가 a_{n-k}를 고정한다고 하면 f가 $(n-k)$차원 아핀공간을 고정하므로 $f = R_{H_1} \cdots R_{H_k}$로 표현가능하다. 따라서 $r = k+1$일 때 성립한다. □

따름정리 3.8. *[1] 임의의 등거리변환 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$는 직교변환과 평행이동의 합성으로 표현된다.*

증명 $T_{-f(0)} \circ f(0) = 0$이므로 정리 3.7과 정리 2.11에 의해 $T_{-f(0)} \circ f$는 직교변환이 된다. 따라서 f는 직교변환과 평행이동의 합성으로 표현된다. □

정의 3.9. 등거리변환 f에 대하여 $\bar{f}(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) - f(0)$로 정의되는 $\bar{f}$는 직교변환이므로 $\det(\bar{f}) = \pm 1$이다. $\det(\bar{f}) = 1$일 때 f를 정향합동변환 (direct) 이라 하고, $\det(\bar{f}) = -1$일 때 f를 역향합동변환(opposite)라 한다.

정의 3.10. $\mathbb{R}^n$에서의 모든 등거리변환들의 집합 $I(\mathbb{R}^n)$는 군이 되며, 이를 등거리변환군(isometry group)이라고 한다.

$I(\mathbb{R}^n)$에 다음과 같이 거리 d를 정의할 수 있다.

정의 3.11. $\mathbb{R}^n$에서 $(n+1)$개의 아핀일차독립인 점 $\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n$ 에 대하여 $I(\mathbb{R}^n)$의 거리 d는

$$d(f,g) = \max_{0\le i\le n}\{d(f(\mathrm{a}_i), g(\mathrm{a}_i))\} \quad \text{for} \quad f, g \in I(\mathbb{R}^n)$$

라고 정의한다.

정의에 의해 $d(f,g)=0$과 필요충분조건으로 $0 \le i \le n$에 대하여 $f(\mathrm{a}_i)=g(\mathrm{a}_i)$ 이며 정리 3.4에 의해서 $f=g$이다. 또한, $d(f,g)=d(g,f)$이고, 삼각부등식

$$
\begin{aligned}
d(f,g) &= \max_{0\le i\le n}\{d(f(\mathrm{a}_i),g(\mathrm{a}_i))\} \\
&\le \max_{0\le i\le n}\{d(f(\mathrm{a}_i),h(\mathrm{a}_i))+d(h(\mathrm{a}_i),g(\mathrm{a}_i))\} \\
&\le \max_{0\le i\le n}\{d(f(\mathrm{a}_i),h(\mathrm{a}_i))\}+\max_{0\le i\le n}\{d(h(\mathrm{a}_i),g(\mathrm{a}_i))\} \\
&= d(f,h)+d(h,g)
\end{aligned}
$$

이 성립하므로 위에 정의한 $d(f,g)$는 거리이다.

임의의 f, g, $h \in I(\mathbb{R}^n)$에 대하여 $d(hf,hg)=d(f,g)$도 성립한다.

보조정리 3.12. *[1] $I(\mathbb{R}^n)$에 정의된 거리함수 d는 아핀일차독립인 점 $\{\mathrm{a}_0,\mathrm{a}_1,\cdots,\mathrm{a}_n\}$의 선택에 상관없이 동등한 위상을 준다.*

증명 $\mathrm{a}=\{\mathrm{a}_0,\mathrm{a}_1,\cdots,\mathrm{a_n}\}$, $\mathrm{b}=\{\mathrm{b}_0,\mathrm{b}_1,\cdots,\mathrm{b_n}\}$로부터 얻어지는 $I(\mathbb{R}^n)$의 거리를 d_{a}, d_{b}라 하면 d_{a}와 d_{b}는 동등한 위상을 줌을 보이자. 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $\delta>0$가 존재하여

$$d_{\mathrm{b}}(f,g)<\delta \Longrightarrow d_{\mathrm{a}}(f,g)<\varepsilon$$

을 만족함을 보이면 된다.

$\{\mathrm{b}_1-\mathrm{b}_0,\cdots,\mathrm{b}_n-\mathrm{b}_0\}$는 $\mathbb{R}^n$의 기저이므로 벡터 a_i는

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a}_i-\mathrm{b}_0 &= \sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}(\mathrm{b}_j-\mathrm{b}_0) \\
&= -(\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij})\mathrm{b}_0+\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}\mathrm{b}_j, \quad \mu_{ij}\in R
\end{aligned}
$$

로 표현할 수 있다. 따라서

$$a_i = \mathrm{b}_0 + (-\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij})\mathrm{b}_0 + \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}\mathrm{b}_j$$

이다. 그러므로 $\mathrm{a}_i = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij}\mathrm{b}_j$, $\sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij} = 1$인 $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$가 존재한다.

$M = \max\{|\lambda_{ij}| | 0 \leq i, j \leq n\}$이라 하면 $|\lambda_{ij}| \leq M$이다. f와 g는 아핀사상이므로

$$f(\mathrm{a}_i) - g(\mathrm{a}_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{ij}(f(\mathrm{b}_i) - g(\mathrm{b}_i)).$$

를 만족한다. 따라서

$$\|f(\mathrm{a}_i) - g(\mathrm{a}_i)\| \leq \sum_{i=0}^{n} |\lambda_{ij}| \|f(\mathrm{b}_i) - g(\mathrm{b}_i)\| < (n+1)M\delta$$

이다. $(n+1)M\delta < \varepsilon$를 만족하는 $\delta > 0$를 잡으면 $d_{\mathrm{b}}(f,g) < \delta$이므로 $d_{\mathrm{a}}(f,g) < \varepsilon$이다. □

정리 3.13. *$I(\mathbb{R}^n)$과 $O(n) \times \mathbb{R}^n$는 위상동형이다.*

증명 따름정리 3.8에 의하여 $f(\mathrm{x}) = \bar{f}(\mathrm{x}) + f(0)$인 선형사상 $\bar{f}$가 존재한다. 이를 이용하여

$$\begin{aligned} \phi : I(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow O(n) \times \mathbb{R}^n \\ f &\longmapsto (\bar{f}, f(0)) \end{aligned}$$

와 같이 정의하자. 그러면 $\bar{f}(\mathrm{x}) = T_{-f(0)}(f(\mathrm{x}))$이고 $\bar{f}(0) = 0$이므로 정리 2.11에 의해 $\bar{f}$는 직교변환이다.

임의의 f, $g \in I(\mathbb{R}^n)$에 대하여 $\phi(f) = \phi(g)$이므로 $(\bar{f}(\mathrm{x}), f(0)) = (\bar{g}(\mathrm{x}), g(0))$이고 $f(\mathrm{x}) - f(0) = \bar{f}(\mathrm{x}) = \bar{g} = g(\mathrm{x}) - g(0)$, $f(0) = g(0)$로 부터 $f(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x})$가

성립한다. 그러므로 f는 단사함수이다.

$\mathbb{R}^n$의 표준정규직교기저 $\{e_0 = 0, e_1, \cdots, e_n\}$로부터 정의된 $I(\mathbb{R}^n)$의 거리를 d라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} d(f,g) &= d(f(0)+\bar{f}, g(0)+\bar{g}) \\ &= d(f(0)+\bar{f}, f(0)+(g(0)-f(0))+\bar{g}) \\ &= d(\bar{f}, (g(0)-f(0))+\bar{g}) \qquad (3.1) \\ &\leq d(\bar{f},\bar{g}) + d(\bar{g}, (g(0)-f(0))+\bar{g}) \\ &= d(\bar{f},\bar{g}) + \|g(0)-f(0)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\bar{f},\bar{g}) &= d(T_{-f(0)}\circ f, \bar{g}) \\ &\leq d(T_{-f(0)}\circ f, T_{-f(0)}\circ g) + d(T_{-f(0)}\circ g, T_{-g(0)}\circ g) \qquad (3.2) \\ &= d(f,g) + d(-f(0)+g, -g(0)+g) \\ &= d(f,g) + \|g(0)-f(0)\| \end{aligned}$$

(3.1), (3.2)에 의해

$$\begin{aligned} d(f,g) &\leq d(\bar{f},\bar{g}) + \|g(0)-f(0)\| \\ d(\bar{f},\bar{g}) &\leq d(f,g) + \|g(0)-f(0)\| \end{aligned}$$

이다. 또한 $d(\bar{f}, \bar{g}) = \max_{0\le i\le n}\{d(\bar{f}(e_i), \bar{g}(e_i)\} \le \|\bar{f} - \bar{g}\|$이다. 따라서

$$d(f, g) \le \|\bar{f} - \bar{g}\| + \|f(0) - g(0)\|$$

이다. 임의의 $f \in I(\mathbb{R}^n)$에서 함수 ϕ이 연속임을 보이자. 임의의 $B_{\varepsilon_1}(\bar{f}) \times B_{\varepsilon_2}(f(0))$, $\bar{f} \in O(n)$, $f(0) \in \mathbb{R}^n$에 대하여 $\delta = \frac{1}{2}\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$라 하자.그러면

$$d(f, g) = \max_{0\le i\le n}\{\|f(e_i) - g(e_i)\|\} < \delta$$

에 대하여 $\|f(0) - g(0)\| < \delta < \varepsilon_2$이며, $d(f, g) < \delta$에 대하여

$$d(\bar{f}, \bar{g}) \le d(f, g) + \|f(0) - g(0)\| < \delta + \delta = 2\delta \le \varepsilon_1$$

이다. 그러므로 $\phi(B_\delta(f)) \subset B_{\varepsilon_1}(\bar{f}) \times B_{\varepsilon_2}(f(0))$이다. 따라서 ϕ는 f에서 연속이다.

이제 역함수 $\psi : O(n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow I(\mathbb{R}^n)$이 연속임을 보이자.
임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$이라 하면

$$\|(\bar{f}, f(0)) - (\bar{g}, g(0))\| = \sqrt{\|\bar{f} - \bar{g}\|^2 + \|f(0) - g(0)\|^2} < \delta$$

이므로 $\|\bar{f} - \bar{g}\| < \delta$, $\|f(0) - g(0)\| < \delta$이다. 따라서

$$d(f, g) \le \|\bar{f} - \bar{g}\| + \|f(0) - g(0)\| < 2\delta = \varepsilon$$

가 성립한다. 그러므로 ψ는 연속이다.

따라서 $I(\mathbb{R}^n)$과 $O(n) \times \mathbb{R}^n$는 위상동형이다. □

참고 3.14. $I(\mathbb{R}^n)$과 $O(n) \times \mathbb{R}^n$은 군동형이 아니다.

따름정리 3.15. *[1] $f \longrightarrow det(\bar{f})$ 로 정의된 함수 $\phi : I(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \pm 1$ 는 군준동형사상이다.*

증명 함수 $\phi : f \longrightarrow \bar{f}$ 라 하자. (det는 곱셈함수 이므로) 그러면 $\overline{f \circ g}(\mathrm{x}) = \bar{f} \circ \bar{g}(\mathrm{x})$ 임을 보이자.

$$\begin{aligned}\bar{f}(\bar{g}(\mathrm{x})) &= \bar{f}(g(\mathrm{x}) - g(0)) \\ &= \bar{f}(g(\mathrm{x})) - \bar{f}(g(0)) \\ &= f(g(\mathrm{x})) - f(0) - (f(g(0)) - f(0)) \\ &= f(g(\mathrm{x})) - f(g(0)) \\ &= \overline{f \circ g}(\mathrm{x})\end{aligned}$$

$$\bar{f} \circ \bar{g}(\mathrm{x}) = \overline{f \circ g}(\mathrm{x})$$

이므로 따라서

$$\begin{aligned}\phi(f \circ g) &= \det(\overline{f \circ g}) \\ &= \det(\bar{f} \circ \bar{g}) \\ &= \det(\bar{f})\det(\bar{g}) \\ &= \phi(f)\phi(g).\end{aligned}$$

□

제 2 절 $\mathbb{R}^2$에서의 등거리변환

정의 3.16. $\mathbb{R}^2$에서 점 a에 대하여 각 α만큼 회전(Rotations)을 $R(a,\alpha)$라 표현한다. 회전변환 $R(0,\alpha)$는 행렬 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$로 표현된다.

참고 3.17.

1. 정향등거리변환이면 $fR(a,\alpha)f^{-1} = R(f(a),\alpha)$이고, 역향등거리변환이면 $fR(a,\alpha)f^{-1} = R(f(a),-\alpha)$이다.
2. 임의의 직선 l, m에 대하여 $f(l) = m$을 만족하는 등거리변환 f가 존재하고, $fR_lf^{-1} = R_{f(l)}$을 만족한다.

정의 3.18. 직선 l에 평행한 벡터 a에 대하여 $G(l,\mathrm{a}) = R_lT_{\mathrm{a}}$로 정의되는 변환 $G(l,\mathrm{a})$를 미끄럼 반사변환(Glides)라고 한다.

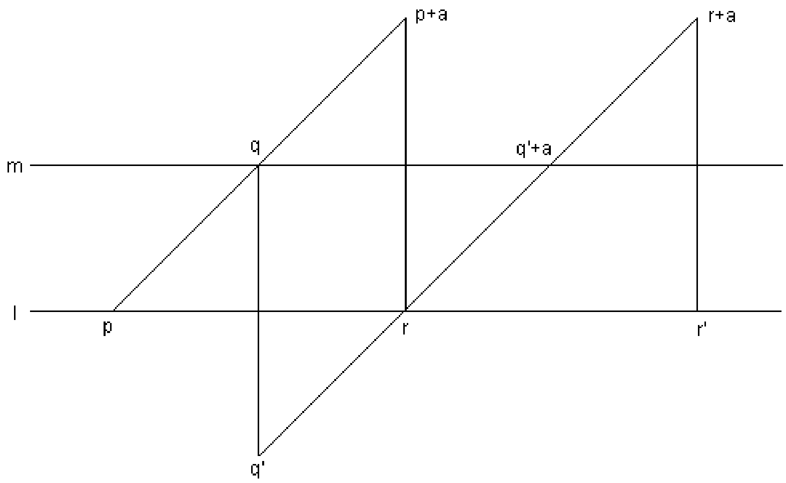
참고 3.19.

1. $T_{\mathrm{a}}R_l = R_lT_{\mathrm{a}}$
2. $(R_lT_{\mathrm{a}})^2 = T_{2\mathrm{a}}$

보조정리 3.20. *[1] 직선 l에 벡터 a가 수직하지 않으면, $T_{\mathrm{a}}R_l$는 미끄럼 반사변환이고, 직선 l이 벡터 a에 수직하면 $T_{\mathrm{a}}R_l$는 반사이다.*

증명 a가 직선 l에 평행하면 정의 3.18에 의해 $T_{\mathrm{a}}\mathrm{r}_l = \mathrm{r}_lT_{\mathrm{a}}$은 미끄럼 반사변환이 된다.

a가 직선 l에 평행하지 않다고 가정하자. 직선 l위의 한 점 $\mathrm{p} \in l$를 잡고 $\mathrm{q} = \mathrm{p} + \frac{\mathrm{a}}{2}$라 하자. 그리고 r를 $\mathrm{p}+\mathrm{a}$에서 직선 l에 내린 수선의 발이라 하고 m를 점 q를 지나고 직선 l에 평행한 직선이라 하자. 그러면 $\mathrm{p},\mathrm{q},\mathrm{r}$은 아핀일차독립이고



$$T_{\mathrm{a}}\mathrm{r}_l(\mathrm{p}) = T_{\mathrm{a}}(\mathrm{p}) = \mathrm{p}+\mathrm{a}, \quad \mathrm{r}_m T_{\mathrm{r}-\mathrm{p}}(\mathrm{p}) = \mathrm{r}_m((\mathrm{r}-\mathrm{p})+\mathrm{p}) = \mathrm{r}_m(\mathrm{r}) = \mathrm{p}+\mathrm{a}$$

$$T_{\mathrm{a}}\mathrm{r}_l(\mathrm{q}) = T_{\mathrm{a}}(\mathrm{q}') = \mathrm{q}'+\mathrm{a}, \quad \mathrm{r}_m T_{\mathrm{r}-\mathrm{p}}(\mathrm{q}) = \mathrm{r}_m((\mathrm{r}-\mathrm{p})+\mathrm{q}) = \mathrm{r}_m(\mathrm{q}'+\mathrm{q}) = \mathrm{q}'+\mathrm{a}$$

$$T_{\mathrm{a}}\mathrm{r}_l(\mathrm{r}) = T_{\mathrm{a}}(\mathrm{r}) = \mathrm{r}+\mathrm{a}, \quad \mathrm{r}_m T_{\mathrm{r}-\mathrm{p}}(\mathrm{r}) = \mathrm{r}_m((\mathrm{r}-\mathrm{p})+\mathrm{r}) = \mathrm{r}_m(\mathrm{r}') = \mathrm{r}+\mathrm{a}$$

를 만족하므로 정리 3.4에 의해 $T_{\mathrm{a}}\mathrm{r}_l = \mathrm{r}_m T_{\mathrm{r}-\mathrm{p}}$이다.

이제 직선 l이 벡터 a에 수직할 때 변환 $T_{\mathrm{a}}\mathrm{r}_l = \mathrm{r}_l T_{\mathrm{a}}$이 반사임을 보이자. 직선 l를 벡터 a방향으로 $\frac{\|\mathrm{a}\|}{2}$만큼 평행이동시킨 직선을 m이라 하자. 그러면 변환 $T_{\mathrm{a}}\mathrm{r}_l$은 직선 m에 의한 반사이다. □

정리 3.21. *[1] $\mathbb{R}^2$ 에서의 등거리변환은 항등변환, 평행이동, 회전변환, 반사 그리고 미끄럼반사 중 하나이다.*

증명 Case1 : f가 고정점 a를 갖는 경우($f(\mathrm{a}) = \mathrm{a}$)에 $f = T_{\mathrm{a}} \circ (T_{-\mathrm{a}} \circ f \circ T_{\mathrm{a}}) \circ T_{-\mathrm{a}}$라 하자. 그러면 $T_{-\mathrm{a}} \circ f \circ T_{\mathrm{a}}(0) = 0$이므로 정리 3.7와 정리 2.11에 의해 $T_{-\mathrm{a}} \circ f \circ T_{\mathrm{a}} \in O(n)$

이다. 그러므로 $T_{-\mathrm{a}} \circ f \circ T_{\mathrm{a}}$는 행렬

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{또는} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

로 표현된다. 첫번째 행렬은 각 α만큼 회전변환을 나타내고, 두번째 행렬은 직선 $y = x\tan(\frac{\alpha}{2})$에 대한 반사변환을 나타낸다.

Case2 : f가 고정점을 갖지 않는 경우 $f(\mathrm{a}) = \mathrm{b}$라 하자. ab의 수직이등분선을 l이라 하면, $R_l f(\mathrm{a}) = \mathrm{a}$이다. 그러므로 $R_l f$는 a에 대하여 회전변환이거나 어떤 직선 m에 대한 반사이다. 만약 $R_l f$는 직선 m에 대한 반사라면 $f = R_l R_m$로 표현된다. 만일 두 직선이 한 점에서 만나면 f는 고정점을 갖게 되는데 이는 위의 가정 $f(a) = b$에 의해 모순이다. 따라서 l과 m은 평행하고 f는 평행이동이다. 이제 $R_l f = R(\mathrm{a}, \alpha)$일 경우만 남았다. 만일 $\mathrm{a} \in l$이면 $f(\mathrm{a}) = \mathrm{a}$가 되므로 $\mathrm{a} \notin l$이다. a를 지나는 임의의 직선 m에 대해 $R(\mathrm{a}, \alpha) = R_m R_n$를 만족하는 a를 지나는 직선 n이 존재한다. 만일 m이 직선 l과 평행하면 크기가 l과 m사이의 거리의 두배이고 l과 m에 수직인 벡터 a에 대하여 $f = R_l R_m R_n = T_{\mathrm{a}} R_n$이다. 보조정리 3.20에 의해 $f = T_{\mathrm{a}} R_n$는 미끄럼 반사변환거나 반사이다. 여기서 f는 고정된 점을 갖지 않으므로 미끄럼 반사변환이다. 그러므로 $\mathbb{R}^2$에서의 등거리변환은 항등변환, 평행이동, 회전변환, 반사 그리고 미끄럼반사가 있다. □

요약하면 $I(\mathbb{R}^2)$의 항등변환이 아닌 원소들의 분류는 다음과 같은 표로 나타낼 수 있다.

	고정점가짐	고정점없음
정향변환	회전변환	평행이동
역향변환	반사	미끄럼반사

정리 3.22. *[1] $I(\mathbb{R}^2)$의 모든 유한부분군은 순환치환이거나 정이면체군이다.*

증명 부분군 $G \subset I(\mathbb{R}^2)$, $|G| = n$이라 하자. $a \in \mathbb{R}^2$에 대하여 G의 작용에 의해 a의 궤도 $Orb(a) = \{ga|g \in G\}$는 $\mathbb{R}^2$의 유한부분집합이다. 집합 $Orb(a)$의 중심 $c = (\sum_{g \in G} ga)/n$이라 하자. 유한집합 $A \subset \mathbb{R}^2$의 중심 c처럼 A의 점들 하나하나의 아핀합성이고, 점 $f(c)$는 $f(A)$의 점들의 아핀합성인 등거리변환f은 아핀함수이다. 따라서 $f(c)$는 $f(A)$의 무게중심이다. $g \in G$이라고 하면, $gOrb(a) = Orb(a)$이므로 각각의 $g \in G$ 에 대하여 $g(c) = c$이다. c를 중심으로 직교변환의 군 $O(2)_c$의 부분군 G임을 보이자. 우선 G의 정향부분군 $G_d = G \cap SO(2)$임을 알 수 있다. 부분군 G_d는 유한개의 회전변환으로 이뤄졌으며, 만약 G_d의 가장 작은 각의 회전변환을 S이라고 하면, G_d는 S로 생성된 순환군임을 알 수 있다. $G = G_d$이라면 자명하고, $SO(2)$가 $O(2)$에서 2인 지수를 가지므로 G_d는 G에서 2인 지수를 가진다. 집합 $O(2) - SO(2)$는 반사의 전체로 구성되었고, $T = R_l$이 G의 반사라면 G는 S와 T로 생성되며, $TST = S^{-1}$이다. 그러므로 군 G는 정이면체군이다. □

제 3 절 $\mathbb{R}^3$에서의 등거리변환

정의 3.23. 직선 l에 평행한 벡터 a에 대하여 평행이동과 회전변환의 합성변환을 꼬임(screw)라고 한다.

$$T_{\mathrm{a}} R(l, \alpha) = R(l, \alpha) T_{\mathrm{a}}$$

보조정리 3.24. *[1] l에 수직하지 않은 벡터* a*에 대하여 합성변환* $T_{\mathrm{a}} R(l, \alpha)$*는 꼬임이다.*

증명 a의 직선 l에 평행한 성분 벡터를 a_1, 직선 l에 수직인 벡터성분을 a_2라 하자. 그러면, $T_{\mathrm{a}} R(l, \alpha) = T_{\mathrm{a}_1} T_{\mathrm{a}_2} R(l, \alpha)$ 이다. 여기서 $T_{\mathrm{a}_2} R(l, \alpha)$는 l과 평행인 직선 m에 대한 회전변환이 된다. 따라서 $T_{\mathrm{a}} R(l, \alpha)$는 평행이동인 T_{a_1}과 a_1에 평행인 축에

대한 회전변환의 합성변환이다. 그러므로 $T_{\mathrm{a}}R(l,\alpha)$는 $\mathrm{a}_1 = 0$일 때를 제외하고는 꼬임이다. □

보조정리 3.25. *[1] 임의의* a, H*에 대하여 합성변환* $R_H T_{\mathrm{a}}$*는* a*가* H*에 수직일 때는 반사이고, 그렇지 않을 때는 미끄럼 반사변환이다.*

증명 벡터 a를 평면 H에 정사영한 벡터를 a_2이라 하고, H에 수직한 벡터성분을 a_1라 하자. 그러면 $\mathrm{a} = \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2$가 되고

$$R_H T_{\mathrm{a}} = R_H T_{\mathrm{a}_1} T_{\mathrm{a}_2} = R_{H_1} T_{\mathrm{a}_2}.$$

여기서 $R_{H_1} T_{\mathrm{a}_2}$는 미끄럼반사가 된다. □

정의 3.26. $\mathbb{R}^3$에서의 평면 H와 H에 수직인 직선 l에 대하여 변환 $R_H R(l,\alpha) = R(l,\alpha) R_H$을 회전하는 반사(Rotatory reflection)라 한다. 특히, $\alpha = \pi$인 경우를 반전(inversion)이라 하고, I_a로 표현한다.

참고 3.27. I_a는 점 a에 대한 점반사이다. 만약 $l \cap H = \{0\}$이라면, 반전은 선형이고 그것의 행렬표현은 대각성분이 모두 -1인 대각행렬이 된다. 점 a에 대한 반전은 a에서 만나는 서로 수직인 세 개의 평면에 대한 반사의 합성변환이다.

정의 3.28. 직선 l에 대한 회전변환과 직선 l에 포함된 점 a에 대한 반전의 합성변환을 회전하는 반전(Rotatory inversion)이라고 한다.

보조정리 3.29. *[1] 직선* l*이 평면* H*에 포함되지 않는 직선이면,* $R_H R(l,\alpha)$*는 회전하는 반사이다.*

증명 $f = R_H R(l,\alpha)$ 라고 하면, $a = l \cap H$ 이고 $H \perp H_1$인 평면 H, H_1, H_2에 대하여 $f = R_H R_{H_1} R_{H_2}$이다. 벡터 a에서 서로 수직인 평면 H, H_1, H_3이 되는 H_3를 택하여 $I_a = R_{H_3} R_{H_1} R_H$라 하자. 그러면 $f = I_a R_{H_3} R_{H2}$와 $R_{H_3} R_{H_2}$가 a를 회전축으로 하는 회전변환이 된다. 그러므로 f는 회전하는 반전이고 앞의 증명에 의해 회전하는 반사이다. □

정리 3.30. *$\mathbb{R}^3$에서의 등거리변환은 평행이동, 반사, 회전, 미끄럼반사, 꼬임, 회전하는 반사 중 하나이다.*

증명 정리 3.7를 이용하여 $\mathbb{R}^3$에서의 임의의 등거리변환 f는 최대 4개의 반사변환의 합성이다. 각각의 경우로 나누어 보자. f는 0개 또는 1개의 반사변환의 합성일 때는 자명하다.

f를 2개의 반사변환의 합성인 $f = R_{H_1} R_{H_2}$는 H_1과 H_2가 만날 때와 H_1과 H_2가 평행할 때는 나누어 볼 수 있다. 첫번째 경우 f는 직선 $H_1 \cap H_2$에 대한 회전변환이며, 두번째 경우 f는 H_1의 법선방향으로 H_1, H_2사이 거리의 2배 만큼 평행이동하는 것이다.

이번에는 f가 3개의 반사변환의 합성일 때, f는 반사이거나 위의 경우에 의해 f는 $R_H T_{\mathrm{a}}$ 또는 $R_H R(l,\alpha)$이다. 보조정리 3.25에 의해 $R_H T_{\mathrm{a}}$는 항상 미끄럼 반사변환이다. 보조정리 3.29에 의해 $R_H R(l,\alpha)$는 회전하는 반사이다.

마지막으로 f가 4개의 반사변환의 합성 $f = R_{H_1} R_{H_2} R_{H_3} R_{H_4}$인 경우를 다루자.

만일 f가 고정점을 가지면 정리 3.7에 의하여 f는 최대 3개의 반사의 합성으로 표현되고 이는 반사, 회전변환, 회전하는 반사 중 하나가 된다.

만일 f가 고정점을 갖지 않으면 임의의 x에 대하여 $a = \mathrm{x} - f(\mathrm{x})$라 하면 $T_a f$는 고정점을 갖는다. 따라서 $T_a f$는 최대 3개의 반사의 합성으로 표현가능하고 위의

결과에 의하여

$$T_a f = \begin{cases} R_H \\ R(l,\alpha) \\ R_H R(l,\alpha) \end{cases}$$

가 된다. 그러므로

$$f = \begin{cases} T_{-a} R_H \\ T_{-a} R(l,\alpha) \\ T_{-a} R_H R(l,\alpha) \end{cases}$$

이다. $T_{-a}R_H$는 보조정리 3.25에 의해 미끄럼반사이고 $T_{-a}R(l,\alpha)$는 보조정리 3.24에 의해 꼬임이며 $T_{-a}R_H R(l,\alpha)$는 평행이동이다. 그러므로 $\mathbb{R}^3$에서의 등거리변환은 항등변환, 평행이동, 회전변환, 반사, 미끄럼반사, 회전하는 반사, 꼬임이 있다. $\square$

요약하면 $I(\mathbb{R}^3)$의 항등변환이 아닌 원소들의 분류는 다음과 같은 표로 나타낼 수 있다.

고정점차원	정향변환	역향변환
0	평행이동, 꼬임	미끄럼반사
1		회전하는 반사
2	회전	
3		반사
4	항등사상	

제 4 장

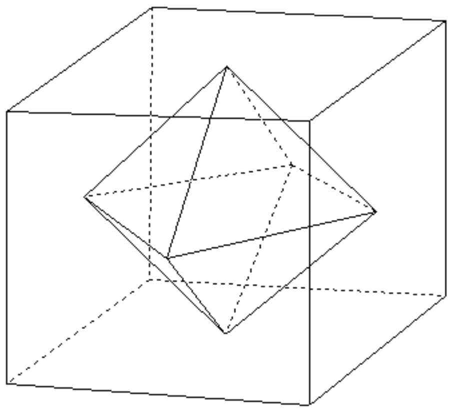
정다면체

정의 4.1. 모든 $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$와 $0 < t < 1$에 대하여 $t\mathrm{x} + (1-t)\mathrm{y} \in \mathrm{X}$를 만족하는 $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}^n$를 볼록집합(convex set)이라 한다.

정의 4.2. 평면다각형인 면으로 둘러싸인 입체도형을 다면체(polyhedron)라 하며, 내부 전체가 볼록집합을 이루는 다면체를 볼록다면체(convex polyhedron)한다.

정의 4.3. 각 면이 모두 합동인 정다각형이며, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 같은 볼록다면체를 정다면체(regular polyhedron) 또는 플라톤의 다면체(Platonic solid)라 한다.

정의 4.4. 정다면체의 각각의 면의 중점을 연결하였을때 또하나의 정다면체가 생성되는데 이 때, 두 정다면체의 관계를 정다면체의 쌍대(dual)라 한다. 또한, 그 두 다면체를 쌍다면체라 한다.



참고 4.5. 1. 정사면체는 자기 자신과 쌍대이며, 정육면체와 정팔면체, 정십이면체와 정이십면체가 서로 쌍대이다.

2. 쌍다면체는 서로의 면과 꼭짓점이 일대일대응하게 되므로 정다면체의 쌍대성을 이용하면 쉽게 면과 꼭짓점의 개수를 얻을 수 있다.

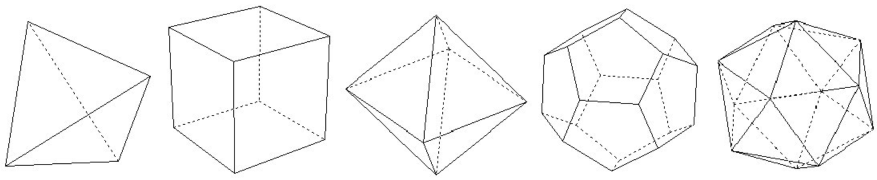
3. 정다면체의 오일러수는 $V - E + F = 2$이다.

4. 오일러공식 $V-E+F = 2$이 성립하는 다면체는 2차원 구면 $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 | \|\mathrm{x}\| = 1\}$과 위상동형이며, 오일러공식 $V - E + F = 0$이 성립하는 다면체는 2차원 원환체와 위상동형이다.

정리 4.6. *[1] 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체 뿐이다.*

증명 하나의 꼭짓점에 r개의 정n각형이 만난다고 하자. 그러면 n과 r은 3이상이다. 하나의 꼭짓점에서 만나는 r개의 정다각형의 각의 합은 2π보다 작고, 각각의 각의 크기는 $(n-2)\pi/n$이 된다. 따라서 $(r(n-2)\pi)/n < 2\pi$이므로 $(r-2)(n-2) < 4$가 된다. 이 부등식을 만족하는 순서쌍(r,n)을 구해보면, r,n은 3이상이므로 $(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)$이다. 각각의 순서쌍 (n,r)에 해당하는 정다면체는

아래 그림과 같이 구체적으로 찾을 수 있다. 따라서 가능한 정다면체는 이 다섯 가지뿐이다. □



정사면체(Tetrahedron) 정육면체(Cube) 정팔면체(Octahedron) 정십이면체(Dodecahedron) 정이십면체(Icosahedron)

정의 4.7. 원점 O을 중심으로 하는 정다면체 X의 대칭군을

$$S(\mathrm{X}) = \{f \in O(3) | f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\}$$

라 정의하고, X의 회전군(정향대칭군)을

$$S_d(\mathrm{X}) = \{f \in SO(3) | f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\}$$

라 정의한다.

참고 4.8.

1. 정다면체 X에 대하여, 회전군 $S_d(\mathrm{X})$는 $S(\mathrm{X})$의 지수가 2인 정규부분군이다. ($\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$는 $S(\mathrm{X}) = S_d(\mathrm{X})$를 만족할 때도 있지만, 만족할 때의 X는 정다면체가 아니다.)

2. 집합 X($\neq \varnothing$)에서 X자신으로의 일대일 대응을 X위의 치환(permutation)이라고 한다.

3. 유한군$\{1, 2, \cdots, n\}$의 모든 치환들의 군을 대칭군 S_n이라 하며, 대칭군 S_n의 원소의 갯수는 $n!$개이다.

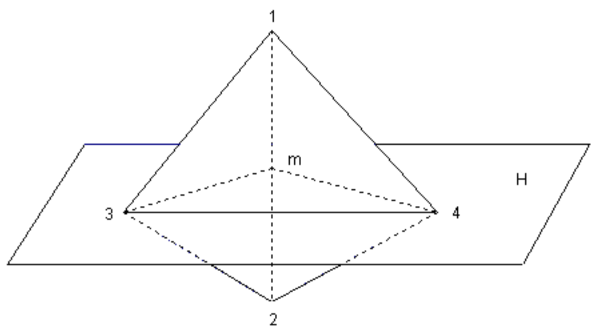
4. 치환 $\sigma \in S_n$가 서로 다른 r개의 문자를 순차적으로 변환시키고 나머지 문자는 고정시키는 치환일 때, 치환 σ를 길이가 r인 순환치환(cycle)이라 하고, 두 개의 항 i, j인 순환치환 (ij)를 호환(transposition)이라 한다.

5. S_n의 모든 원소는 호환들의 곱으로 표현할 수 있다.

6. S_n는 지수가 2인 정규부분군A_n을 가지게 되는데, A_n는 대칭군S_n에 속하는 짝수개의 호환의 곱으로 나타내어지는 우치환 전체의 집합을 말하는데, 이때의 부분군A_n을 교대군(alternating group)이라고 한다.

정리 4.9. *[1] 정사면체(regular tetrahedron)를 T라 하면, $S(T) \cong S_4$, $S_d(T) \cong A_4$ 이다.*

증명 T의 각각의 꼭짓점에 숫자 $1, 2, 3, 4$를 붙이고, 임의의 $f \in S(T)$를 한 점으로 보내는 준동형사상 $\alpha : S(T) \longrightarrow S_4$라 하자.



우선 α가 전사이다. 왜냐하면 S_4는 호환에 의해 생성되고, 호환은 α의 상이다. 점 $3, 4$와 모서리 $\overline{12}$의 중점 m를 포함하는 평면 H에 대하여 모서리 $\overline{12}$는 서로 수직이므로, 반사 R_H는 ${}_\alpha R_H = (12)$이다. 따라서 (12)이 α의 상이다. 또한, 다른 호환도 마찬가지이다. α는 또한 단사이다. 왜냐하면, 정리 3.4 에 의해 $\mathbb{R}^3$의 임의의 등거리 변환은 네 개의 아핀 일차독립인 점의 상에 의해 유일하게 정의된다. 그러므로 α는 동형사상이다. $\square$

참고 4.10. 1. T의 모든 정향등거리변환은 $\{1,2,3,4\}$의 우치환

2. $S_d(\mathrm{x})$는 $S(\mathrm{x})$에서 지수 2를 가지고, A_4는 S_4에서 지수 2를 가진다.

3. $\alpha|_{S_d(\mathrm{x})}$는 $S_d(\mathrm{x}) \longrightarrow A_4$인 동형사상이다.

이제 다른 정다면체들의 공통된 특징들을 알아보자.

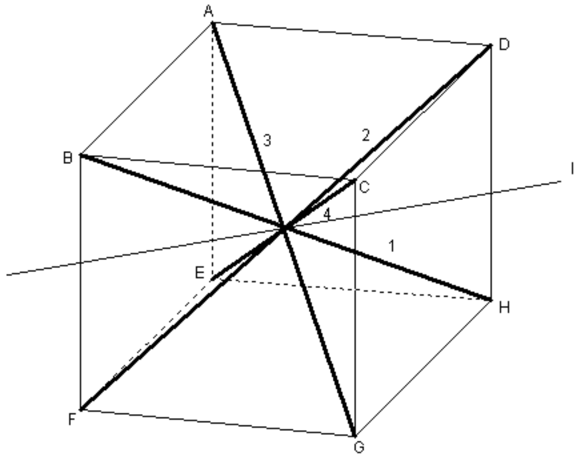
참고 4.11. 정사면체 외의 정다면체은 모두 중점적 대칭이다. 다시말하면 $J : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$는 $J(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}$에 의해 정사면체가 아닌 정다면체는 자신으로 보내진다. 이 때, 함수 J를 중앙 반전이라 부르며, $\mathbb{R}^3$에서의 모든 선형변환과 교환법칙이 성립한다.

참고 4.12. $\det(A) = 1$일 때, $A \longrightarrow (A, 1)$, $\det(A) = -1$일 때, $A \longrightarrow (J(A), -1)$로 정의된 함수 $O(3) \longrightarrow SO(3) \times \{\pm 1\}$은 군동형사상이다. ($\det(J(A)) = 1$의 경우 포함) 중심적 대칭인 다면체 X는 $S(\mathrm{X}) \cong S_d(\mathrm{X}) \times \{\pm 1\}$를 만족한다.

정리 4.13. *[1] 정육면체의 회전군은 S_4와 동형이고 정십이면체의 회전군은 A_5와 동형이다.*

증명 X와 Y를 쌍대라 하면, 임의의 X의 대칭성은 Y의 대칭성이 되고, 따라서 $S(\mathrm{X}) \cong S(\mathrm{Y})$이다. 중심적 대칭과 쌍대성으로 부터 정육면체와 정십이면체의 회전군 $S_d(\mathrm{X})$로부터 정팔면체와 정이십면체의 대칭군을 찾을 수 있다.

C를 정육면체라 하면, 회전군 $S_d(C)$는 S_4와 동형이다. 이것은 C에서 네 개의 기하적 대상을 잡고 C의 회전에 의해 그 네 개의 기하적 대상에서 그 자신으로 가는 사상이 동형사상 임을 통해 보일 수 있다.



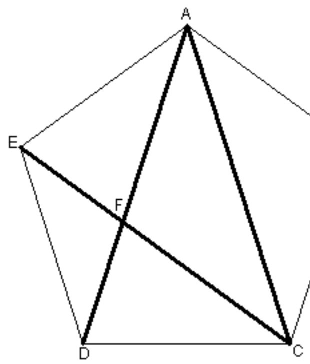
네 개의 물체를 정육면체의 대각선 BH를 1, DF를 2, AG를 3, CE를 4라고 하자. $S_d(C)$에서 S_4로의 사상을 α라 하고 대각선 1과 2를 포함하는 평면을 생각해보자. C의 그 두 모서리를 BH와 DF라 하고 l를 두 모서리의 중점을 지나는 직선이라고 하자. 직선 l에 대하여 각 π만큼 회전시킨 것을 f라 하면, $f(A) = G$, $f(C) = E$, $f(B) = F$, $f(D) = H$이고 f^2는 항등사상이다. 따라서, C의 회전변환 f에 대하여 $\alpha(f) = (12)$임을 통해 α는 전사이다. 군 S_4는 $4! = 24$개의 원소를 갖고, $S_d(C)$도 24개의 원소를 갖는다. 정육면체 C의 임의의 한 쌍의 점 P, Q에 대하여 P를 Q로 보내는 C의 회전변환이고 꼭짓점을 고정하는 세 개의 회전변환이 있다. 그러므로 $S_d(C)$는 24개의 원소를 갖는다.

D를 정십이면체라 하자. 회전군 $S_d(D)$는 A_5로 동형사상이고, 60개의 원소를 갖는다. 정십이면체의 다섯 개의 기하적 대상을 찾아야 한다. $S_d(D)$의 원소들에 의해 치환되는 이 다섯 개의 기하적 대상은 정십이면체에 내접하는 정육면체이고 정육면체의 모서리들은 정십이면체의 면의 대각선이다. 이 정육면체를 서로 다른 두 가지 방법으로 묘사하자.

1. 한 변의 길이가 1인 정오각형의 대각선의 길이는

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{5}.$$

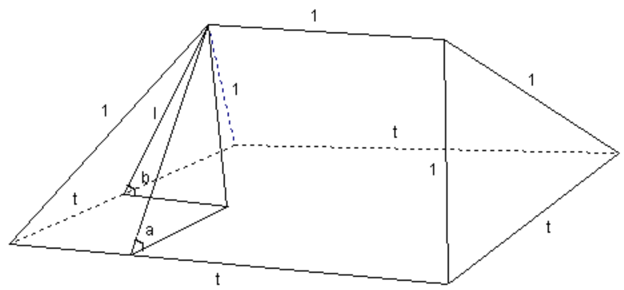
τ를 황금비율이라 부르고, $x^2 - x - 1 = 0$의 양수인 해이다.



$AF = CF = AB = 1, AC = EC = x$이므로 $EF = x - 1$이다.

$\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{ED}$, $\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1}$이므로 $x^2 = 1 + x$이다.

정육면체의 모서리의 길이를 τ라 하자. 정육면체의 면 위에 다음과 같은 'tent'를 올려보자. 두 면은 변의 길이가. τ, 1, 1, 1인 이등변 삼각형이고, 나머지 면은 변의 길이가 τ, 1, 1, 1인 사다리꼴이다. 사다리꼴과 삼각형은 각각 바닥면과 각 α, β를 이루고 있다.



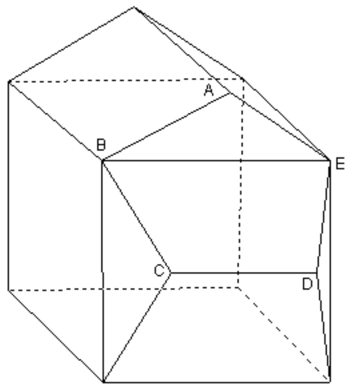
여기서 ρ를 삼각형의 높이라 하고, h를 텐트의 높이라 하자. 그러면

$$1 = \rho^2 + \left(\frac{\tau}{2}\right)^2, \rho^2 = h^2 + \left(\frac{\tau - 1}{2}\right)^2.$$

위에 두 식을 연립하면 $1 = h^2 + \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau}{2} + \frac{1}{4}$이다. 그러나 $\tau^2 - \tau = 1$ 이므로 $h = \frac{1}{2}$이고, $\tan\alpha = \frac{2h}{\tau} = \frac{1}{\tau}, \tan\beta = \frac{2h}{\tau-1} = \frac{1}{\tau-1}$이다. 그래서 $\tan\alpha\tan\beta = 1$이다. 따라서

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$이다.

정육면체의 이웃하는 면에 두 개의 텐트를 붙이면 평면 오각형 $ABCDE$이 생긴다. 따라서 정육면체의 모서리와 정십이면체의 대각선이 만나도록 한 변의 길이가 τ인 정육면체를 한 변의 길이가 1인 정십이면체에 내접시킬 수 있다.

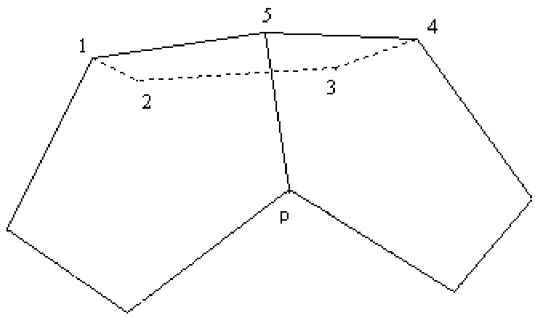


정십이면체의 하나의 면에 다섯 개의 대각선이 있으므로 정육면체를 정십이면체에 내접시키는 서로 다른 방법은 다섯 가지가 있다. 정십이면체의 면에 수직인 축에 대하여 $\frac{2\pi}{5}$만큼 회전한 것을 R이라 하고 각각의 회전변환을 1, R, R^2, R^3, R^4이라 한다. 또한, 정육면체는 두 개의 정사면체를 포함한다.

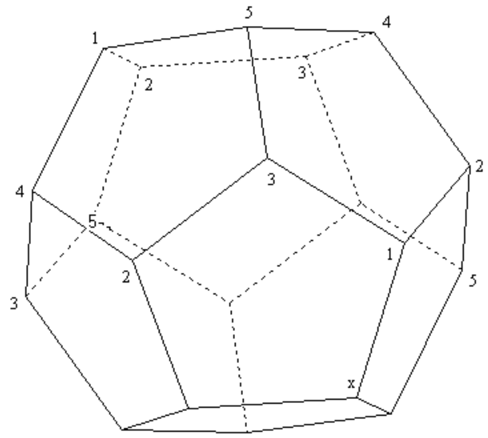
2. 정십이면체의 면 중 하나를 수평면으로 놓고 보자.

첫번째로 윗면의 꼭짓점에 순환적으로 $1,2,3,4,5$를 매긴다.

두번째로 다음 레벨의 꼭짓점들의 번호를 매긴다. 두번째 단계에서 꼭짓점 P를 보면, 점 P는 윗면의 5라는 꼭짓점에서 모서리를 따라 연결되고 그 윗면의 꼭짓점 중 $1,4$ 와 연결되므로 P는 또다른 수인 2 또는 3중 하나의 번호가 매겨진다. 이 단계에서 다른 꼭짓점들은 순차적으로 위의 면처럼 같은 방향으로 번호를 매긴다. 지금까지 윗면은 완벽히 번호가 정해졌고 각각의 5개의 면에 4개의 점에는 번호가 정해졌고, 이미 정해진 번호는 서로 다르다. 다음 단계의 점은 그 면에 없는 번호를 정하면 5개의 면의 점의 번호는 각각 다르다.



이제 마지막으로 바닥면의 꼭짓점에 번호만 정하면 된다. 각 면에 3개의 점의 번호는 정해져 있다. 그림에서 x라 정해진 점에는 연결된 면에 $1, 2, 3, 5$는 정해졌으므로 4밖에 올 수 있는 수가 없다. 이 과정을 통해 각 꼭짓점의 번호를 모두 정해질 수 있으며, 사면체의 꼭짓점에 번호를 정하는 방식과 같은 방식으로 4개의 꼭짓점도 번호를 정한다.



여기서 D의 한면에 각 꼭짓점의 번호는 $(5-1)!$가지 방식으로 정해지고 반사에 의해 생긴 각각 2가지 방법이 같으므로 D의 각 면의 꼭지점에 줄 수 있는 서로 다른 꼭짓점번호의 가짓수는 $\frac{1}{2}(5-1)!$이다.

12개의 면에 길이가 5인 치환 (12345) 또는 우치환에 의해 (12345)를 변환시킨 길이가 5인 치환이 대응된다. 그리고 마주보는 면에 대응하는 두 길이가 5인 치환은

서로 역이다. $\alpha : S_d(D) \to S_5$에 의해 길이가 5인 치환 (12345)로 보내지는 등장변환은 면의 꼭짓점의 번호가 $1, 2, 3, 4, 5$인 면과 이 면의 마주보는 면의 중심을 연결한 직선을 회전축으로 하는 회전각도가 $\pm\frac{2\pi}{5}$인 회전변환이다. 같은 방법으로 (12345)의 기치환에 의하여 얻어지는 길이가 5인 치환에 대응하는 등장변환은 회전각도가 $\pm\frac{4\pi}{5}$인 회전변환이다.

S_n의 두 켤레인 치환을 서로소인 순환치환의 곱으로 표현하면 이 두 표현에 있는 대응하는 순환치환의 길이는 같다. 그러나 두 치환의 길이가 같다고 해서 두 치환이 켤레가 되는 것은 아니다. 위에서 살펴본 $S_d(D)$에서 $\pm\frac{2\pi}{5}$만큼 회전하는 등장변환과 $\pm\frac{4\pi}{5}$만큼 회전하는 등장변환은 서로 켤레는 아니지만 치환의 길이는 같다.

A_5에서의 12개의 길이가 3인 순환치환의 각각의 점에 대하여 $\pm\frac{2\pi}{3}$씩 회전 함을 확인할 수 있으며 A_5에서 15개의 위수가 2인 원소인 모서리의 중점에 대하여 π만큼 회전한다.

$\alpha : S_d(D) \longrightarrow A_5$는 전사이다. 따라서 $S_d(D)$는 60개의 원소를 가지며 α는 동형사상이다. $\square$

	정향	전체
정사면체	A_4	S_4
정육면체, 정팔면체	S_4	$S_4 \times \{\pm 1\}$
정십이면체, 정이십면체	A_5	$A_5 \times \{\pm 1\}$

제 5 장

중등 기하에서 정다면체 응용

수학과는 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 논리적으로 사고하며, 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르고, 여러 가지 문제를 수학적인 방법으로 사용하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다.[4]

중학교 수학1에서 입체도형 단원을 수업할 때, 교구나 여러 가지의 컴퓨터 프로그램을 이용하여 좀더 구체적 조작 활동이나 탐구 활동을 통해 이해하도록 하고, 학생의 수준에 따라 입체도형의 성질은 엄밀한 증명보다는 이 성질을 활용하여 문제를 해결하는 데 중점을 두도록 하는 수업이었으면 한다. 그 중 정다면체에 대한 수업을 할 때, 정다면체의 정의와 입체도형의 성질을 이용하여 학생 스스로 만들어 봄으로써 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체 뿐이라는 것을 이해하도록 한다.

또한, 정다면체의 면과 꼭짓점의 갯수의 관계를 정다면체의 쌍대성을 통해 알 수 있다. 그것을 이용하여 학생이 직접 쌍대인 정다면체를 서로의 다면체 속에 넣어봄으로써 이해할 수 있다.

제 1 절 존재가능한 정다면체

다음은 정다면체의 종류가 다섯 가지뿐임을 학생의 수준에 맞게 수업에 설명할 내용이다.

우선 여러개 똑같은 길이의 나무젓가락이나 빨대 등 정다면체 만들 교구를 준비한다.

정다면체는 입체도형이므로 정다각형이 한 꼭짓점에 3개이상 만나게 해야 한다. 또한, 한 꼭짓점에 모인 정다각형의 각각의 각의 합이 360도면 평면이 되므로 360도보다 작아야 한다. 이 조건을 만족시키려면 우선 정다면체를 만들 때 사용할 정다각형의 한 내각이 120도보다 작아야 한다.

정삼각형 : 한 내각이 60도이므로 한 꼭짓점에 3개, 4개, 5개가 모일 수 있다.

정사각형 : 한 내각이 90도이므로 한 꼭짓점에 3개가 모일 수 있다.

정오각형 : 한 내각이 108도이므로 한 꼭짓점에 3개가 모일 수 있다.

정육각형 : 한 내각이 120도이므로 정다면체를 형성할 수 없다.

따라서 사용하게 되는 정다각형은 정삼각형, 정사각형, 정오각형이다.

그러므로 존재할 수 있는 정다면체는 한 꼭짓점에 정삼각형이 3개 모인 정사면체, 4개 모인 정팔면체, 5개 모인 정이십면체, 한 꼭짓점에 정사각형이 3개 모인 정육면체, 한 꼭짓점에 정오각형이 3개 모인 정십이면체이다.

제 2 절 정다면체의 쌍대성(duality)

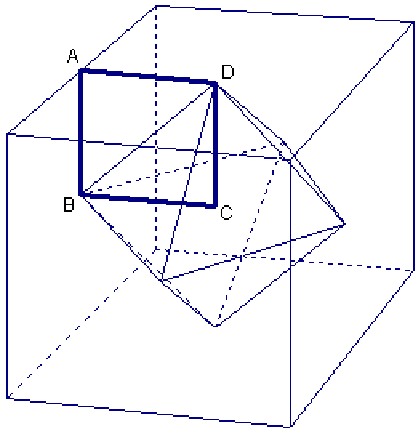
다섯 개의 정다면체는 쌍대성을 가진다. 여기서 정다면체의 쌍대성이란 정의 3.35. 에서 말했듯이 정다면체의 각각의 면의 중점을 연결하였을 때 또 하나의 정다면체가 생성되는데 이 때, 두 정다면체의 관계를 정다면체의 쌍대라 한다. 정사면체는 정사면체 자기자신과 쌍대이며, 정육면체와 정팔면체, 정십이면체와 정이십면체가 서로 쌍대이다. 이렇게 쌍대인 다면체가 가지는 성질이 있는데, 쌍대인 정육면체과

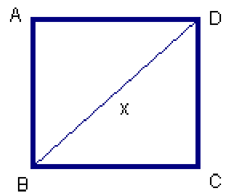
정팔면체는 서로의 면과 점, 점과 면, 모서리와 모서리가 서로 일대일 대응하게 된다. 따라서 정사면체의 면의 수 = 꼭짓점의 수, 정육면체의 면의 수 = 정팔면체의 꼭짓점의 수, 정팔면체의 면의 수 = 정육면체의 꼭짓점의 수, 정육면체의 모서리의 수 = 정팔면체의 모서리의 수, 정십이면체의 면의 수 = 정이십면체의 꼭짓점의 수, 정십이면체의 꼭짓점의 수 = 정이십면체의 면의 수, 정십이면체의 모서리의 수 = 정이십면체의 모서리의 수이다. 정다면체의 꼭짓점의 수는 쌍대인 다면체의 면의 수와 같으므로 쉽게 구할 수 있다. 정다면체는 오일러공식 $V - E + F = 0$ 이 성립하므로 모서리의 수도 쉽게 구할 수 있다. 이렇게 정다면체의 꼭짓점의 수, 모서리의 수, 면의 수를 학습할 때, 정다면체의 쌍대성을 설명하고 쌍다면체를 서로 안에 넣어보는 조작활동을 해봄으로써 학생들의 이해를 돕는다.

	꼭짓점의 수	모서리의 수	면의 수
정사면체	4	6	4
정육면체	8	12	6
정팔면체	6	12	8
정십이면체	20	30	12
정이십면체	12	30	20

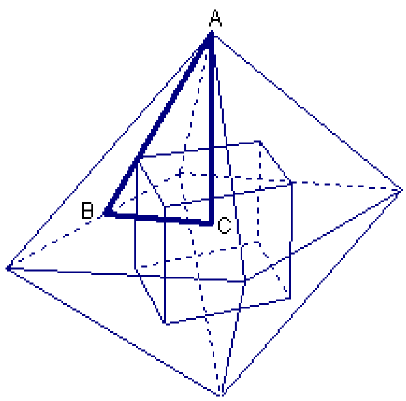
이제 쌍대인 정다면체를 서로 넣어보기 위해 모형의 크기를 구체적으로 몇가지 예를 구해보았다.

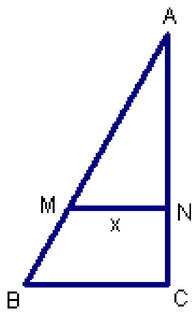
<정육면체와 정팔면체>





Case1 : 한변의 길이가 a인 정육면체 안에 정팔면체를 넣었을 때, 정팔면체의 한변의 길이 x를 구해보자. 정육면체의 단면 ABCD를 보면 한변의 길이가 $\frac{a}{2}$인 정사각형이고, 다각선의 길이가 정팔면체의 한변의 길이가 된다. 그러므로 한변이 길이가 a인 정육면체 안에 들어가는 정팔면체의 한변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$이 된다.





Case2 : 한변의 길이가 a인 정팔면체 안에 정육면체를 넣었을 때, 정육면체의 한변의 길이를 구해보자. 정팔면체의 단면 ABC와 정육면체가 만나는 교점을 M, N

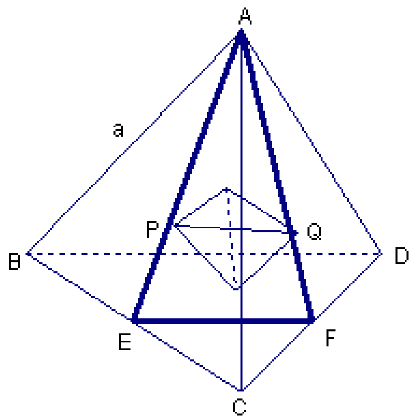
이라 하자. 또한, $\overline{MN} = x$라 하자. 그러면 $\overline{BC} = \frac{a}{2}$이므로

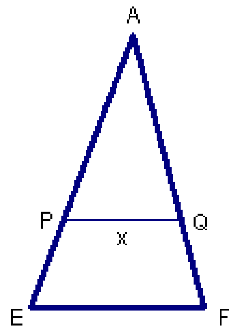
$$\overline{MN} : \overline{BC} = 2 : 3$$

$$x : \frac{a}{2} = 2 : 3$$

$x = \frac{a}{3}$이다. 따라서 x는 정육면체 한면의 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$이므로 정육면체 한변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{3}$이다.

<정사면체>





한변의 길이가 a인 정사면체와 쌍대인 정사면체의 한변의 길이 x를 구해보자. 정사면체의 단면 $\triangle AEF$를 보자. $\overline{AE} = \overline{AF} = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \angle EAF = \frac{\pi}{3}$이므로 $\triangle AEF$는 정삼각형이다. 그러므로 $\overline{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$이다. 점 P, Q가 $\triangle ABC$와 $\triangle ACD$의 무게중심이므로

$$\overline{PQ} : \overline{EF} = 2 : 3$$

$$x : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 : 3$$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}a$이다.

제 3 절 정다면체 학습지도안 연구

이 절에서는 존재가능한 정다면체와 정다면체의 쌍대성을 구체적인 수업지도안을 작성해 보았다. (부록:학습지도안1, 2)

1) 학습지도안1

1. 학년 : 중학교 1학년
2. 단원명 : 정다면체
3. 학습목표 : 정다면체에서는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체 뿐임을 이해하고 정다면체의 전개도를 알 수 있다.
4. 학습자료 : 정다각형교구(정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형)

[부록 : 학습지도안1]

이 학습지도안은 교사의 일방적인 설명식 수업으로 진행하지 않고 학생들이 직접 정다면체를 만들어봄으로써 존재가능한 정다면체는 다섯 가지라는 것을 이해하도록 한다. 단, 교사는 조력자역할만 하도록 한다.

2) 학습지도안2

1. 학년 : 중학교 1학년 수준별 수업 중 상반
2. 단원명 : 정다면체의 쌍대성
3. 학습목표 : 정다면체의 면, 모서리, 꼭짓점의 개수를 알아보는 과정을 통하여 이 들 도형의 이해를 더욱 깊게 한다.
4. 학습자료 : 정다각형교구(정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형)

[부록 : 학습지도안2]

이 학습지도안은 정다면체의 쌍대성이 어떤 것이라는 교사의 설명 후, 학생들이 직접 정다면체를 만들어 쌍대인 정다면체를 서로 넣어봄으로써 정다면체의 면, 모서리, 꼭짓점의 갯수를 이해하고 확인시키도록 한다. 단, 교사는 조력자역할만 하도록 한다.

참고 문헌

[1] Elmer G. Rees: *Notes on Geometry*, Springer-Verlag (1983)

[2] Howard Anton: *Elementary Linear Algebra* , Wiley (2005)

[3] 김홍종·계승혁·오지은·원애경: *중학교 수학1*, (주)성지출판 (2008)

[4] 교육인적자원부: *2007년 개정교육과정 중학교 교육과정 해설Ⅲ(수학,과학,기술가정)*, 교육과학기술부 (2007)

ABSTRACT

A study on algebraic properties of a geometric object

Chae Hye-jung
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education
Sungshin Women's University
Supervised by Yun, Ki Heon Ph. D.

In the thesis we define an isometry, which is a surjective map and which preserves the distance in a metric space, and we studied some properties of isometry in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$. We also considered isometry group of $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ together with some finite order subgroups of the isometry group.

As an application we suggest several teaching plans for the first year middle school geometry class.

[부록 : 학습지도안1]

학습주제	정다면체

단원	Ⅷ. 입체도형	차 시	4 / 15	지도교사	채 혜 정
소단원	1. 다면체와 회전체 1. 다면체	일 시	2010. 5. ( )	장 소	1학년 00반교실
		학 반	1학년 00반	쪽 수	262~265쪽
학습목표	1. 정다면체에서는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체 뿐임을 이해한다. 2. 정다면체의 면, 모서리, 꼭짓점의 개수를 알아보는 과정을 통하여 이들 도형의 이해를 더욱 깊게 한다.				

학습 단계	학습내용	교수-학습 활동	자료 및 유의점
도입 7분	**[전시학습 확인]** 다면체와 각뿔대의 정의	[교사] 지난 시간에 우리 입체도형 중 다면체와 각뿔대를 배웠었죠? [학생] 네. [교사] 다면체에는 어떤 것들이 있었죠? [학생] 삼각기둥이요, 사각뿔이요, 오면체요. [교사] 그래요. 다각형인 면으로만 둘러싸인 입체도형을 다면체라 하고, 면의 개수에 따라 사면체, 오면체, 육면체라 이름 붙였죠. 그럼 각뿔대는 어떤 도형을 말하는 것이었죠? [학생] 각뿔을 위에 자른 거요. [교사] 맞아요. 그런데 각뿔을 자르는데 그냥 마구 자르는 것이 아니고 어떻게 자른 도형이라고 했죠? [학생] 밑면과 평행하게 잘라요.	PPT
	[동기유발]	· 정다면체의 유래를 준비된 PPT(플라톤의 다면체)를 보여준다.	
	[학습목표] 1.정다면체에서는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체 뿐임을 이해한다. 2.정다면체의 면, 모서리, 꼭짓점의 개수를 알아보는 과정을 통하여 이 들 도형의 이해를 더욱 깊게 한다.	· 학습 목표를 학생들에게 보여주고 읽게 한다.	

전개 30분	[정다면체의 정의] 각 면이 모두 합동인 정다각형이며, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 같은 다면체를 **정다면체**라 한다.	[교사] (정다면체인 교구와 다면체이지만 정다면체가 아닌 교구를 보여주며) 다음과 같은 다면체에서 모든 면이 합동이고, 정삼각형, 정사각형 같은 정다각형이며, 각 꼭짓점에서 만나는 면의 개수가 같은 다면체는 어느 것일까? [학생] (정다면체인 교구를 가리키며) 저거요. [교사] 그래요. 이렇게 모든 면이 합동인 정다각형이고, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 같은 다면체를 정다면체라 해요. 그렇다면 이런 정다면체를 조별로 만들어볼 거예요.	칠판 교구
	[존재가능한 정다면체] 조별로 주어진 정다각형 교구를 가지고 정다면체를 만들어 보자.	[교사] 자. 입체도형이 되려면 한 꼭짓점에 적어도 몇 개의 면이 만나야 할까? [학생] 세 개요. [교사] 그렇죠. 하나의 꼭짓점에서 만나는 정다각형의 내각의 합이 360도 이상이면 입체도형이 될까요? [학생] 아니오. [교사] 그럼 정삼각형을 몇 개가 한 꼭짓점에서 만나야 정다각형이 될까요? [학생] 3개요, 5개요, 4개요. [교사] 맞아요. 그럼 이제 조별로 주어진 정삼각형을 가지고 정다면체를 만들어 볼까요? (시범적으로 만들어 보이고 설명하며 한 면이 정삼각형인 정사면체, 정팔면체, 정십이면체를 만들어 본다.) [교사] 한 꼭짓점에 정삼각형이 3개, 4개, 5개가 만나는 정다각형의 이름이 무엇이 될지 다면체의 면의 개수를 확인해보고 말해볼까요? [학생] 정사면체, 정육면체, 정팔면체요. [교사] 그래요. 면이 정삼각형인 정다면체는 정사면체, 정팔면체, 정십이면체가 있어요. 이번에는 정사각형을 면으로 갖는 정다면체를 만들어 볼 거예요. 정사각형의 한 내각의 크기는 몇 도이죠? [학생] 90도요. [교사] 그렇죠. 그래서 한 꼭짓점에 만날 수 있는 정사각형의 개수는 3개뿐이겠죠. 이제 정사각형을 가지고 정다면체를 만들어 볼까요. (정육면체를 만들어본다.) 면이 몇 개인 정다면체가 나왔죠?	

		[학생] 6개요. [교사] 그럼 지금 만든 그 다면체의 이름은 무엇이 될까요? [학생] 정육면체요. [교사] 맞아요. 이번에는 정오각형으로 정다면체를 만들어 볼까요. 정오각형의 한 내각의 크기는 몇 도죠? [학생] 108도요. [교사] 그렇죠. 그럼 입체도형이 되려면 한 꼭짓점에 적어도 3개는 만나야 하니까 108도가 3개면 360도이상인가요? [학생] 아니요. [교사] 그럼 정오각형으로 정다면체를 만들어 볼까요. (정십이면체를 만들어본다.) 이 입체도형의 면의 개수는 몇 개죠? [학생] 12개요. [교사] 그럼 이 다면체의 이름은 무엇이 될까요? [학생] 정십이면체요. [교사] 맞아요. 이번에는 정육면체로 정다면체를 만들어볼까요. 정육면체의 한 내각의 크기는 몇 도죠? [학생] 120도요. [교사] 그래요. 그러니까 정육각형 3개가 한 꼭짓점에서 모이면 정다면체가 되나요? [학생] 아니요. 360도이상이예요. [교사] 맞아요. 그래서 정다면체를 만들 수 있는 정다각형은 정삼각형, 정사각형, 정오각형 이예요. 그럼 정다면체가 어떤 것들이 있었죠? [학생] 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체요. [교사] 잘했어요. 정다면체는 이렇게 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체로 다섯 개 뿐이예요.	칠판 교구 PPT
	[정다면체의 전개도] 만들어 놓은 정다면체를 펴서 전개도를 직접 눈으로 확인해본다.	[교사] 지금까지 만들어 본 정다면체를 펴서 정다면체의 전개도를 확인해볼까요. [학생] 네. [교사] 정다면체의 전개도는 과제지에 그려오도록 하세요.	

		[학생] 네.	
정 리 및 평가 8분	[형성평가]	개인별로 형성평가지를 나눠줘서 풀게 한 후 답을 맞춰보고 학생들이 모르는 문제뿐만 아니라 다른 문제들도 같이 풀어봄으로써 교사는 학생들이, 학생들은 자기 스스로 이번수업내용을 얼마나 알았는지를 확인한다.	형성 평가지 PPT
	[학습내용 총정리]	이번 시간에 배운 정다면체의 정의, 존재가능한 정다면체, 정다면체의 면, 모서리, 꼭짓점의 개수를 확인한다.	
	[과제제시]	정다면체의 전개도 그려오기를 과제지를 주어 그려오게 한다.	
	[차시예고]	다음 시간에 배울 회전체에 대해 간단하게 설명해준다.	

(첨부1 - 형성평가지)

중 7-나	1. 다면체	점수 : /
형성평가		이름 :

1\. 다음 중 정다면체에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 정다면체는 5가지 뿐이다.
② 정다면체의 면의 모양은 정삼각형, 정사각형, 정오각형 뿐이다.
③ 한 정다면체의 한 꼭지점에 모이는 면의 수는 같다.
④ 면이 정오각형인 정다면체는 정이십면체이다.
⑤ 면이 정삼각형인 정다면체는 3가지 뿐이다.

2\. 정다면체를 모두 쓰시오.

3\. 다음 조건에 맞는 정다면체는?

ㄱ. 면은 모두 합동인 삼각형으로 둘러싸여 있다.
ㄴ. 각 면은 정삼각형이다.
ㄷ. 한 꼭지점에 5개의 면이 모인다.

① 정사면체 ② 정육면체
③ 정팔면체 ④ 정십이면체
⑤ 정이십면체

4\. 다음 조건에 맞는 입체도형을 구하여라.

㉠ 정다면체이다.
㉡ 각 꼭지점에 모이는 면의 개수가 4개이다.
㉢ 각 면은 크기가 같은 정삼각형이다.

5\. 각 꼭지점에 모인 면의 개수가 같은 정다면체끼리 짝지은 것은?

① 정사면체, 정팔면체, 정십이면체
② 정사면체, 정육면체, 정십이면체
③ 정사면체, 정팔면체
④ 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체
⑤ 정사면체, 정육면체, 정이십면체

(첨부2 - 과제지)

중 7-나	정다면체의 전개도 그리기	조
과제		이름 :

【정사면체의 전개도】	【정육면체의 전개도】
【정팔면체의 전개도】	

【정십이면체의 전개도】
【정이십면체의 전개도】

[부록 : 학습지도안2]

학습주제	정다면체의 쌍대성

단원	Ⅷ. 입체도형	차 시	수준별수업	지도교사	채 혜 정
소단원	1. 다면체와 회전체 1. 다면체	일 시	2010. 5. ( )	장 소	1학년 00반 교실
		학 반	1학년 상반	쪽 수	탐구활동
학습목표	정다면체의 면, 모서리, 꼭짓점의 개수를 알아보는 과정을 통하여 이 들 도형의 이해를 더욱 깊게 한다.				

학 습 단계	학습내용	교수-학습 활동	자료 및 유의점
도입 7분	[전시학습 확인] 정다면체의 정의와 종류	정다면체의 정의와 종류를 다시 한번 확인한다.	PPT
	[동기유발]	· 정다면체의 유래를 준비된 PPT(플라톤의 다면체)를 보여준다.	
	[학습목표] 정다면체의 면, 모서리, 꼭짓점의 개수를 알아보는 과정을 통하여 이 들 도형의 이해를 더욱 깊게 한다.	· 학습 목표를 학생들에게 보여주고 읽게 한다.	
전개 30분	**〈정다면체의 면, 모서리, 꼭짓점의 개수〉** 정다면체의 면, 모서리, 꼭짓점의 개수를 정다면체의 쌍대성과 오일러공식을 이용하여 이해할 수 있도록 한다. 정다면체의 각각의 면의 중점을 연결하였을 때 또 하나의 정다면체가 생성되는데 이 때, 두 정다면체의 관계를 **정다면체의 쌍대**라 한다. 정사면체는 정사면체 자기자신과 쌍대이며, 정육면체와 정팔면체, 정십이면체와 정이십면체가 서로 쌍대이	[교사] (PPT에 작성해놓은 정다면체표를 보여주며) 자!! 이번시간에는 지금까지 배운 정다면체를 좀더 자세히 살펴볼 거예요. (정다면체의 쌍대성을 설명하며 준비된 정다면체 교구를 가지고 학생들 눈으로 확인함으로서 정다면체의 면, 모서리, 꼭짓점의 개수를 이해하도록 한다.) ※ 모서리의 개수는 오일러공식 [V-E+F=2] (V:점의 개수, E:모서리의 개수, F:면의개수)를 통해 구할 수 있음을 설명한다.	칠판 교구 PPT

	다. 이렇게 쌍대인 다면체가 가지는 성질이 있는데, 쌍대인 정육면체과 정팔면체는 서로의 면과 점, 점과 면, 모서리와 모서리가 서로 일대일 대응하게 된다.		
정 리 및 평가 8분	[형성평가]	개인별로 형성평가지를 나눠줘서 풀게 한 후 답을 맞춰보고 학생들이 모르는 문제뿐만 아니라 다른 문제들도 같이 풀어봄으로써 교사는 학생들이, 학생들은 자기 스스로 이번수업 내용을 얼마나 알았는지를 확인한다.	형성 평가지 PPT
	[학습내용 총정리]	이번 시간에 배운 정다면체의 정의, 존재가능한 정다면체, 정다면체의 면, 모서리, 꼭짓점의 개수를 확인한다.	
	[과제제시]	정다면체의 전개도 그려오기를 과제지를 주어 그려오게 한다.	
	[차시예고]	다음 시간에 배울 회전체에 대해 간단하게 설명해준다.	