강 병 개 교수지도
석사학위 청구논문

교육과정별 일차방정식과 일차함수의 그래프 사이의 관계

2010

성신여자대학교 교육대학원

교육학과 수학교육전공

정 유 진

교육과정별 일차방정식과 일차함수의 그래프 사이의 관계

강 병 개 교수지도

이 논문을 석사학위논문으로 제출함

2010년 5월

성신여자대학교 교육대학원

교육학과 수학교육전공

정 유 진

인 준 서

정유진의 석사학위 논문으로 인준함.

심사위원 ____________________ ㉧

심사위원 ____________________ ㉧

심사위원 ____________________ ㉧

성신여자대학교 교육대학원

논 문 개 요

중학교 수학에서 대수 해석학 분야의 대부분을 차지하고 있는 것이 방정식과 함수라고 해도 과언이 아니다. 중학교 1, 2학년에서 다루는 일차방정식의 풀이와 일차함수의 그래프 사이의 관계는 향후 보다 상급학년에서의 방정식과 함수의 그래프 사이의 관계를 이해하는 시금석이 될 것이므로, 올바른 개념의 정립이 매우 중요한 교육적 주제이다.

이 논문에서는 우리나라 교육과정의 변천에 따라 일차방정식과 일차함수의 그래프 사이의 관계를 어떻게 다루어왔는지를 조사하였다.

방정식과 함수는 광복 이후 우리나라 수학교육과정이 교수요목기부터 시작하여 제1차 ~제7차 개정에 이르기 까지 많은 변화를 거치면서 조금씩 계속 변화해 왔다. 교육과정마다 방정식과 함수의 그래프사이의 관계가 조금씩 달리 다루어 졌다는 것은 그만큼 이 주제가 다루기 어렵다는 것을 반증하는 것이기도 하다.

이런 방정식과 함수의 그래프사이의 관계의 교육과정별 변화과정을 수학교과서를 중심으로 분석하였고 앞으로의 교육과정에서 이 주제를 어떻게 다루어야 하는지 대안을 제시하고자 하였다.

목 차

Ⅰ. 서 론

우리나라 수학과 교육과정에서 방정식과 함수는 중·고등학교에 전 학년 과정에서 핵심적인 비중을 차지해 왔다. 방정식 $f(x)=0$ 의 근이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표임을 이해하는 것은 처음 접하는 학생들에게는 쉬운 일이 아니며, 특히 중학교 2학년 과정에서 방정식 $ax+by+c=0$ 의 해의 집합인 직선이 함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 의 그래프 임을 이해하는 것은 대단히 어려워 보인다. 이와 같은 어려움으로 광복 이후 우리나라가 여러 차례의 교육과정 개정을 거치면서 중·고등학교에서의 방정식과 함수 각각의 개념과 이 둘 사이의 관계에 대한 내용이 조금씩 변해 왔다는 것만으로도 미루어 짐작할 수 있다.

현재 우리나라 학교수학에서 초등학교 6학년 규칙성과 문제해결 .영역에서 방정식의 개념이 처음 나오고, 함수의 개념은 나오지 않지만 비례관계를 학습하면서 함수의 선수학습이 이루어진다.

중학교 1학년에서 방정식은 ‘문자와 식’영역에서 문자의 사용, 식의 값 구하기, 일차식의 덧셈과 뺄셈, 일차 방정식의 개념, 등식의 성질 등을 학습하게 된다. 또, ‘함수’의 영역에서 함수의 정의적 개념을 처음으로 다루는데 함수를 표, 식, 그래프로 나타내고, 함수의 활용을 다룬다. 그러나 이때는 일차식의 계산에서는 하나의 문자에 관한 일차식만 다루고, 함수개념에서는 실생활에서 한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 관계를 이용하여 도입한다. 따라서 함수의 원래 정의의 바탕이 되는 대응의 의미는 직관적인 수준에서만 다룬다.

중학교 2학년에서는 선수학습 내용을 바탕으로 미지수가 2개인 일차방정식, 연립일차방정식의 개념과 해를 구하는 방법을 학습하고, 일차함수의

뜻과 그래프, 일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식의 관계, 일차함수의 활용을 학습한다. 이 때 두 일차함수의 그래프를 통한 연립일차방정식의 해에 대한 내용은 연립일차방정식의 해가 두 직선의 교점임을 이해하는 정도로만 다루게 된다.

중학교 3학년에서는 이차방정식과 그 해, 이차방정식의 활용을, 함수에서는 이차함수의 뜻과 그 그래프의 성질 등을 학습하게 되는데 이차방정식은 실수해를 가지는 경우만 다루게 되며, 이차방정식의 해와 이차함수의 그래프 사이의 관계는 다루지 않는다. 또한 이차함수에서 최댓값과 최솟값은 정의역이 실수 전체인 경우만 다룬다. .

중학교과정에서 학습한 방정식과 함수 개념은 이 후에 고등학교과정에서 '문자와 식' 영역에서 다항식의 연산과 활용, 유리식과 무리식의 계산, 이차방정식의 활용, 고차방정식과 부등식, 연립방정식과 부등식을 학습하기 위한 기초 과정이 되고, 뿐만 아니라 '기하' 영역에서는 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동, 부등식의 영역의 이해와 활용을, '함수' 영역에서는 이차함수의 활용, 유리함수, 무리함수, 삼각함수의 개념과 활용을 학습하는데 필요한 개념이 된다.

이와 같이 우리나라의 수학교육에서 방정식과 함수는 핵심적일 뿐만 아니라 엄청난 비중을 차지하고 있으므로 방정식과 함수 개념이 처음부터 바르게 정립되는 것은 매우 중요한 문제가 아닐 수 없다. 따라서 중학교 2학년과정에서 다루는 미지수가 2개인 일차방정식과 일차함수의 각각의 개념이해와 그 둘 사이의 관계 파악은 이후의 상급교육과정에서 학습하게 될 고차방정식과 함수의 개념 확립에 지대한 영향을 미치므로 그 중요성은 아무리 강조해도 과하지 않을 것이다.

우리나라는 광복 이후부터 현재까지 교육과정이 수차례 변화해 왔고, 방정식과 함수에 관한 교육내용도 변화를 겪어왔다. 특히, 함수의 정의와, 함수의 그래프와 방정식의 풀이와의 관계 등은 교육과정이 바뀔 때마다 조

금씩 변화가 있어서 그때마다 혼란을 준 것이 사실이다. 따라서 이들의 변화과정이 어떠하였는지 알아보고, 이를 바탕으로 앞으로 방정식과 함수 교육이 어떤 방향으로 나아가야 할지 고찰해 보는 것이 중요하고 의미있는 일일 것이다.

이에 본 논문에서 우리나라의 광복 이후의 교육과정의 변천에 따르는 일차방정식과 일차함수의 그래프 사이의 관계에 대하여 분석해보고 그에 따른 일차방정식과 일차함수사이의 관계 지도 방향을 모색해보고자 한다.

본론의 제 1장에서는 교육과정변천에 따르는 일차방정식과 함수의 개념의 변화를 살펴보기 위해서 광복 이후의 우리나라 교육과정의 변천을 교수요목기부터 시작하여 제 1차~7차 개정교육과정에 이르기 까지 우리나라 중학교 수학과 교육과정과 그 특징을 살펴보았다.

제 2장에서는 일차방정식과 그 해에 대한 중학교 수준에서의 일반적인 설명을 먼저 다루고, 미지수가 2개인 일차방정식과 그 해에 대한 내용을 크게 2차, 3차~5차, 6차, 7차 이후의 교육과정으로 나누어 교과서를 중심으로 교육과정별로 어떻게 표현되어 있고, 달라진 내용은 무엇이며, 문제점은 없는지에 대하여 살펴보았다. 또한 일차함수와 직선의 방정식에 관해서도 일차함수의 그래프와 일차방정식의 해에 대한 일반적인 설명을 하고, 직선의 방정식의 용어가 언제 도입되었는지, 또한 '직선의 방정식'이라는 용어가 도입된 이후에는 직선의 방정식과 일차함수의 관계가 어떻게 표현되어졌는지 2차, 3차~4차, 5차~7차 개정교육과정까지로 분류하여 알아보고, 교육과정의 변천에 따라 달라진 내용은 무엇이며, 문제점은 없는지를 검토해 보았다.

Ⅱ. 본 론

1. 우리나라 교육과정의 변천

교육과정의 변천에 따르는 함수와 일차방정식의 개념의 변화를 살펴 보기 위해서는 먼저 우리나라 교육과정의 변천을 알아보는 것이 순서일 것이다.

광복 후 우리나라 중학교의 수학과 교육과정과 그 특징은 다음과 같다.

교수요목기(1946~1954)는 광복 전 일본 체제의 교육과정으로 다소 성급하게 제정되었기 때문에 가르칠 주제를 열거하는 수준을 벗어나기 어려웠고, 지도내용이 너무 어렵고 과다했다. 이 시기에는 중등학교의 학제가 빈번하게 변경되었고, 일제 시대의 교육을 답습하였다.

제 1차 교육과정(1954~1963)은 미군정 하에서 제정된 교수요목이 임시방편적인 성격을 지녔기 때문에, 교육과정을 새롭게 제정하고자 하는 노력에 의해서 교수요목기의 문제점을 개선하여, 학생들이 수학의 기본적인 개념이나 원리를 알게 하고, 사고 능력의 양성, 기초적인 과정과 상호관계를 알게 하고자했다. 또, 경제적, 문화적 생활을 하는데 필요한 문제를 수학적으로 해결하려는 이른바 생활중심의 수학교육을 강조하였다. 이 시기에 중학교 수학과의 목표는 생활상의 문제를 해결하려는 능력과 태도를 기르기 위해 수학적인 개념, 원칙을 이해하고 적용하는 기능을 강조하고 있다. 이를 위해 풍부하고 구체적인 생활경험을 통하여 수학적 개념과 원리, 원칙을 이해하고, 구체적인 예를 통하여 사고, 추리, 판단하는 능력을 기르며, 실생활의 문제를 해결하는 경험을 통해 수학의 유용성을 이해하는 것을 강조한다.

제 2차 교육과정은 제1차 교육과정이 6·25 전쟁과 휴전 성립 직후의 비

정상적인 사회 상태와 그에 따른 여러 가지 제약으로 내용을 제대로 설정하지 못하였다. 이 시기 미국에서는 수학교육 현대화 운동이 절정에 달하였다. 이 같은 국내외적 상황을 반영하여 설정된 이 교육과정은 경험 중심의 교육과정으로 수학의 체계와 지도 내용 수준의 향상, 논증적 사고의 강화 등의 특성을 보였다. 전반적으로 수학의 체계를 강조하고 계통학습을 중시하였다. 이 교육과정의 중학교 수학과 목표는 생활경험, 수학의 기초적인 개념, 원리 법칙을 이해하는 것을 강조하였다. 또한 문제를 능률적으로 해결하는 능력을 기르고, 수학에 관한 기초적인 지식과 기능을 바탕으로 일상적인 생활문제를 자주적으로 처리하도록 하였다. 이를 위해 수학의 기초적인 개념과 원리, 원칙의 이해는 구체적인 것에서 일반화, 체계화 하도록 하여, 학생이 자주적으로 문제를 발견하고 창의적으로 해결해가도록 했다. 또 대수적·기하적 내용의 유대를 밀접히 하여 수학을 통일적으로 지도하였다.

제 3차 교육과정(1973~1981)은 1950년대 초 미국을 비롯한 여러 나라에서 수학 교육 현대화 운동이 시작되었고, 이에 따른 '새수학(New Math)'의 영향이 이 시기 교육과정에 반영되었다. 이 교육과정은 학문 중심 교육과정이라고 불리는데 학생수준에 비하여 지나치게 수학적 구조와 논리적 엄밀성을 강조하였고, 정확한 용어와 기호의 사용을 강조하였다. 수학의 조기 도입과 엄밀한 논리, 구조화된 수학지도를 목적으로 하고 있으므로, 새로운 내용뿐 만 아니라 엄밀한 용어 및 기호를 도입하고 강화하여 그 수준이 매우 높았다. 집합의 지도를 강조하였고, 도형의 대수적 지도, 즉 좌표를 이용한 도형의 성질 지도도 강조되고 있다.

제 4차 교육과정(1981~1987)은 새 수학 내용을 적극적으로 반영하였던 제 3차 교육과정에서 내용이 많고 수준이 지나치게 높은 문제점들이 비판을 받으면서 제 4차 교육과정에서는 새 수학의 정신은 유지하되 높은 수준의 내용을 삭제 또는 경감하며 지나치게 엄격한 용어나 기호의 사용을

완화하는 특성을 보인다. 또한 문제해결은 강조하고는 있지만 잘 반영되지는 않았다.

제5차 교육과정(1987~1992)은 제 4차 교육과정의 운영상의 문제점을 수정·보완하는데 역점을 두어 변화가 많지 않았다. 제3차 교육과정에서 과다하게 삽입된 학습내용을 경감시키고 기초학력 배양에 중점을 두었으며, 특히 문제 해결력 신장에 역점을 두었다. 또한 수학에 대한 정의적 측면은 강조하였고, 수학적 활동을 강화하였다.

제 6차 교육과정(1992~1997)은 정보화 사회를 대비하여 제정되었는데 제 5차 교육과정의 기본 구조를 가능한 그대로 유지하면서 문제점을 수정·보완하였다. 따라서 제 5차 교육과정과 같이 학습부담 경감을 위해 학습내용을 축소하였고 문제해결력을 강조하였다. 또한 다양한 평가 방법을 권장하였다.

제 7차 교육과정(1997~2007)은 학생중심의 교육과정으로, 학생 개개인의 능력수준에 맞는 학습이 가능하도록 수준별 교육과정(단계형과 과목선택형)을 도입하였다. 또한 학습부담 경감을 위하여 학습내용을 축소하였고 수학기본지식을 중시하였고, 수학적 사고력과 문제해결력의 신장을 중시하였다.

개정교육과정(2007~현재)에서는 단계별 수준별 교육과정으로 구성하여 개인의 능력과 수준, 적성 등을 고려한 수학교육을 도모했고, 수학 학습 내용의 적정화를 기하여 수학의 기본 지식을 가지게 하는 수학교육을 실시하였다. 그 밖에 학습자의 활동을 중시하는 수학교육을 강조하였고, 수학학습에 흥미와자신감을 가지게 하는 수학교육이 되도록 하였다.

2. 일차 방정식과 그 해

1) 일차 방정식에 대한 일반적인 설명

두 개의 미지수 x, y에 관한 일차방정식은 $ax+by+c=0$ (a, b, c는 상수, $a \neq 0, b \neq 0$)으로 나타나내는 것이 일반적이나 등식의 성질을 이용하여 다른 여러 방법으로 나타낼 수 있다.

일반적으로 미지수가 2개인 일차방정식의 해는 미지수가 2개인 일차방정식을 만족하는 x, y의 값 또는 그 순서쌍 (x, y)이고, '방정식을 푼다는 것'은 방정식의 해를 구하는 것이다. 일반적으로 미지수가 2개인 일차방정식의 해는 무수히 많으나 x, y의 값의 범위가 자연수 전체로 제한되어 있는 경우에는 해의 개수에 따라 해가 유한개인 경우, 해가 없는 경우, 해가 무수히 많은 경우로 분류 될 수 있다. 일차방정식의 해를 구하여 좌표평면에 나타내면 미지수가 2개인 일차방정식의 그래프가 된다.

연립일차방정식은 여러 개의 일차방정식을 한 쌍으로 묶어 놓은 것으로 그 해는 각 일차방정식을 동시에 만족하는 x, y값 또는 그 순서쌍을 말한다. 연립방정식의 해는 대응표를 만들어 공통인 순서쌍을 찾아서 구한다. 그래프 상에서 미지수가 2개인 연립일차방정식의 해는 각 일차방정식의 그래프의 교점의 좌표와 같다.

2차~5차 교육과정에서는 미지수가 2개인 일차방정식의 해의 뜻을 방정식을 만족하는 순서쌍들의 집합으로 보았다. 따라서 일차방정식을 푼다는 것은 하나의 식을 만족하는 해집합을 구하는 것이고, 미지수가 2개인 일차방정식을 푼다는 것은 두 식을 만족하는 해집합을 구하는 것으로 나타낸다. 이렇게 해집합이라는 용어를 사용하면 논리적 비약은 없다. 그러나 6차 이후의 교육과정에서는 해의 범위를 자연수 혹은 정수로 제약하여 일차방정식의 간단한 특수해 하나만 순서쌍으로 보이고 해로 설명한 뒤 일반해에 대한 설명이 없는데, 이는 논리적 비약이 될 수 있고, 고등학교 과정에서 다루는 연립방정식과의 관계가 애매해질 수 있다.

2) 교육과정별 이원일차방정식과 그 해

미지수가 2개인 일차방정식($ax+by+c=0$)의 해의 뜻에 대한 내용을 교육과정별로 살펴보면 다음과 같다.

(1) 2차 교육과정

2차 교육과정의 박정기의 중학교 수학2[7] 에 따르면 미지수가 2개인 방정식을 이원일차방정식이라고 한다.

예를 들어, $x+y=22 \cdots\cdots (1)$에 맞는 정수 x, y의 한 쌍을 (x, y)로 표시하기로 하면 이들은 무수히 많고, 이들의 집합을 S 라 하면,

$$S=\{\cdots,(6,16),(7,15),(8,14),(9,13),(10,12),(11,11),\cdots\}$$

이고, 이 집합 S 를 방정식(1)의 해집합이라고 한다.

또, $3x+y=40 \cdots\cdots (2)$의 해집합을 T 라 하면

$$T=\{\cdots,(6,22),(7,19),(8,16),(9,13),(10,10),(11,7),\cdots\}$$

이다.

(1)식과 (2)식을 동시에 성립시키는 x, y의 값은 위의 두 집합 S와 T에 공통으로 들어있는 원소이고

$$S \cap T=\{(9,\ 13)\}$$

이므로, $x=9, y=13$이다. 이와 같이 이 두 방정식을 동시에 성립시키는

미지수의 값의 짝을 이 연립방정식의 근 또는 풀이라고 하고, 근을 구하는 것을 이 연립방정식을 푼다고 한다. 집합의 뜻에서 생각할 때는 연립방정식을 푼다는 것은 그들 각 방정식의 해집합들의 공통집합을 구하는 것과 같다.

그러나 여기에서 말하는 해집합은 방정식의 일반적인 해를 의미하는 것이 아니라, 정수의 해의 집합을 뜻한다.

이처럼 2차 교육과정에서는 연립방정식의 해를 구할 때 해집합의 범위를 정수로 정한 정수해 일부만을 구할 뿐 일반적인 해를 구하는 것에 대한 언급이 없다.

(2) 3차 ~ 5차 교육과정

3차 교육과정의 한국교육개발원의 중학교 수학2[11]에서는 다음과 같은 예문을 통해서 이원일차연립방정식의 해의 뜻을 설명하였다.

[예] 20원짜리와 10원짜리 우표를 합하여 14장을 사고, 200원을 지불하였다. 각각 몇 장씩 샀는지 알아보자. 20원짜리 우표 X장, 10원짜리 우표 Y장을 샀다고 하면, 다음과 같은 두 식이 얻어진다.

$$x+y=14 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$20x+10y=200 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

구하는 x, y의 값은 (1),(2)를 동시에 만족해야한다. 또, x, y의 변역은 양의 정수 이므로, 다음과 같은 표를 만들어 본다.

표(1)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

표(2)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	18	16	14	12	10	8	6	4	2

위의 표 (1), 표(2)에서 x, y의 값이 일치하는 것은 $x=6, y=8$일 때이다. 즉, ·20원 짜리 6장, 10원 짜리 8장을 산 것이 된다.

한편, 앞의 이원일차방정식 $x+y=14$의 해집합은

$$\{(1,13), (2,12), (3,11), (4,10), (5,9), (6,8),$$
$$(7,7), (8,6), (9,5), (10,4), (11,3), (12,2), (13,1)\}$$

이고, 이원일차방정식 $20x+10y=200$의 해집합은

$$\{(1,18), (2,16), (3,14), (4,12), (5,10), (6,8), (7,6), (8,4), (9,2)\}$$

이다. 이 때, 두 집합의 공통인 원소의 집합은

$$\{(6,8)\}$$

이고, 이것은 곧 두 해집합의 교집합이다.

이와 같이, 두 개의 이원일차방정식을 한 쌍으로 한 것을 이원일차연립방정식이라고 하고, 이것을 보통 다음과 같이 나타낸다.

$$x+y=14 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$20x+10y=200 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

그리고, 두 방정식을 동시에 만족하는 변수의 값의 쌍을 그 이원일차 방정식의 해라고 하고, 이들 해의 집합을 해집합이라고 한다. 또, 그 해집합을 구하는 것을 이원일차 방정식을 푼다고 한다.

이를 테면, 앞의 이원일차연립방정식 (1), (2)의 해는 $x=6, y=8$이고, 해집합은 $\{(6,8)\}$과 같이 순서쌍 $(6,8)$의 집합으로 나타낸다.

4차, 5차 교육과정에서도 미지수가 2개인 일차방정식의 뜻과 그 해의 뜻은 대동소이하다.

예를 들면 4차 교육과정의 한국교육개발원의 중학교 수학2 [12]에서는 x, y의 변역이 자연수 전체 집합으로 정한 뒤, 주어진 방정식 $3x+y-15=0$에 $x=1,2,3,4,5,6,7,\ldots$을 차례로 대입하여 y의 값을 구하면 다음 표와 같이 구한다.

x	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
y	12	9	6	3	0	-3	-6	$\cdots$

이 때, y의 변역이 자연수 전체 집합이므로, y의 값이 자연수가 아닌 것을 버려야 한다. 따라서, 구하는 x, y의 값의 순서쌍 (x, y) 는 다음과 같다.

$$(1,12),\ (2,9),\ (3,6),\ (4,3)$$

이와 같이, x, y에 관한 이원일차방정식을 만족하는 x, y의 값, 또는 그의 순서쌍 (x, y)를 이 이원일차방정식의 해라고 하고, 이 해의 집합을 그 이원일차방정식의 해집합이라고 한다.

또, 해집합을 구하는 것을 방정식을 푼다고 한다.

이를테면, 이원일차방정식 $3x+y-15=0$ (x, y는자연수)의 해집합 $\{(x, y) \mid 3x+y-15=0,\ x, y$는자연수$\}$은 $\{(1, 12), (2, 9), (3, 6), (4, 3)\}$이다.

x, y의 변역이 자연수 전체의 집합인 다음 이원일차연립방정식을 풀어라.

$$x+y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$3x+y=11 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

<풀이> x, y의 변역이 자연수 전체 집합이므로, 방정식 $x+y=5$의 해집합을 순서쌍(x, y)의 집합으로 나타내면,

$$(1, 12), (2, 9), (3, 6), (4, 3)$$

이고, 방정식 $3x+y=11$의 해집합을 순서쌍 (x, y)의 집합으로 나타내면,

$$\{(1, 12), (2, 9), (3, 6), (4, 3)\}$$

이다. 따라서, 두 방정식의 해집합의 교집합이$\{(3, 2)\}$이므로, 이 연립방정식의 해집합은

$$\{(3, 2)\}$$

이다.

5차 교육과정 기우항 외3의 중학교 수학 2 [2]에서는 일반적으로

$ax+by+c=0$

(a, b, c 는 상수, $a\neq 0, b\neq 0$)인 꼴의 방정식을 미지수가 2개인 일차방정식 또는 x, y에 관한 일차방정식이라고 한다.

x, y가 자연수일 때, 방정식 $x+y=7 \cdots (1)$을 풀어 보자.

x의 변역이 자연수 전체의 집합이므로, 식(1)에 $x=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하여 y의 값을 구하면 다음 표와 같다.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
y	6	5	4	3	2	1	0	-1	$\cdots$

그런데 y의 변역도 자연수 전체 집합이므로, y의 값이 자연수가 아닌 것은 버려야 한다. 따라서 구하는 x, y의 순서쌍(x, y)는

$$(1, 6),\ (2, 5),\ (3, 4),\ (4, 3),\ (5, 2),\ (6, 1)$$

이다.

이와 같이 x, y에 관한 일차방정식을 만족하는 x, y의 값, 또는 그 순서쌍 (x, y)를 이 방정식의 해라 하고, 이들 해의 집합을 해집합이라고 말한다. 또, 그 해를 구하는 것을 일차방정식을 푼다고 한다.

$$x+y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$y=2x+1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

위의 식 (1), (2)를 모두 만족시키는 x, y의 값을 구하여 보자.

구하고자하는 x, y의 값은 두 일차방정식을 동시에 만족시키는 자연수이므로, 다음과 같은 표를 만들 수 있다.

표(1)

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1

표(2)

x	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	3	5	7	9	11	13	$\cdots$

방정식 (1)의 해집합을 A, (2)의 해집합을 B로 나타내면,

$$A = \{ (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \}$$
$$B = \{ (1,3), (2,5), (3,7), (4,9), (5,11), (6,13) \cdots \}$$

이다.

앞의 표(1),(2)에서 x, y 각각의 값이 모두 일치하는 것은 $x=2, y=5$일 때이다.

한편, $A \cap B = \{(2, 5)\}$이고, 이것은 두 방정식 (1),(2)를 동시에 만족시키는 x, y의 값의 순서쌍의 집합이다.

이와 같이 2개의 미지수 x, y에 관한 일차방정식을 한 쌍으로 한 것을 미지수가 2개인 연립방정식, 또는 간단히 연립방정식이라고 한다.

그리고 위의 두 방정식을 동시에 만족시키는 미지수 x, y의 값의 쌍을 그 연립방정식의 해라고 하고, 이들 해의 집합을 해집합이라고 한다. 또, 연립방정식의 해를 구하는 것을 연립방정식을 푼다고 한다.

이를테면 위의 연립방정식의 해는 $x=2, y=5$이고, $(2,5)$와 같이 순서쌍 (x, y)로 나타내기도 한다.

3차~5차 교육과정에서는 연립방정식의 해 x, y를 표를 이용하여 나타내어 표현의 차이만 있을 뿐 2차 교육과정과 같이 이원일차방정식의 해를

해집합이라는 용어를 사용하여 정의하고 문제에 맞는 간단한 하나의 자연수해를 구하였을 뿐 여전히 일반화한 해에 대한 언급이 없어 학생들이 일반해에 대한 개념을 명확하게 확립하지 못하였다.

(3) 6차 교육과정

6차 교육과정의 김호우 외3의 중학교 수학2 [5]에서는 미지수가 2개인 일차방정식의 뜻과 그 해의 뜻에 대하여 다음과 같이 설명하고 있다.

[예] $4x+2y=16$ 은 미지수가 2개인 일차방정식이다.

이 때 $4x+2y=16$ 에서 $x=0$ 이면 $4\times0+2y=16$ 이므로 $y=8$ 이 된다.

이와 같은 방법으로 x에 $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 를 차례로 대입하여 y의 값을 구하면 다음과 같은 표를 얻는다.

x	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	8	6	4	2	0	-2	$\cdots$

이 때 $x=0, y=8$ 또는 순서쌍 $(0, 8)$을 일차방정식 $4x+2y=16$ 의 해 또는 근이라고 한다.

[예] 토끼와 닭이 모두 합하여 6 마리가 있다. 다리의 수의 합이 16 마리일 때, 토끼와 닭은 각각 몇 마리 있는지 알아보자.

위에서 토끼가 x 마리, 닭이 y 마리 있다고 하면 연립방정식

$$x+y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$4x+2y=16 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

이 만들어진다.

이 때 토끼와 닭의 수를 알려면 위의 두 일차방정식(1), (2)를 동시에 만족하는 x, y의 값을 찾아야 한다.

먼저 일차방정식 (1), (2)의 해를 각각 구하여 보면 x, y의 범위가 자연수이므로 다음 표와 같다.

표(1)

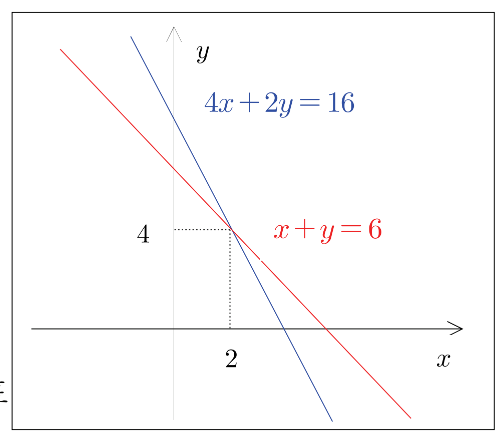
x	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1

표(2)

x	1	2	3
y	6	4	2

위의 표에서 (1),(2)에 공통으로 들어 있는 (2,4)임을 알 수 있다. 즉, 순서쌍 (2,4)는 두 일차방정식(1)과 (2)를 동시에 만족시키는 값임을 알 수 있다.

따라서 토끼는 2마리, 닭은 4마리이다.



한편, x, y의 범위가 수 전체일 때, (1), (2) 의 해를 좌표평면위에 모두 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이 때 일차방정식 (1), (2)를 동시에 만족하는 순서쌍 (2, 4)는 두 직선의 교점의 좌표와 같음을 알 수 있다.

이와 같이 두 방정식을 동시에 만족시키는x, y의 값 또는 그 순서쌍을 연립방정식의 해 또는 근이라고 하고, 또 해를 구하는 것을 연립방정식을

푼다고 한다.

6차 교육과정은 3~5차 교육과정에서 드러난 과도한 학습내용과 지나치게 엄밀화하여 수학이 너무 어렵고 딱딱해 진 것에 대한 반성으로 학습내용을 줄이고 직관을 강조하여 작성되었다. 2~5차 교육과정에서 미지수가 2개인 일차방정식의 해의 뜻에 대한 설명에 있어서 '일차방정식을 푼다.'는 것을 '하나의 식을 만족하는 해집합을 구한다.'는 것으로, '미지수가 2개인 일차방정식을 푼다.'는 것은 '두 식을 만족하는 공통의 해집합을 구한다.'는 것으로 나타내면서 논리적인 문제는 없었던데 비하여 6차 교육과정 이후부터는 일차방정식의 해의 뜻에 대한 설명에서 '해집합'이란 용어를 사용하지 않음으로 인하여 정수를 대입하여 일차방정식의 하나의 특수해만 순서쌍으로 보여주고 이 순서쌍을 '해'로 설명하고 이를 '해를 구한다.'고 설명한 뒤 일반화가 되지 않아 학생들은 예를 통해서만 알 뿐이다.

(4) 7차 이후 교육과정

7차 교육과정의 강옥기 외2의 중학교 수학2 [1]에서는 이원일차방정식의 해에 대하여 다음과 같은 예문을 통하여 설명하고 있다.

[예] 오른쪽 그림과 같이 가로, 세로의 간격이 1로 일정한 25개의 점이 있다. 이 25개의 점 중 일부를 이어서 다각형을 만들고, 그 경계에 있는 점의 수를 x, 그 내부에 있는 점의 수를 y라고 할 때, 다각형의 넓이가 2가 되도록 다각형을 만든다면, 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$2=\frac{1}{2}x+y-1$$

이 식의 양변에 2를 곱하면

$$4=x+2y-2$$

$$x+2y=6 \,.........\, (1)$$

이 된다.

일반적으로, 두 개의 미지수 x, y의 2개에 관한 일차방정식은 $ax+by+c=0$(a,b,c는상수,$a \neq 0, b \neq 0$)과 같이 나타내어진다.

이제, 미지수가 2개인 일차방정식 $x+2y=6 \,.........\, (1)$을 만족하는 x, y의 값을 구하여 보자.

다각형이 되려면 경계에 있는 점의 개수인 x의 값이 3이상인 정수이어야 하므로, (1)을 변형한 식 $y=3-\frac{1}{2}x$ 의 x에 $x=3, 4, 5, \cdots$를 차례로 대입하여 그 내부에 있는 점의 개수인 y의 값을 구하면 다음 표와 같다.

x	3	4	5	6	7	$\cdots$
y	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$

그런데 x의 값은 음이 아닌 정수이므로, y의 값이 음수이거나 정수가 아닌 것은 제외되어야 한다.

따라서, (1)을 만족하는 x와 y의 값을 순서쌍 (x, y)로 나타내면

$$(x, y) = (4, 1), (6, 0)$$

이다.

이와 같이, 미지수가2개인 일차방정식을 만족하는 x, y의 값 또는 그 순서쌍(x,y)를 이 방정식의 해라고 하며, 방정식의 해를 구하는 것을 방정식을 푼다고 한다.

중학생인 희영이는 이번에 일반인에게 개방된 백두산 호랑이 새끼를 보

기 위하여 서울 대공원의 동물원에 가려고 한다. 입장료가 오른쪽과 같다고 할 때, 입장료가 어른 1500원, 청소년은 1000원 하는 어떤 박물관에 어른과 청소년을 합하여 6명이 입장을 하는데, 모두 7000원이 들었다고 할 때, 어른의 수와 청소년의 수를 구하여 보자.

어른의 수를 x명, 청소년의 수를 y명이라고 하면 어른과 청소년의 수의 합은 6명이므로

$$x+y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

이다. 또 입장료가 전체 7000원이 들었으므로

$$1500x+1000y=7000$$

이다. 이 식의 양변을 500으로 나누어 정리하면

$$3x+2y=14 \cdots\cdots\cdots (2)$$

가 된다.

따라서, 어른과 청소년의 수 x, y 는 (1), (2)로 주어진 2개의 일차방정식을 동시에 만족하여야 한다.

일차방정식 (1)과 (2)의 해를 각각 구하면 다음 표와 같다.

방정식 (1)의 해

x	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1

방정식 (2)의 해

x	2	4
y	4	1

위 표에서 (1)과 (2)에 공통으로 들어 있는 해는 순서쌍

$$(2,4)$$

이다. 따라서, 어른 2명, 청소년 4명이 입장하였다는 것을 알 수 있다.

일반적으로, 미지수가 2개인 일차방정식 두 개를 한 쌍으로 묶어 놓은 것을 미지수가 2개인 연립방정식 또는 간단히 연립방정식이라고 한다.

위와 같이 두 연립방정식을 동시에 만족하는 x, y의 값 또는 그 순서쌍을 연립방정식의 해라고 하고, 해를 구하는 것을 연립방정식을 푼다고 한다.

이를테면, 위의 연립방정식의 해는

$$x=2,\ y=4 \text{ 또는 } (2,\ 4)$$

이다.

7차 이후의 교육과정은 단계형 수준별 교육과정으로 교과 내용이 수준별로 바뀌면서 어려운 내용은 상위로 옮겨지게 되어 교과서가 상당히 쉬워지면서 엄밀성이 떨어졌다. 미지수가 2개인 일차방정식의 뜻과 그 해의 의미를 두 미지수 x, y의 관계가 $ax+by+c=0$ (a, b, c는 상수, $a \neq 0, b \neq 0$)으로 나타나는 구체적인 예를 통하여 이해하게 하였는데, 미지수가 2개인 일차방정식에 대한 이해를 바탕으로 미지수가 2개인 연립일차방정식의 뜻과 그 해의 의미를 이해하게 하였다. 해의 범위에 있어서는 미지수 x, y의 값의 범위가 자연수 집합으로 주어져 있는 경

우만 다루게 하면서 논리적인 엄밀성이 떨어졌다.

이 장에서는 2차, 3~5차, 6차, 7차 이후의 각 수학 교육과정에서 이원일차방정식과 이원일차연립방정식의 정의와 이들의 해의 정의에 대해서 알아보았다. 교육과정을 크게 두 가지로 분류해서 파악해 볼 수 있었는데 2차~5차 교육과정에서는 미지수가 2개인 일차방정식의 해를 구하는 것은 하나의 일차방정식의 '해집합'을 구하는 것이었고, 이원일차연립방정식의 해를 구하는 것은 두 개의 일차방정식의 공통의 해집합을 구하는 것을 의미했다. 6차이후의 교육과정에서는 '해집합'의 용어를 사용하지 않기 때문에 이원일차방정식의 해를 구하는 것으로 방정식을 만족하는 하나의 정수해 순서쌍 (x, y)을 구하는 것, 이원일차연립방정식의 해를 구하는 것은 두 방정식의 공통의 정수해 순서쌍을 구하는 것으로 설명하였는데 이는 '해를 구하는 것'에 대한 일반화가 되지 않아 학생들이 논리적으로 이해하는 데 어려움을 겪을 수 있는 문제가 있다.

3. 일차함수와 직선의 방정식

1) 일차함수의 그래프와 일차방정식의 해

두 변수 x, y에 대하여 x 의 값이 결정되면 이에 따라 y의 값이 하나로 결정될 때 y 를 x의 함수라고 한다. 함수 $y=f(x)$ 에서 x가 변하는 범위의 집합을 정의역, 함수 $y=f(x)$에서 함수값의 집합을 치역, 치역을 포함하는 적당한 수들의 집합을 공역이라고 한다.

수 집합 X, Y를 각각 정의역과 공역으로 하는 함수 y가 x에 관한 일차식 $y=f(x)$ $(a\neq 0, a, b$는상수$)$로 나타내어질 때, 이 함수를 일차함수라고 한다. 이때 정의역, 공역에 대한 특별한 말이 없으면, 정의역, 공역을 수

전체 집합으로 본다.

일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 정의역과 공역이 수 전체 집합일 때, $y=ax+b$의 그래프 위의 두 점을 찾아 직선으로 잇거나, 일차함수 $y=ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행 이동하여 그릴 수 있다. 또는 x절편과 y절편을 이용하여 그래프를 그릴 때는 x절편과 y절편을 각각 좌표평면 위에 나타내고, 이 두 점을 직선으로 이어주면 된다. 기울기와 y절편을 이용해서 일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 그릴 수도 있는데 y절편인 b를 좌표평면 위에 나타내고, 그 점을 지나는 기울기가 a인 직선을 그린다. 이처럼 일차함수 $y=ax+b$를 보고 그래프를 그릴 수 있을 뿐만 아니라 직선을 그래프로 하는 일차함수 식을 구할 수 도 있다.

일차방정식 $ax+by+c=0$ $(a \neq 0, b \neq 0)$의 그래프는 이 방정식을 y 에 관하여 풀어 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프를 그린 것과 같다.

그래프 중에 좌표축에 평행한 직선이 있는데 $x=p$의 그래프는 $(p, 0)$점을 지나고, y축에 평행한 직선이다. $y=q$의 그래프는 점 $(0, q)$를 지나고, x축에 평행한 직선이다.

연립방정식을 이루는 두 방정식의 그래프를 그렸을 때, 두 그래프의 교점의 좌표가 주어진 연립방정식의 해가 된다. 연립방정식의 해와 그래프에 대해서 정리해 보면 다음과 같다.

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ 은 계수의 관계에 의하여 다음의 3가지 경우로 나누어진다.

첫째, $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$일 때, 두 직선은 한 점에서 만나므로 해는 1개뿐이다.

둘째, $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ 일 때, 두 직선은 일치하므로 해는 무수히 많다.

셋째, $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ 일 때, 두 직선은 평행하므로 해는 없다.

2) 직선의 방정식 용어 도입의 필요성

일차방정식을 직선의 방정식이라고 하는데 직선의 방정식의 그래프는 일차방정식의 해를 두 개 구하여 그 두 점을 직선으로 이으면 된다. 특별한 조건이 없는 한, 직선의 방정식의 그래프에서 미지수의 범위는 수 전체 집합으로 한다.

- 1차~7차 개정 각 교육과정에서의 '직선의 방정식' 용어 사용 비교

우리나라의 교육과정에서 직선의 방정식이란 용어가 언제부터 어떻게 사용되어 왔는지 교과서를 근거로 살펴보고자 한다.

교육과정	직선의 방정식 용어
1차 ~ 2차	없음
3차	이원 일차방정식 $ax+by+c=0$
4차	이원 일차방정식 $ax+by+c=0$
5차	일차방정식 $ax+by=c$
6차	방정식 $2x+y=7$
7차	일차방정식 $ax+by+c=0$
7차 개정	일차방정식 $ax+by+c=0$

1차, 2차 교육과정에서는 '직선의 방정식'이란 용어를 사용하지 않았다. 이와 같이 직선의 방정식이란 용어를 사용하지 않는 경우 연립방정식과 그래프 사이의 관계를 학습할 때 방정식 $ax+by+c=0$을 일차함수 $y=ax+b$의 형태로 고쳐서 다루어야 하므로 번거로울 뿐만 아니라 학생들이 이해할 때 커다란 장애가 된다. 또 $x=a, y=b$와 같이 일차함수 $y=ax+b$ 로 표시될 수 없는 직선은 다룰 수 없는 문제점이 있다. 그러나

학문중심교육과정으로 더 엄밀해진 3차 교육과정부터는 직선의 방정식을 용어로 도입하여 이러한 문제를 해결하였다.

예를 들어 2차 교육과정에서 박정기의 중학교 수학2[7]의 주석에서 '일차함수 $y=ax+b$ 의 그래프를 직선 $y=ax+b$ 라고도 한다.' 로 표현하고 있는데 이는 교육과정에서 직선의 방정식이란 용어를 사용하지 않기 때문에 주석으로 처리한 것으로 보인다. 이 주석을 이용하여

'직선 $y=\dfrac{1}{4}x+2$를 y축의 양의 방향으로 2.5만큼 평행 이동한 직선의 식을 구하여라. 또, y축의 음의 방향으로 2.5만큼 평행이동한 직선의 식을 구하여라.'

와 같이 '직선의 식'이라는 용어를 사용하였다. 이를 구할 때는 일차함수 $y=ax+b$ 의 형태로 고쳐 다루어야만 한다.

또한 $x=a, y=b$와 같이 일차함수 $y=ax+b$ 로 표시될 수 없는 직선에 대해서 $y=b$의 그래프는 x축에 평행인 직선이고, y축과 점$(0,b)$에서 만난다. 그리고 $x=a$ 의 그래프는 y축에 평행인 직선이고, x축과 점$(c,0)$에서 만난다고 따로 설명하고 있다.

이러한 번거로움을 피하기 위하여 3차 교육과정부터 직선의 방정식을 용어로 도입한 것으로 보인다.

이때부터 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 의 꼴로 정의하고, $b\neq 0$일 때, 이 식을 일차함수 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$의 형태로 바꾸어 직선의 방정식을 일차함수의 그래프와 동일한 것으로 다루었다.

이 장에서는 1차~7차 개정 교육과정 각 교육과정에서의 '직선의 방정식' 용어가 어떻게 사용되었는지 비교하여 보았는데 2차 교육과정 이전까지 '직선의 방정식'이라는 용어가 사용되지 않아서 일차방정식과 일차함수사

이의 관계를 파악하는데 학생들이 일차방정식과 일차함수에 대한 이해에 어려움을 겪음에 따라 3차 교육과정 이 후부터는 이원일차방정식의 그래프로 나타나는 직선에 대한 방정식을 ‘직선의 방정식’으로 정의했음을 알아보았다.

2) 교육과정별 직선의 방정시과 일차함수의 관계

“직선의 방정식”과 “일차함수”의 관계를 교육과정 별로 살펴보면 다음과 같다.

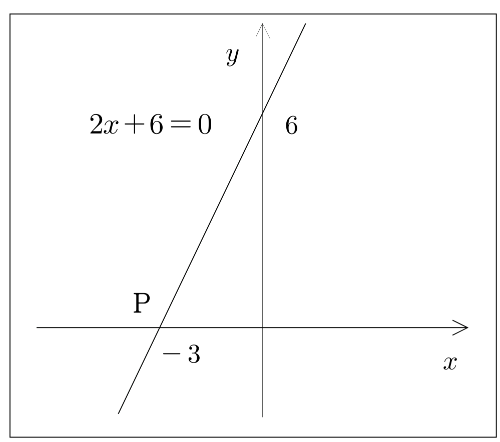
(1) 2차 교육과정

2차 교육과정에 박정기 외2의 중학교 수학2 [7]에서는 앞에서 언급했듯이 ‘직선의 방정식’이라는 용어가 사용되지 않았다.

일차함수에 대해서는 $y=25x$, $y=0.5x+10$ 과 같이 y가 x의 일차식으로 나타나 있을 때, y를 x의 일차함수라 한다.

방정식과 그래프에서는 일차방정식 $2x+6=0\cdots(1)$의 근을 그래프에 의하여 구할 때 일차함수 $y=2x+6\cdots(2)$의 그래프를 그려서 x축과의 교점을 P 라 하면, P점의 y 좌표는 0이므로 P점의 x좌표는 식(1)을 만족한다.

따라서 일차함수 식(2)의 그래프와 x축과 만나는 점의 좌표인 -3은 일차방정식 (1)의 근이다.



일반적으로 다음과 같이 말할 수 있다.

일차함수 $y=ax+b$ 의 그래프와 x축과 만나는 점의 x 좌표는 일차방정식 $ax+b=0$ 의 근이다.

일차방정식 $-2x+6=2\cdots(1)$ 의 근을 그래프에 의하여 구하는 문제에서는 2개의 일차함수 $y=-2x+6\cdots(2)$ 과 $y=2\cdots(3)$의 그래프를 그려서 그 만나는 점 P의 좌표를 읽으면 일차방정식(1) 의 해가 된다.

일반적으로 다음과 같이 말할 수 있다.

일차방정식 $ax+b=c$를 그래프로 풀자면 $y=ax+b$의 그래프와 $y=c$ 의 그래프의 교점의 x 좌표를 읽으면 된다.

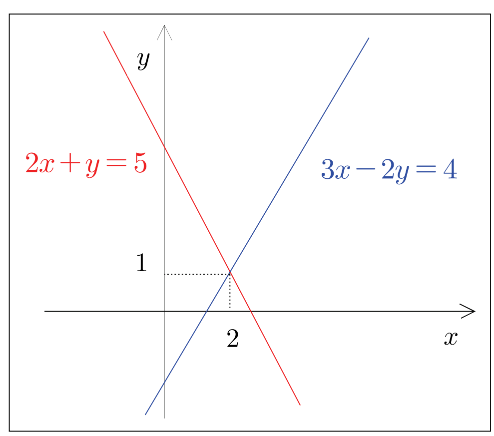
연립방정식

$$2x+y=5\cdots(1)$$

$$3x-2y=4\cdots(2)$$

를 그래프에 의하여 풀자면 먼저 (1)의 그래프를 그리고, (2)의 그래프를 그린다.

(1),(2)의 직선이 만나는 점 P 의 좌표 $x=2,\ y=1$은 이 연립방정식의 근이다.



일반적으로 다음과 같이 말할 수 있다.

연립방정식	$ax+by=c$ ························	(1)
	$a'x+b'y=c'$ ······················	(2)
의 근은 방정식 (1),(2)의 그래프의 교점이다.		

위의 방법에서 $2x+y=5$, $3x-2y=4$의 그래프는 $y=-2x+5$, $y=\frac{3}{2}x-4$와 같이 $y=f(x)$의 형태로 바꾸어 그려야 한다. 또 $x=3$과 같이 $y=f(x)$의 형태로 바꿀 수 없는 경우는 따로 처리해야 한다.

(2) 3차, 4차 교육과정

3차, 4차 교육과정에서는 일차 함수와 그 그래프 단원이 먼저 나오고 이후에 직선의 방정식 단원이 나오게 되는데 이와 같이 함수의 그래프를 직선의 방정식단원 보다 먼저 가르치는 것은 직선을 함수의 그래프로 바꾸어 그리는 것이다. 이는 $x=a, y=b$와 같은 경우는 따로 설명을 해야 하는 번거로움이 있다.

예를 들어 4차 교육과정에 한국교육개발원의 중학교 수학2 [12]에서 일차함수와 직선의 방정식에 대해 다음과 같이 설명하고 있다.

먼저 일차함수에 대하여 일반적으로, 실수 전체의 집합 R 를 정의구역과 공변역으로 가지는 함수 $f: R \to R$, $y=f(x)$에서, y가 x에 관한 일차식

$$y=ax+b\ (a \neq 0, a, b\text{는 상수})$$

로 나타내어질 때, 함수 f를 일차함수라고 한다.

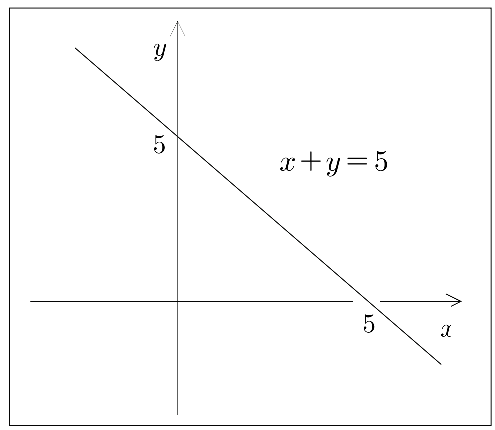
그 후에 직선의 방정식에 대해서는 일반적으로, 실수전체 집합을 변역

으로 하는 이원일차방정식 $ax+by+c=0$의 해는 무수히 많고, 그 해집합을 좌표평면 위에 나타내면 직선이 된다.

즉, 이 직선 위의 모든 점의 좌표는 이원일차방정식 $ax+by+c=0$의 해이다.

이 직선을 방정식 $ax+by+c=0$의 그래프라고 하고, 방정식 $ax+by+c=0$을 이 직선의 방정식이라고 한다.

이를테면 오른쪽의 그래프는 이원일차방정식 $x+y=5$ 의 그래프이고, 이 직선의 방정식은 $x+y=5$이다.



이원일차방정식 $x+y=5$에서 y를 x에 대하여 풀면,

$$y=-x+5$$

가 되고, 이것은 x의 한 값에 y의 한 값이 대응하는 일차함수를 나타낸다.

그런데, 이 일차함수의 그래프는 이원일차방정식 $x+y=5$의 그래프와 같다.

따라서 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

이원일차방정식 $ax+by+c=0$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$의 그래프는 일차함수 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$, $(a\neq 0, b\neq 0)$의 그래프와 같은 직선이다.

이에 대한 예로 이원일차방정식 $x+2y-2=0$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

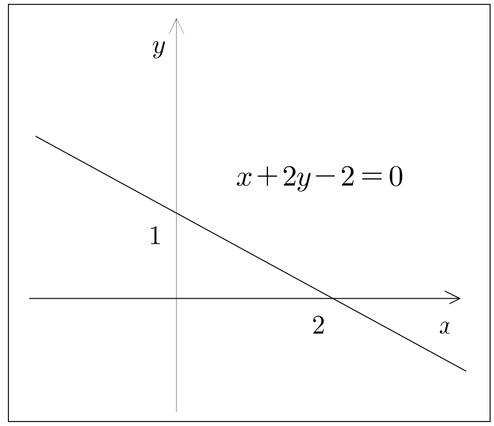
$x+2y-2=0$에서 y를 x에 대하여

풀면 $y=-\frac{1}{2}x+1$이다.

이것은 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고, y절편이

1인 일차함수와 같으므로, 그 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



그리고 $x=k, y=k$ 의 그래프를 다음과 같이 따로 설명하고 있다.

일반적으로, 방정식 $ax+by+c=0$ 에서

$$a=0\text{일 때, 이 방정식은 } y=-\frac{c}{b}$$

$$b=0\text{일 때, 이 방정식은 } x=-\frac{c}{a}$$

이므로, 상수 a, b중의 어느 하나가 0인 경우, 이 방정식은

$$y=k \text{ 또는 } x=k \ (k \text{ 는 상수})$$

와 같은 모양이 되고, 그 그래프는 다음과 같다.

[1] $y=k$의 그래프는 점$(0,k)$를 지나고 x축에 평행한 직선이다. [2] $x=k$의 그래프는 점$(k,0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이다. [3] 특히, $x=0$의 그래프는 y축이고, $y=0$의 그래프는 x축이다.

위에서 확인 해본 것과 같이 3차, 4차 교육과정에서는 먼저 일차함수의 정의와 성질들에 대하여 학습한다. 그 후에 이원일차방정식을 $ax+by+c=0$의 꼴로 정의하고, 이 이원일차방정식을 그래프로 나타내보면 직선의 형태가 되어서 이$ax+by+c=0$를 직선의 방정식이라고 한다.

그런데 이런 직선의 방정식을 y를 x에 대하여 풀면 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 형태로 바뀌게 되므로 직선의 방정식을 일차함수의 그래프와 동일한 것으로 다루었다. 그러나 이렇게 직선의 방정식 $ax+by+c=0$ 을 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$로 바꾸는 것은 직선의 방정식 $ax+by+c=0$에서 $b\neq 0$의 경우에만 가능하다. 즉, 일차함수는 직선의 방정식의 특수한 경우인 것이다.

(3) 5차~7차 개정 교육과정

5차~7차 개정 수학 교육과정 교과서에서는 5차 이전의 교육과정과 반대로 직선의 방정식 단원 이후에 일차함수가 나오고 있다. 직선의 방정식을 그래프로 그리는 것을 x, y 사이의 관계를 그림으로 나타낸 것이다.

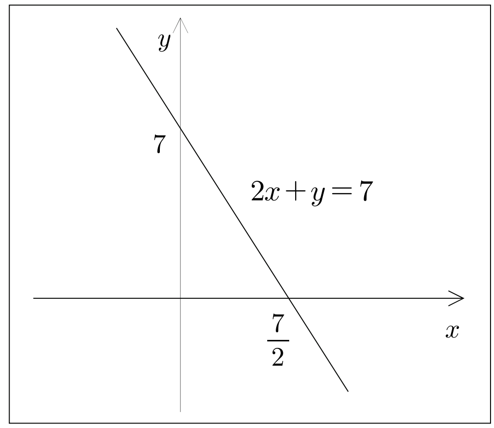
예를 들어 6차 교육과정인 김호우 외3의 중학교 수학2 [5]에서 직선의 방정식과 일차함수에 대해 다음과 같이 설명하고 있다.

미지수 x, y의 범위가 수 전체일 때, 방정식 $2x+y=7$의 해를 구하여 표로 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	-0.5	$\cdots$	0	$\cdots$	0.5	$\cdots$	1	$\cdots$
y	$\cdots$	9	$\cdots$	8	$\cdots$	7	$\cdots$	6	$\cdots$	5	$\cdots$

따라서 방정식$2x+y=7$의 해는 무수히 많음을 알 수 있다.

또 이들 해를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같은 직선이 된다. 이 때 방정식 $2x+y=7$을 직선의 방정식이라고 한다.



또 일차함수에 대하여 다음과 같이 설명하고 있다.

일반적으로 수의 집합 X, Y 를 각각 정의역과 공역으로 하는 함수 $f: X \to Y,\ y=f(x)$에서 y가 x에 관한 일차식

$$y=ax+b\ (a\neq 0,\ a, b, \text{는 수})$$

로 나타내어질 때, 이 함수 f 를 일차함수라고 한다.

또 정의역과 공역이 수 전체의 집합일 때에는 간단히 일차함수 $y=ax+b$ 라고 한다.

일차함수$y=ax+b$ 의 그래프에 대해서는 다음과 같은 예문을 통해 설명하고 있다.

일차함수에서 $y=2x+3$에서 x의 여러 가지 값에 대응하는 y의 값을 찾아 표로 나타낸 것이다.

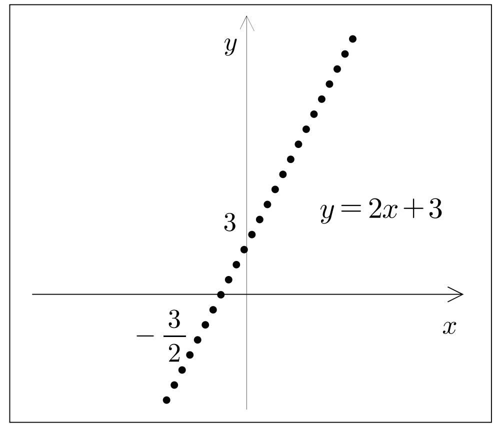
x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	$\cdots$

위의 표에서 x의 값과 y의 값으로 이루어진 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하

는 점을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

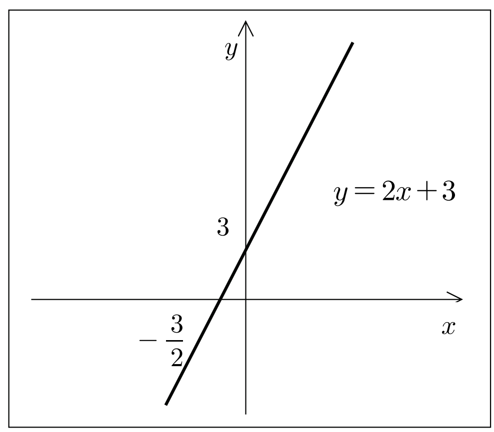
이것이

$X=\{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$



을 정의역으로 하는 일차함수 $y=2x+3$의 그래프이다.

앞에서 일차함수 $y=2x+3$의 정의역의 원소를 점점 많게 하여, x의 값과 y의 값으로 이루어진 순서쌍(x, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 결국 오른쪽 그림과 같은 직선이 됨을 알 수 있다.



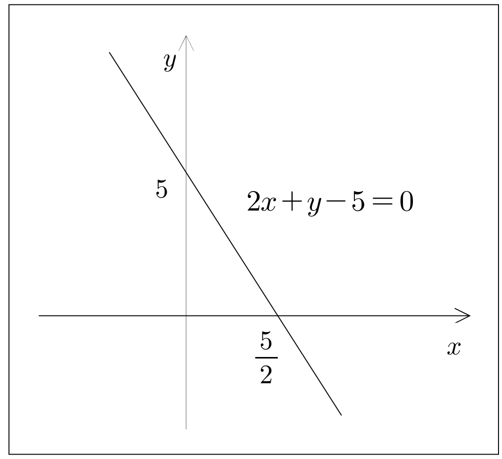
이 직선이 수 전체 집합을 정의역으로 하는 일차함수 $y=2x+3$의 그래프이다.

일차함수의 그래프를 이용하여 일차방정식의 해를 구하는 방법에 대하여 다음과 같이 설명하고 있다.

미지수 x, y 의 범위가 수 전체일 때, 일차방정식 $2x+y-5=0$의 해를 좌표평면 위에 나타내어 보자.

앞에서 일차방정식 $2x+y-5=0$ 의 해는

무수히 많고, 이들 해를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같은 직선이 됨을 배웠다.



그런데 이 직선에서 x가 1만큼 증가하면 y는 2만큼 감소한다.

또 이 직선이 y축과 만나는 점의 y좌표는 5이다.

따라서 이 직선은 기울기가 -2, y절편이 5인 일차함수 $y=-2x+5$의 그래프이다.

즉, 일차방정식 $2x+y-5=0$ 의 해를 나타내는 직선과 일차함수 $y=-2x+5$의 그래프는 서로 같음을 알 수 있다.

실제로 $2x+y-5=0$을 y에 관하여 풀면 $y=-2x+5$가 된다. 일반적으로 일차방정식의 해를 나타내는 직선과 일차함수의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

- 일차방정식과 일차함수

미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0(a\neq 0, b\neq 0)$의 해를 나타내는 직선은 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프와 같다.

5차 이후의 교육과정부터는 일차방정식 $ax+by+c=0(a\neq 0, b\neq 0)$의 해를 나타내는 직선이 일차함수 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 그래프와 같다는 것을 설명한 뒤 일차방정식 $ax+by+c=0$에서 $a=0, b\neq 0$일 때, 이 방정식은 $y=\frac{c}{b}$

이고, $a \neq 0, b=0$일 때, 이 방정식은 $x=\frac{c}{a}$이므로, 상수 a, b 중에서 어느 하나가 0인 경우, 이 방정식은 $x=k$ 또는 $y=h$ (k, h는 상수)와 같아짐을 설명하면서 5차 이전의 교육과정에서 직선을 일차함수로 바꾸어 그릴 때 $x=k$ 또는 $y=h$를 따로 설명했던 번거로움을 없앴다.

이 장에서는 우리나라의 수학교육과정을 2차, 3~4차, 5차 이후 교육과정으로 구분하고 각 교육과정의 중학교 2학년 수학 교과서에서 '직선의 방정식'과 '일차함수'의 선후관계를 파악해보고 선후 관계에 따라 이 두 개념이 어떻게 다르게 다루어졌는지 알아보았다. 요약해보자면 '직선의 방정식'이라는 개념이 나오기 전인 2차 교육과정은 제외하고 3~4차 교육과정에서는 일차함수를 학습한 뒤 직선의 방정식이 나와서 직선을 함수의 그래프로 바꾸어 그렸다. 그러나 이와 같이 직선의 방정식을 함수로 바꾸는 과정에 있어서 학생들이 학습하기에 논리적 엄밀성이 부족했을 뿐 아니라 번거로움이 있었다. 5차 이후 교육과정에서는 '직선의 방정식'에 대한 학습이 선행되고 난 뒤 '일차함수'를 학습하면서 직선의 방정식을 그래프로 나타낼 때 '일차함수'로 변형하여 그리는 것이 아니라 변수 x, y의 값의 변역을 자연수 해에서 실수 전체로 확장시켜서 x, y 사이의 관계가 직선으로 나타남으로 설명하였다. 또한 $x=a, y=b$를 따로 설명하지 않아 번거로움이 없어졌다.

Ⅲ. 결 론

우리나라는 광복 이후 모두 7차례에 걸쳐 교육과정의 개정이 있었고, 수학교육과정도 예외는 아니었다. 2007년에 교육인적자원부는 제 7차 교육과정에 대한 개정안을 발표한 바 있다. 개정교육과정이 발표될 때 마다 중학교 함수의 교육내용은 약간씩 변화가 있었으며, 특히 일차함수의 그래프와 일차방정식의 관계를 다루는 내용의 경우 교육과정 상의 교육내용과 편성 순서가 달라지는 일이 종종 있었다.

중학교 1, 2학년에게 함수의 개념을 정확하게 전달하는 것은 매우 어려운 일임에 틀림이 없다. 교육과정을 개편할 때 마다 교육내용과 편성 순서가 차이가 있었던 것은 그 때 그 때 이러한 어려움을 반영한 것으로 보인다.

본 논문은 우리나라의 교육과정 변천에 따르는 일차방정식과 일차함수의 그래프사이의 관계에 관하여 관심을 가지고, 교육과정별 교과서 내용을 중심으로 논리적 연관관계를 지도함에 있어서의 어려움을 알아보고 향후 일차방정식과 일차함수의 그래프 사이의 관계지도에 도움이 되고자 하였다.

우리나라의 수학교육과정은 중학교 1학년 과정에서 처음으로 일차방정식 $ax+b=0$ 과 그 해의 의미를 이해하여 해를 구한다. 그리고 일차함수 $y=ax+b$ 의 개념을 알고, 일차함수를 표, 식, 그래프로 나타낼 수 있게 한다.

이 후에 중학교 2학년 과정에서 미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$ (단, $a\neq 0, b\neq 0$) 과 일차함수 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ 의 관계를 학습하게 되는데, 그 논리적 연관관계를 명확하게 교육하는 것은 중학교 2학

년의 학습수준에서는 무리가 있어 보인다.

이러한 이유로 교육과정이 바뀔 때마다 이원일차방정식과 일차함수의 그래프사이의 관계에 대한 내용이 조금씩 차이가 있어온 것이 사실이다.

이원일차방정식에 있어서 2차~5차 교육과정에서는 이원일차방정식의 해의 뜻을 방정식을 만족하는 순서쌍들의 집합으로 보았고, 해를 구하는 것은 식을 만족하는 해집합을 구하는 것으로 나타내어 논리적 이해에 있어서 문제없었으나, 6차 이후의 교육과정에서는 '해집합'이란 용어를 사용하지 못하게 되어 해의 범위를 정수로 제약하여 간단한 특수해만 보이고 일반해에 대한 설명이 없어 논리적 비약이 될 수 있으며, 고등학교 과정에서의 연립방정식에 대한 개념 이해가 애매해 질 수 있다.

7차이후의 교육과정에서는 이러한 문제들을 많이 보완하였지만 여전히 이원일차방정식과 일차함수의 관계에 대한 명확한 설명은 이루어지지 못하고 있다.

일차함수와 직선의 방정식에 있어서는 1차, 2차 교육과정에서 '직선의 방정식'이란 용어를 사용하지 않아 연립방정식과 그래프 상이의 관계를 학습할 때 이원일차방정식을 일차함수의 형태로 고쳐서 다루어 번거롭고, 학생들이 이해에 어려움이 있었다. 또한 $x=a, y=b$ 와 같은 직선은 따로 설명해야만 했다. 그러나 3차 이후의 교육과정에서는 '직선의 방정식'이라는 용어가 도입되어 이러한 어려움이 없어졌다.

'직선의 방정식'이라는 용어가 사용된 이후인 3~4차 교육과정에서는 교과서에서 먼저 일차함수가 나오고 직선의 방정식이 나와서 직선을 함수의 그래프로 바꾸어 그리게 되어 학생들이 학습하기에 논리적 엄밀성이 떨어지고 번거로움이 있었다.

5차 이후의 교육과정에서 '직선의 방정식'이 선행되고 '일차함수'를 학습하게 되어 직선의 방정식을 그래프로 나타낼 때 변역이 자연수에서 실수로 확장된 변수 x, y 사이의 관계를 직선으로 나타내게 되어 이전과 같은

문제가 없어지게 되었다.

초기의 교육과정에서 나타난 이원일차방정식과 일차함수 사이의 논리적 관계에 관한 설명에 있어서 보여 졌던 논리적 문제점들이 교육과정이 계속해서 새롭게 개정되어 나아가면서 수정되어지고 있다.

그러나 현재에도 많은 학생들이 이원일차방정식과 일차함수 사이의 논리적 관계에 대하여 엄밀한 이해는 하지 못하고 있는 실정이다.

엄밀한 의미에서 함수는 두 집합의 원소 사이의 대응관계로 정의하는 것이 옳을 것이다. 그러나 학문의 성격상 이 개념을 정확하게 중학교 1, 2학년 학생들에게 가르치고, 또 이들이 이것을 정확하게 받아들이기를 요구하는 것은 무리가 있을 것이다. 또한 일차방정식의 풀이와 함수의 그래프와의 관계도 그 개념은 물론 그들 중 어느 것을 먼저 학습하고, 어느 것을 나중에 학습하느냐를 결정하는 것 조차도 대단히 어려울 수 있다.

이러한 문제를 해결하기 위해서는 일차함수, 일차방정식에 대한 이해를 최대한 도울 수 있는 교육내용의 개발이 필요할 것이다. 한편, 상위의 고등교육과정에서 배우게 될 고차방정식과 함수의 논리적으로 엄밀한 이해가 보다 쉽고 명확하게 이루어지기 위해서는 중학교 1,2학년이 익혀야하는 하위개념들부터 논리적 엄밀성을 잃지 않도록 해야 한다. 그러므로 교육내용의 쉬운 이해와 논리적 엄밀성이라는 두 마리 토끼를 잡아야 하는 어려움이 있을 것이 사실이다. 이후의 교육과정에서는 중학교 2학년 과정에 맞는 적절한 수준의 논리적 이해가 이루어지도록 교과서 편성에 대한 연구가 필요 할 것으로 보인다.

참 고 문 헌

[1] 강옥기 외, 중학교 수학2, 두산, 2002

[2] 기우항 외, 중학교 수학2, 교학사, 1990

[3] 김남희 외, 수학교육과정과 교재염구, 경문사, 2006

[4] 김정희 외, 그래핑 계산기를 활용한 수학개념 연계지도의 실제 - 연립 방정식과 일차함수 단원을 중심으로, 한국수학교육학회, 2000

[5] 김호우 외, 중학교 수학2, 지학사, 1997

[6] 교육과학기술부, 중학교 교육과정 해설, 교육과학기술부, 2007

[7] 박정기 외, 중학교 수학2, 교학사, 1967

[8] 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부, 2007

[9] 이상구 외, 식민지 수학교육 정책과 19세기 말과 20세기 전반 한국수학 교육과정 연구, 한국수학교육학회, 2009

[10] 이중권, 우리나라의 수학교육과정, 경문사, 2004

[11] 한국교육개발원, 중학교 수학2, 한국교육개발원, 1979

[12] 한국교육개발원. 중학교 수학2, 한국교육개발원, 1986

[13] 황혜정 외, 수학교육학신론, 문음사, 2005

ABSTRACT

The relationship between graph of linear equations and linear functions in the mathematics curricula

Chung Yu-Jin
Mathematics Education in Major
The Graduate School of Education
Sungshin Women's University
Supervised by Byung Gai Kang, Ph. D.

It may be no exaggeration to say that the education of algebra and analysis in middle school mathematics is that of equations and functions. It will be a very important issue in the first and second grade of middle school to establish correct concept of the relationship between graph of linear equations and linear functions, because it may be a touchstone to understand the relationship between graph of equations and functions in higher level.

In this paper, we investigate how we deal with the relationship between graph of linear equations and linear functions in our history of mathematics curricula.

The concept of equations and functions have been changed slightly

according to the changes of our curricula, from the period of syllabus after the liberation of Korea to the period of 1st ~ 7th curriculum. Those changes themselves also prove that this issue is very hard to handle.

Our aim of this paper is to analyze the change of the concepts of equations and functions in each curriculum via texts and provide alternative methods to deal with such issues.