

윤기헌教授指導

碩士學位 請求論文

곡면의 오일러 특성수의 표현
방법에 관한 연구

2012

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

김주영

곡면의 오일러 특성수의 표현 방법에 관한 연구

윤기헌教授指導

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

2012년 5월

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

김주영

認 准 書

김주영의 碩士學位 論文으로 認准함

審査委員 강 병 개 印

審査委員 심 성 아 印

審査委員 윤 기 현 印

2012년 5월

誠信女子大學校 教育大學院

논문개요

위상적 불변량 중 가장 단순한 형태인 오일러 특성수의 다양한 정의와 정리를 살펴 보고 이들의 연관성을 알아본다. 특히 닫힌연결곡면의 분류를 통해 구면, 유한개의 원환체의 연결합으로 주어지는 곡면, 유한개의 사영평면의 연결합으로 주어지는 곡면에 대해서 삼각화를 통한 오일러 특성수, 복체의 호몰로지군을 이용한 오일러 특성수, 포앙카레-호프 지표정리에 의한 오일러 특성수를 구체적으로 계산하고 이들이 서로 같음을 확인한다.

주요어: 오일러 특성수, 2차원 닫힌 곡면

목 차

I.	서론	1
II.	다양한 오일러 특성수의 정의 방법	2
2.1	삼각화를 통한 오일러 특성수	2
2.2	복체의 호몰로지군과 오일러 특성수	6
2.3	포앙카레-호프 지표 정리의 오일러 특성수	10
2.3.1	방향교차수	10
2.3.2	리프셔츠 고정점 이론	12
2.3.3	포앙카레-호프 정리	15
III.	달힌연결곡면에 대한 다양한 오일러 특성수의 계산	20
3.1	달힌곡면의 분류	20
3.2	삼각화를 통한 오일러 특성수의 계산	23
3.2.1	$S^2, T^2, \mathbb{R}P^2$ 의 오일러 특성수 계산	24
3.2.2	유한개의 원환체의 연결합으로 주어지는 곡면 의 오일러 특성수 계산	25
3.2.3	유한개의 사영평면의 연결합으로 주어지는 곡 면의 오일러 특성수 계산	25
3.3	복체의 호몰로지군을 이용한 오일러 특성수 계산	25
3.3.1	$X = S^2$ 에서의 오일러 특성수 계산	26
3.3.2	유한개의 원환체의 연결합으로 주어진 곡면의 오일러 특성수 계산	28

3.3.3	유한개의 사영평면의 연결합으로 주어진 곡면 의 오일러 특성수 계산	33
3.4	포앙카레-호프 지표정리에 의한 오일러 특성수 계산 . .	38
3.4.1	벡터장(vector field)의 지표(index)계산	38
3.4.2	벡터장을 이용한 포앙카레-호프 지표정리의 오 일러 특성수 계산	40
IV.	결론	43
	참고 문헌	44
	Abstract	45

제 1 장

서론

위상적 불변량 중 가장 단순한 형태인 오일러 특성수는 중등 수학 교육에서는 정다면체에서 정의하여 $V - E + F = 2$ 라는 사실을 알았지만 [4] 본 논문에서는 좀 더 확장시켜 오일러 특성수의 다양한 정의를 살펴 보고 이러한 정의들의 연관성을 같은 대상을 다른 방법으로 이해할 수 있도록 닫힌연결곡면에 대해서 구체적으로 계산하여 연관관계를 살펴보았다.

본 논문의 구성은 다음과 같다.

제 2 장에서는 X 의 오일러 특성수, $\chi(X)$ 를 정의하는 다양한 방법에 대하여 알아보고 관련된 성질들을 살펴보았다. 우리는 주어진 곡면의 삼각화를 통한 오일러 특성수의 정의, 호몰로지군과 베티수를 통한 오일러 특성수의 정의, 단체 복체의 각 차원 셀의 개수를 통한 오일러 특성수의 정의, 방향교차수를 통한 오일러 특성수의 정의, 그리고 러프셔츠 고정점 정리를 통한 오일러 특성수의 정의 등 다양한 형태의 오일러 특성수의 정의에 대하여 고찰하였다. 그리고 포앙카레-호프 지표정리에 대하여 살펴보았다.

제 3 장에서는 닫힌연결곡면을 분류하는 법에 대하여 고찰하고, 각각의 닫힌 연결곡면의 오일러 특성수를 2장에서 살펴본 오일러 특성수의 정의에 의거하여 구체적으로 계산하였다.

제 2 장

다양한 오일러 특성수의 정의 방법

오일러 특성수는 여러가지 다양한 방법으로 정의 된다. 이와 같은 다양한 정의 방법중 몇 가지 정의에 대하여 알아 보고자 한다.

2.1 삼각화를 통한 오일러 특성수

수학적으로 곡면을 정의하기 위해 '다양체'의 개념을 사용하여야 하는데 수학적 용어로 다양체를 정의해 보자.

정의 2.1.1. [1]위상공간 X 가 가산기저를 갖는 하우스도르프 공간(Hausdorff space)으로 각 점에 대하여 그 점을 포함하는 근방 중 \mathbb{R}^n 또는

$$\mathbb{H}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

과 위상동형인 것이 있으면 X 를 n 차원 다양체(manifold)라 한다. 특히 X 를 $n=1$ 이면 곡선, $n=2$ 이면 곡면이라 부른다.

경계가 없는 2차원 다양체로는 구(S^2 : Sphere), 원환체 (T^2 : Tours), 사영평면 ($\mathbb{R}P^2$: projective plane), 클라인 병(K : Kelin bottle)등이 있다. 이들은 모두 콤팩트 공간이다. 이처럼 경계가 없고 콤팩트인 다양체를 닫힌다양체(closed manifold)라 한다.

곡면은 모서리를 한 쌍씩 붙여서 적당한 $2n$ 각형으로부터 얻은 상공간과 위상동형이다. 곡면이 삼각화 된다는 사실을 이용해 모든 닫힌

곡면도 얻을 수 있다. 곡면을 여러개의 삼각형의 합으로 표시하는 것이 어떤 것인가 정의해 보자.

정의 2.1.2. [1] 컴팩트 곡면 S 가 (1)과 (2)를 만족하는 유한개의 폐부분 집합 $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ 으로 피복될 수 있을 때 $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ 을 S 의 삼각화(triangulation)라 한다.

(1) 각각의 T_i 들은 평면상의 삼각형 T'_i 와 위상동형이어야 한다.

$\phi_i: T_i \rightarrow T'_i$ 을 동형사상이라 할 때 T'_i 의 꼭짓점과 변의 역상을 각각 T_i 의 꼭짓점과 변이라 한다.

(2) $i \neq j$ 일 때 $T_i \cap T_j$ 는 공집합이거나 하나의 꼭짓점 이거나 또는 하나의 공통된 변이 되어야 한다.

1925년에 T.Rado는 모든 컴팩트 곡면을 삼각화 할 수 있다는 것을 보였다. 닫힌곡면을 삼각화 하면 다음이 성립한다.

(1) 각 모서리는 정확히 두 삼각형의 공통 모서리이다.

(2) 임의의 꼭짓점 v 에 대하여 v 를 꼭짓점으로 갖는 모든 삼각형을

$$T_0, T_1, \dots, T_{n-1}, T_n = T_0$$

라 했을 때, T_i 와 T_{i+1} 가 오직 한 모서리를 공유하도록 나열 할 수 있다. (단, $0 \leq i \leq n-1$)

닫힌연결곡면에는 어떤 곡면이 있는지 밝히기 위해 향을 정의한다.

정의 2.1.3. [2] 유한 차원의 실수벡터공간의 향은 다음과 같은 순서기저의 분류에 따른다. 두 순서기저 (b_1, \dots, b_n) 와 (b'_1, \dots, b'_n) 에 대해

$$b'_i = \sum a_{ij} b_j$$

이고 $\det(a_{ij}) > 0$ 이면 (b_1, \dots, b_n) 와 (b'_1, \dots, b'_n) 는 같은 향, $\det(a_{ij}) < 0$ 이면 반대의 향을 가진다고 정의한다.

정의 2.1.4. [1] 두 곡면 S_1, S_2 가 있을 때 각 곡면에서 한 점씩을 택하여 그 점들의 폐근방을 취하여 그 내부를 도려내고 그 경계끼리 붙여서 만든 공간과 위상동형인 곡면을 두 곡면의 연결합(*connected sum*)이라 하고 $S_1 \# S_2$ 로 표현한다.

두 곡면의 연결합은 잘라낸 원판의 위치나 잘라낸 원판의 경계를 붙이는데 사용하는 위상동형사상의 선택과는 상관없이 잘 결정된다는 것이 알려져 있다.

정의 2.1.5. [1] S 를 콤팩트 곡면이라 하자. S 를 삼각화하여 생긴 꼭짓점의 수가 V , 모서리의 수가 E , 삼각형의 수가 F 일 때, $\chi(S) = V - E + F$ 이며 S 의 오일러 특성수라고 한다.

같은 곡면에 대하여 서로 다른 삼각화를 택하여도 오일러 특성수는 변함이 없어야 한다. 주어진 삼각화에 대하여 꼭짓점과 모서리를 첨가함으로써 곡면을 더 잘게 삼각화 하여 $V - E + F$ 는 변하지 않음을 보일 수 있다. 또 서로 다른 삼각화에 대하여 두 삼각화에 있는 꼭짓점과 모서리를 모두 포함하는 삼각화가 존재함을 보이면 오일러 특성수는 삼각화와 무관하게 늘 일정하게 정의됨을 알 수 있다.

정리 2.1.6. [1] S_1 과 S_2 가 곡면일 때, S_1 과 S_2 의 연결합의 오일러 특성수는

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

을 만족한다.

증명 S_1 과 S_2 가 삼각화되었다고 하자. $S_1\#S_2$ 는 S_1 과 S_2 에서 각각 삼각형 하나씩 잘라내고 삼각형의 경계에 따라 두 꼭짓점을 붙여서 얻을 수 있다. 이 과정에서 모서리 3개, 꼭짓점 3개, 면 2개가 줄어든다.

$$\begin{aligned}
 \chi(S_1\#S_2) &= v(S_1\#S_2) - e(S_1\#S_2) + f(S_1\#S_2) \\
 &= \{v(S_1) + v(S_2) - 3\} - e\{v(S_1) + v(S_2) - 3\} \\
 &\quad + f\{v(S_1) + v(S_2) - 2\} \\
 &= \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2
 \end{aligned}$$

□

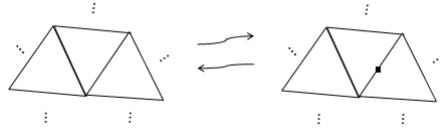


그림 1: 점과 선분 추가 $V' = V + 1$, $E' = E + 1$, $F' = F$

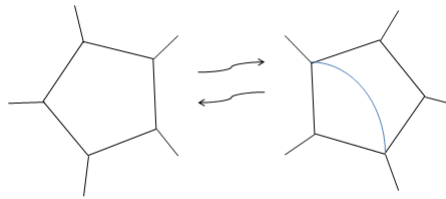


그림 2: 선분과 면 추가 $V' = V$, $E' = E + 1$, $F' = F + 1$

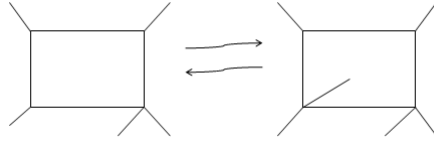


그림 3: 점과 선분 추가 $V' = V + 1$, $E' = E + 1$, $F' = F$

2.2 복체의 호몰로지군과 오일러 특성수

먼저 n -단체(n -simplex)에 대하여 정의한다.

정의 2.2.1. [3] 표준 n -단체(*standard n -simplex*)는

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$$

로 정의 한다.

이들 단체들은 향(orientation)을 가진다. 이것은 꼭짓점에 놓여있는 실제 점 뿐만 아니라 꼭짓점의 순서도 고려한다는 것을 의미한다.

$$(\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_n])$$

정의 2.2.2. [3] $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ 이 유향 n -단체(*oriented n -simplex*)일 때 i -번째 점을 뺀 유향 $(n-1)$ -단체 $\sigma^{(i)} = [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ 를 σ 의 면(*face*)이라고 한다.

정의 2.2.3. [3] 유향단체 $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ 의 경계(*boundary*)와 내부(*interior*)는 다음과 같이 정의한다.

$$\text{경계 } Bd(\sigma) = \bigcup_{i=0}^n [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

$$\text{내부 } \overset{\circ}{\sigma} = \sigma - Bd(\sigma)$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^n t_i v_i, \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i > 0\}$$

정의 2.2.4. [3] 다음 조건을 만족하고 단체로 나누어진 공간 K 를 단체복체(simplicial complex)라 한다.

- 1) $\tau < \sigma, \sigma \in K \Rightarrow \tau \in K$
- 2) $\tau, \sigma \in K \Rightarrow \tau \cap \sigma < \tau, \tau \cap \sigma < \sigma$

정의 2.2.5. [3] 다양체 X 위의 Δ -복체(Δ -complex)의 구조는 다음 조건들을 만족하는 사상들 $\sigma_\alpha : \overset{\circ}{\Delta}^n \rightarrow X$ 의 모임이다.

- 1) 사상 $\sigma_\alpha |_{\overset{\circ}{\Delta}^n} : \overset{\circ}{\Delta}^n \rightarrow X$ 는 전사이고 $\forall x \in X, \sigma_\alpha$ 는 $x \in \sigma_\alpha(\overset{\circ}{\Delta}^n)$ 에 대해 유일하게 존재한다.
- 2) $\sigma |_{[v_0, \dots, v_n]} = \sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$
- 3) $U \subset X$ 인 U 가 열려있으면 모든 α 에 대해 $\sigma_\alpha^{-1}(U) \subset \Delta^{n(\alpha)}$ 이다.

Δ -복체 X 의 단체 호몰로지군(simplicial homology groups)을 정의한다.

정의 2.2.6. [3] $\Delta_n(X)$ 는 X 의 n -단체들에 의하여 생성되는 자유가환군(free group)이다.

$$\Delta_n(X) = \{ \sum n_\alpha e_\alpha^n \mid n_\alpha \in \mathbb{Z} \}$$

정의 2.2.7. [3] 경계 준동형사상(boundary homomorphism)

$$\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$$

은 다음과같이 정의된다.

각각의 단체에 대하여

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma_\alpha |_{[v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma_\alpha^{(j)}$$

로 정의하고 이를 $\Delta_n(X)$ 로 다음과 같이 확장한다.

$$\partial_n(\sum_{\alpha} n_{\alpha} \sigma_{\alpha}) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \partial_n \sigma_{\alpha}.$$

정의 2.2.8. [3] $Z_n(X) = \text{Ker}(\partial_n)$ 을 n -순환마디 군(group of n -cycles)이라 하고 $Z_n(X)$ 의 원소를 n -순환마디(n -cycle)라 부른다.

$B_n(X) = \text{Im}(\partial_{n+1})$ 을 n -경계들의 군(group of n -boundaries)이라 하고 $B_n(X)$ 의 원소를 n -경계(n -boundary)라 부른다.

정리 2.2.9. [3] $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$ 에서 $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ 이다.

증명 $\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma |_{[v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]}$

이므로

$$\begin{aligned} \partial_n(\partial_n \sigma) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma_{\alpha} |_{[v_0, v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]} \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma |_{[v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]} \\ &\quad + \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma |_{[v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]} \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

이로부터 $\text{Im}(\partial_{n+1})$ 은 $\text{Ker}(\partial_n)$ 의 부분군이 됨을 알 수 있고 연산이 잘 보존되므로 호몰로지군을 정의한다.

정의 2.2.10. [3] 잉여군 $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ 를 X 의 n 차원 호몰로지군(n -th homology group of X)이라고 한다.

정의 2.2.11. [5] X 를 0-단체, 1-단체, 2-단체로 구성된 유한 단체복체라고 하자. 0-단체의 수를 n_0 , 1-단체의 수를 n_1 , 그리고 2-단체의 수를 n_2

라 할 때

$$\chi(X) = n_0 - n_1 + n_2 = \sum_{i=0}^2 (-1)^i n_i$$

라고 정의한다.

정의 2.2.12. [3]

$$\beta_n(X) = \text{rank} H_n(X; \mathbb{Z})$$

을 n -차원 베티수(n -th betti number)라 한다.

정리 2.2.13. [3] X 를 n 차원 단체들로 구성된 유한 단체복체라고 하자. 그리고 $\chi(X)$ 를 공간 X 의 오일러 특성수라 하고 β_j 를 $H_j(X)$ 의 베티수 (betti number)라 하자.

$$\chi(X) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \beta_j$$

는 $\chi(X)$ 의 오일러 특성수이다.

증명 유한개의 아벨 군(abelian groups)으로 생성된 사슬복체(chain complex)를

$$0 \longrightarrow \Delta_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \cdots \longrightarrow \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

라 할 때 호몰로지 $H_n = Z_n/B_n$, n -순환마디 군 $Z_n = \text{Ker}(\partial_n)$, n -경계의 군 $B_n = \text{Im}(\partial_{n+1})$ 에 대해 두개의 짧은 완전열(short exact sequences) $0 \rightarrow Z_n \rightarrow \Delta_n(X) \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0$, $0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0$ 가 만들어진다. 따라서

$$\text{rank} \Delta_n(X) = \text{rank} Z_n + \text{rank} B_{n-1}$$

$$\text{rank} Z_n = \text{rank} B_n + \text{rank} H_n$$

이다.

두가지의 식을 $(-1)^n$ 에 의해 계산하면 $\sum_n (-1)^n \text{rank} \Delta_n = \sum_n (-1)^n \text{rank} H_n$ 을 얻을 수 있다. $\text{rank} \Delta_k$ 은 X 의 k -단체의 개수 n_k 와 같으므로 좌변은 $\sum_{k=0}^n (-1)^k n_k = \chi(X)$ 가 되고 따라서 위의 정리가 증명된다. \square

2.3 포앙카레-호프 지표 정리의 오일러 특성수

2.3.1 방향교차수

먼저 횡단의 정의를 통해 다양체의 방향을 고려하여 방향교차수를 알아보자.

정의 2.3.1. [2] 사상 $f: X \rightarrow Y$ 가 Y 의 부분다양체 Z 를 횡단(transversal)한다는 것은 각 점 $x \in f^{-1}(Z)$ 에 대하여 $\text{im}(df_x) + T_{f(x)}Z = T_{f(x)}Y$ 을 의미한다. 여기서의 합 $+$ 는 부분공간 $\text{im}(df_x)$ 와 $T_{f(x)}Z$ 의 합집합이 생성(generate)하는 공간을 의미한다.

정의 2.3.2. [2] X 와 Z 는 Y 의 콤팩트 부분다양체이고 $\dim X + \dim Z = \dim Y$ 이며 X 가 Z 를 횡단하면 Y 내에서 X 와 Z 의 교차수 $I(X, Z)$ 를 각 교차점에서(이 순서대로) X 의 방향과 Z 의 방향의 합이 Y 의 방향과 같으면 부호를 $+1$, 반대이면 -1 로 정의된 교차점의 부호의 합으로 정의한다.

두 사상 $f: X \rightarrow Y$ 와 $g: Z \rightarrow Y$ 가 서로 횡단한다는 것은, $f(x) = y = g(z)$ 일 때 $df_x(T_x X) + dg_z(T_z Z) = T_y Y$ 임을 의미한다. 만일 $\dim X + \dim Z = \dim Y$ 이면 df_x 와 dg_z 는 단사이고 $df_x(T_x X) \oplus dg_z(T_z Z) = T_y Y$ 이다.

정의 2.3.3. [2] 두 사상 $f: X \rightarrow Y$ 와 $g: Z \rightarrow Y$ 이고 $\dim X + \dim Z = \dim Y$ 에서 (x, z) 의 방향부호를 $df_x(T_x X) \oplus dg_z(T_z Z)$ 의 방향과 $T_y Y$ 의 방향이

같으면 +1, 반대이면 -1로 정의하고, f 와 g 의 교차수를 다음과 같이 정의한다.

$$I(f, g) = \sum_{f(x)=g(x)} (x, z) \text{의 방향 부호}$$

호모토픽한 사상의 교차수 불변성을 알아보자.

정리 2.3.4. [2] 호모토픽한 사상들은 같은 교차수를 갖는다.

증명 만일 f_0 와 f_1 가 호모토픽하고 Z 를 횡단하면, 즉 호모토피 $F : I \times X \rightarrow Y$ 가 $F(0, x) = f_0(x), F(1, x) = f_1(x)$ 이면 경계가 있는 다양체의 확장함수는 방향수의 합은 0이므로 $I(\partial F, Z) = 0$ 이고 $\partial(I \times X) = X_1 - X_0$, $\partial F|_{X_0} = f_0$, $\partial F|_{X_1} = f_1$ 이다. 따라서 $\partial F^{-1}(Z) = f_1^{-1}(Z) - f_0^{-1}(Z)$ 가 되어 $I(\partial F, Z) = I(f_1, Z) - I(f_0, Z) = 0$ 이다. \square

정의 2.3.5. [2] Y 가 연결다양체이고 $\dim X = \dim Y$ 일 때 매끄러운 사상 $f : X \rightarrow Y$ 의 차수(degree)는 다음과 같이 정의한다.

$$\deg(f) = I(f, \{y\}), \quad y \in Y$$

차수는 교차수로 정의되므로 호모토피에 의해 불변이다. 따라서 호모토피를 이용하여 간단한 사상으로 변형하여 차수를 쉽게 구할 수 있다.

정의 2.3.6. [2] Y 가 콤팩트인 방향을 갖는 다양체이고, $\Delta \subset Y \times Y$ 가 대각공간일 때 Y 의 오일러 특성수를 $Y \times Y$ 내에서 Δ 의 자기교차수로 정의한다.

$$\chi(Y) = I(\Delta, \Delta)$$

2.3.2 러프셔츠 고정점 이론

컴팩트인 방향을 갖는 다항체 X 상의 매끄러운 사상 $f: X \rightarrow X$ 의 고정점($f(x) = x$)에 관한 성질을 교차이론을 사용해 살펴 볼 수 있다. $f(x) = x$ 이면 $(x, x) \in \text{graph}(f) \cap \Delta \subset X \times X$ 이다. 대각공간 Δ 와 $\text{graph}(f)$ 는 X 와 미분동형이다.

정의 2.3.7. [2] 매끄러운 사상 $f: X \rightarrow X$ 이고 Δ 와 그래프 $\text{graph}(f)$ 는 X 와 미분동형이므로 교차수 $I(\Delta, \text{graph}(f))$ 가 $X \times X$ 에서 정의되는데 이를 f 의 러프셔츠 수(Lefschetz number)라 정의하고 $L(f)$ 로 표현한다.

X 상의 항등사상은 모두가 고정점이어서 셀 수 없지만 변형하여 횡단되도록 하면 항등사상 $I_X: X \rightarrow X$ 의 그래프는 $\text{graph}(I_X) = \Delta$ 이므로 $L(I_X) = I(\Delta, \Delta) = \chi(X)$ 이다. 고정점의 부호는 고정점 주위에서 사상의 행동으로 알 수 있다.

정의 2.3.8. [2] 사상 $f: X \rightarrow X$ 에서 $\text{graph}(f)$ 가 Δ 를 횡단할 때 f 를 러프셔츠 사상(Lefschetz map)이라 정의한다. 이때 f 는 유한개의 고정점을 갖는다.

$f: X \rightarrow X$ 가 러프셔츠 사상 이라 할 때 $f(x) = x$ 이면

$$T_{(x,x)}(\text{graph}(f)) \subset T_x X \times T_x X$$

는 도함수 $df_x: T_x X \rightarrow T_x X$ 의 그래프이다. 대각공간 $\Delta \subset X \times X$ 의 접공간은 대각공간 $\Delta_x \subset T_x X \times T_x X$ 이다.

따라서

$\text{graph}(f)$ 가 Δ 를 횡단한다.

$\Leftrightarrow df_x$ 가 0만 고정점으로 갖는다.

$\Leftrightarrow +1$ 이 df_x 의 고유치가 아니다.

정의 2.3.9. [2] 러프셔츠 사상 $f: X \rightarrow X$, f 의 러프셔츠 고정점(Lefschetz fixed point) x 에 대해 $(x, x) \in \text{graph}(f) \cap \Delta \subset X \times X$ 의 방향수를 $L_x(f)$ 라 하며 이를 x 에서 f 의 국소러프셔츠 수(local Lefschetz number)라 하고 f 의 러프셔츠수는 $L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f)$ 로 정의한다.

정리 2.3.10. [2] 사상 $f: X \rightarrow X$ 가 러프셔츠 사상이고 x 가 f 의 러프셔츠 고정점일 때, $df_x - I$ 가 $T_x X$ 의 방향을 보존하면 $L_x(f) = +1$ 이고 반대방향으로 보내면 $L_x(f) = -1$ 이다.

증명 $A = df_x$ 이고 $\beta = \{v_1, \dots, v_k\}$ 를 $T_x X$ 의 양의방향 순서기저라 하면, $T_{(x,x)}\Delta$ 와 $T_{(x,x)}\text{graph}(f)$ 의 양의방향 순서기저는 $\{(v_1, v_1), \dots, (v_k, v_k)\}$ 와 $\{(v_1, Av_1), \dots, (v_k, Av_k)\}$ 이다.

$L_x(f)$ 의 부호

$= \{(v_1, v_1), \dots, (v_k, v_k), (v_1, v_1), \dots, (v_k, v_k)\}$ 의 부호

$= \{(v_1, v_1), \dots, (v_k, v_k), (0, (A - I)v_1), \dots, (0, (A - I)v_k)\}$ 의 부호

$= \{(0, v_1), \dots, (0, v_k), (0, (A - I)v_1), \dots, (0, (A - I)v_k)\}$ 의 부호

이다. 마지막 등호는 $\{(A - I)v_1, \dots, (A - I)v_k\}$ 가 $T_x X$ 의 기저이므로 v_1, \dots, v_k 는 $(A - I)v_i$ 의 일차결합으로 표시되고 따라서 둘째 등호에서

빼주어 구할 수 있다. 따라서 $\text{sign}L_x(f) = \text{sign}\beta \cdot \text{sign}(A - I)\beta$ 이므로, $\text{sign} L_x(f) = \text{sign} \det(A - I)$ 이다.

□

정의 2.3.11. [2] 사상 $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ 가 고립된 고정점 x 를 가졌다고 하자. B 는 x 를 중심으로 하는 작은 디스크로 f 의 다른 고립점을 포함하지 않으면 사상

$$F : \partial B \rightarrow S^{k-1}, \quad F(z) = \frac{f(z) - z}{|f(z) - z|}$$

는 매끄러운 사상이다. f 의 x 에서 국소러프셔츠 수 $L_x(f)$ 를 사상 F 의 차수 $\deg(F)$ 로 정의한다.

정리 2.3.12. [2] 러프셔츠 고정점에서 $L(f)$ 에 대한 두 정의에 대해

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f), \quad L_x(f) = \deg(F)$$

이다.

증명 $f(0) = 0$ 를 러프셔츠 고정점이라 하고 $f(z) = Az + \varepsilon(z)$ 로 쓰자. $A = df_0$ 이고 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(z)}{|z|} = 0$ 이다. $A - I$ 는 선형동형이므로 $A - I$ 의 단위공의 상은 반지름 $c > 0$ 인 폐 공을 포함한다. $A - I$ 는 선형사상이므로 모든 $z \in \mathbb{R}^k$ 에 대하여 $|(A - I)(z)| > c|z|$ 가 되어 $\frac{|\varepsilon(z)|}{|z|} < \frac{c}{2}$ 가 되는 디스크를 B 라 하자. $f_t(z) = Az + t\varepsilon(z)$ 라 하면

$$|f_t(z) - z| \geq |(A - I)z| - t|\varepsilon(z)| > \frac{c}{2}|z|, \quad 0 \leq t \leq 1$$

이다. $F : \partial B \times I \rightarrow S^{k-1}$ 를 $F_t(z) = \frac{f_t(z) - z}{|f_t(z) - z|}$ 라 하자. 이 때, $\deg(F_1)$ 을 새로 정의한 $L_0(f)$ 이고 $\deg(F_1) = \deg(F_0)$ 이며 $F_0(z) = \frac{A-I}{|(A-I)z|}$ 의 차수는

$(A - I)$ 의 방향보존 여부에 따라 ± 1 이 된다. □

정리 2.3.13. [2] f 가 \mathbb{R}^k 상에서 고립된 고정점 x 를 가지며 B 는 x 를 중심으로 하는 작은 폐디스크로 f 의 다른 고정점을 포함하지 않는다고 하자. $\overset{\circ}{B}$ 내의 콤팩트 부분공간 밖에서는 f 와 같고 B 내에서만 리프셔츠 고정점을 갖는 임의의 사상을 f_1 이라 하면

$$L_x(f) = \sum_{f_1(z)=z} L_z(f_1)$$

이다.

증명 $L_x(f)$ 는 사상 $F : \partial B \rightarrow S^{k-1}$, $F(z) = \frac{f(z)-z}{|f(z)-z|}$ 의 차수이다. ∂B 에서 $f = f_1$ 이므로 $F(z) = F_1(z) = \frac{f_1(z)-z}{|f_1(z)-z|}$ 이다. z_1, \dots, z_N 을 f_1 의 고정점이라 하자. z_i 을 중심으로 한 작은 디스크 B_i 는 서로소이고 경계 ∂ 와도 서로소라고 하자. F_1 은 $B' = B - \bigcup_{i=1}^N \text{int}(B_i)$ 로 확장된다. 따라서 $F : \partial B' \rightarrow S^{k-1}$ 의 차수는 0이고, $\partial B' = \partial B - \bigcup_{i=1}^N \partial B_i$ 이므로

$$L_x(f) = \deg F = \deg F_1 = \sum_{i=1}^N L_{z_i}(f_1)$$

이다. □

2.3.3 포앙카레-호프 정리

정의 2.3.14. [2] 다양체 X 가 유클리드 공간 \mathbb{R}^n 내에 있다. 다양체 X 상의 벡터장(vector field)은 정의역 X 에 있는 각 점 x 에 대하여 접벡터(tangent vector)로 대응시키는 함수로 정의한다.

정의 2.3.15. [2] \mathbb{R}^n 상의 벡터장 v 가 고립된 0을 가졌다고 하고 x 가 D

안에 있는 v 의 유일한 0점이 되는 페디스크 D 를 잡자.

$$u : \partial D \rightarrow S^{n-1}, \quad u(z) = \frac{v(x)}{|v(x)|}$$

이때 V 의 x 에서의 지표 $\text{ind}_x(v)$ 를 사상

$$u : \partial D \rightarrow S^{n-1}, \quad u(z) = \frac{v(x)}{|v(x)|}$$

의 차수로 정의한다.

$\text{ind}_0(v)$ 는 원환(annulus)에서 정의되고 경계에서 차수가 0이기 때문에 D 의 선택에 관계없이 불변이다.

다양체상의 벡터장이 고립된 0을 가질 때 지표를 계산하기 위해서 매개화를 사용한다. 벡터장 $v: X \rightarrow TX$ 가 $v(x) = 0$ 일 때, $\phi: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow X$, $\phi(0) = x$, 인 x 근방에서의 매개화 ϕ 에 대하여 각 점 $u \in U$ 에서 도함수 $d\phi_u: \mathbb{R}^k \rightarrow T_{\phi(u)}X$ 는 선형동형사상이다. 따라서 당김(pull-back) 벡터장을 정의 한다.

정의 2.3.16. [2] U 상에 정의된 벡터장 ϕ^*v 을 임의의 $u \in U$ 에 대해

$$\phi^*v(u) = d\phi_u^{-1} \cdot v(\phi(u))$$

로 표현한다. 이때 ϕ^*v 를 v 의 ϕ 에 의한 당김(pull-back) 벡터장으로 정의 한다.

유클리드 공간의 국소면에서 벡터장 v 와 호모토피 $\{f_i\}$ 가 \mathbb{R}^n 의 원점 근방 U 에서 정의되었다고 한다.

정리 2.3.17. [2] $t \neq 0$ 에 대하여 f_i 가 원점만을 U 에서 고정점으로 갖는

다고 하고 벡터장 v 도 원점에서만 0이라 하자. 만일 $\{f_t\}$ 가 $t = 0$ 에서 v 에 접하면 각 t 에 대하여

$$\text{ind}_0(v) = L_0(f_t)$$

이다.

보조정리 2.3.18. [2] $g(t)$ 가 매끄러운 함수이면 매끄러운 함수 $r(t)$ 가 존재하여

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + t^2r(t)$$

이다.

정리 2.3.17의 증명 시간 t 에서 미분 $f'_t(x)$ 는 $f_t(x)$ 의 각 좌표를 따라서 t 에 대한 미분을 좌표로 하는 벡터를 나타낸다. $t = 0$ 에서 $\{f_t\}$ 의 도함수가 v 이므로 $f'_0(x) = v(x)$ 이다. x 를 고정하고 $f_t(x)$ 의 각 좌표를 따라 보조정리 2.3.18를 이용하면 매끄러운 벡터함수 $r(t, x)$ 가 존재하여

$$f_t(x) = f_0 + tf'_0(x) + t^2r(t, x) = x + tv(x) + t^2r(t, x)$$

이다. 따라서

$$f_t(x) - x = tv(x) + t^2r(t, x)$$

이고, $t \neq 0, x \neq 0$ 에 대하여 $f_t(x) - x \neq 0$ 이다. x 가 작은 구 S_ε 위에서 움직일 때,

$$\frac{f_t(x) - x}{|f_t(x) - x|} = \frac{v(x) + tr(t, x)}{|v(x) + tr(t, x)|}$$

이다. 좌변의 차수는 $L_0(f_t)$ 이고 우변은 $\frac{v(x)}{|v(x)|}$ 인 호몰토픽하므로 차수가

$\text{ind}_0(v)$ 이다. 차수는 호모토피에 관계없이 불변하므로

$$L_0(f_t) = \text{ind}_0(v)$$

이다. □

정리 2.3.19. [2] (ε -근방 정리) 경계가 없는 콤팩트 다양체 $Y \subset \mathbb{R}^m, \varepsilon > 0$ 에 대해, $Y^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \text{dist}(Y, x) < \varepsilon\}$ 라 하자. 만일 $\varepsilon > 0$ 이 아주 작으면 각 $w \in Y^\varepsilon$ 은 Y 내의 유일한 가장 가까운 점 $\pi(w) \in Y$ 를 가진다. 따라서 $\pi: Y^\varepsilon \rightarrow Y$ 사상이 정의되며, π 는 침몰이다.

정리 2.3.20. [2] (포앙카레-호프 지표 정리) 매끄러운 벡터장 v 가 콤팩트이며 방향을 갖는 다양체 X 에서 유한개 0 을 가지면, X 상에서 v 의 지표의 합은 X 의 오일러지표와 같다.

$$\chi(X) = \sum_{v(x)=0} \text{ind}_x(v)$$

증명 벡터장 v 가 콤팩트이며 방향이 주어진 다양체 $X \in \mathbb{R}^n$ 상에 있다. ε -근방 정리에서와 같이 $X^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \text{dist}(X, x) < \varepsilon\}$ 존재하고 ε 이 충분히 작으면 $\pi: X^\varepsilon \rightarrow X$ 는 법다발 사영이 된다. X 가 콤팩트이므로 t 가 작으면 $x + tv(x) \in X^\varepsilon, x \in X$ 이다. $f_t: X \rightarrow X$ 를 $f_t(x) = \pi(x + tv(x))$ 로 정의하자.

x 가 v 의 0 이면 x 는 $f_t(x) = 0$ 이므로 f_t 의 고정점이다. 고정된 x 에 대해서 곡선 f_t 의 $t = 0$ 에서 접벡터는 $d\pi_x(v(x))$ 이고 π 는 X 상에서 항등사상이므로 $d\pi_x$ 는 $T_x X$ 상에서 항등사상이다. 따라서 $d\pi_x(v(x)) = v(x)$ 이므로 $\{f_t\}$ 는 $t = 0$ 에서 벡터장 v 에 접한다. 만일 x 가 v 의 0 이 아닌 x 의 작은 주위에 x 외에 $f_t, (t \neq 0)$ 의 고정점은 없다. 왜냐하면 $f_t(x + tv(x)) = x + tv(x)$

이면

$$\pi(x + tv(x)) = x + tv(x), \quad t \neq 0$$

이므로 $v(x) = 0$ 이기 때문이다. 따라서

$$\text{ind}(v) = \sum_{v(x)=0} \text{ind}_x(v) = \sum_{f_t(x)=0} L_x(f_t) = L(f_t) = L(f_0) = \chi(X)$$

이다.

□

제 3 장

닫힌연결곡면에 대한 다양한 오일러 특성수의 계산

다양한 방법으로 정의된 오일러 특성수를 같은 대상 닫힌연결곡면(closed connected surface)에 대하여 계산함으로써 이와 같은 정의가 같은 값을 갖는 것을 확인하자.

3.1 닫힌곡면의 분류

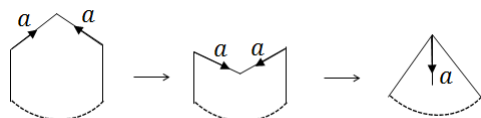
닫힌연결곡면이 구, 원환체 여러개의 연결합, 또는 사영평면 여러개의 연결합 중의 하나와 위상동형임을 보이자.

정리 3.1.1. [1] 닫힌연결곡면 S 는 다음 곡면 중 하나와 위상동형이다.

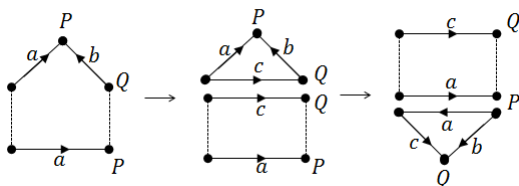
- (1) 구면(S^2)
- (2) 유한개의 원환체의 연결합 ($T^2 \# \dots \# T^2$)
- (3) 유한개의 사영평면의 연결합 ($\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$)

증명 곡면 S 를 표현할 때 다각형 D 의 각 모서리에 문자와 화살표를 대응시켜 붙이는 방법을 사용하였고 문자를 시계반대 방향으로 나열하면 다각형 D 로부터 곡면 S 를 얻는 정보를 나타낼 수 있다. 상공간으로 표현되는 곡면이 있을 때

1단계 같은 문자 지수가 반대인 모서리가 이웃하면 $\dots aa^{-1}\dots$ 형태의 변을 다 제거할 수 있고 $\dots aa^{-1}\dots$ 를 제거하여도 다양체를 변화시키지 않는다. 만일, 이런 과정을 반복한 후에 공집합인 단어가 되면 S^2 , aa 꼴로 표시되는 단어가 남으면 \mathbb{RP}^2 가 된다.

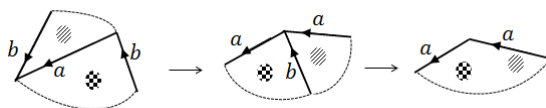


2단계 꼭짓점을 모두 다 일치시켜 단 하나의 꼭짓점만 남도록 할 수 있다.



P 에 대응하는 D 의 꼭짓점들을 P 로 표시하고 점 Q 에 대응하는 꼭짓점들을 Q 로 표시하면 선 c 를 따라 a, b, c 를 모서리로 갖는 삼각형을 잘라 a 로 표시된 아래 모서리에 갖다 붙이면 P 에 대응하는 꼭짓점은 하나 줄고 Q 에 대응하는 꼭짓점은 하나 늘어난다. 이 작업을 반복해 다각형 D 의 모든 꼭짓점이 S 에서 한 점이 되도록 변형한다.

3단계 문자와 지수가 같은 모서리의 쌍이 존재하면 이웃하게 변형할 수 있다.



문자도 같고 지수도 같으나 이웃하지 않는 두 모서리를 한 모서리의 화살표 방향 끝에서 다른 모서리의 화살표 방향 끝을 잇는 선분을 따라 잘라낸다. 잘라내서 얻은 두 조각을 b 를 따라 붙이면 문자와 지수가 같은 두 모서리가 이웃하게 된다. 이 작업을 반복하여 문자와 지수가 같은 모서리를 모두 이웃하게 만들 수 있는데, 만일 D 의 문자가 같고 방향도 같으면

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n = \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2}_{n \text{개}}$$

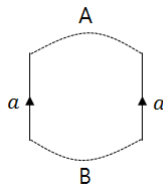
사영평면 n 개의 연결합이 된다.

4단계 문자가 같고 지수가 다른 한 쌍의 모서리 $\cdots a \cdots a^{-1} \cdots$ 가 있으면 반드시 또다른 한 쌍의 $\cdots b \cdots b^{-1} \cdots$ 가 있어서

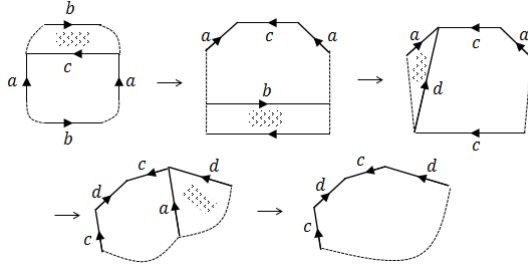
$$\cdots a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1} \cdots$$

형태의 배열을 이루어야 한다.

만약 $\cdots b \cdots b^{-1} \cdots$ 가 없다면 다음 그림과 같이 A 부분에 있는 모서리는 B 부분에 있는 모서리에 붙여지지 않아 2단계에 모순이 된다.



$\cdots a \cdots b \cdots a^{-1} \cdots b^{-1} \cdots$ 의 배열을 $\cdots c d c^{-1} d^{-1} \cdots$ 의 배열로 변형시킬 수 있다.



계속 반복하여 $aba^{-1}b^{-1}$ 형태로 나타낸 후 문자와 지수가 같은 모서리의 쌍이 전혀 없으면 D 의 경계는 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1}$ 이고 이것은 원환체 m 개의 연결합 $\underbrace{T^2\#\cdots\#T^2}_{m\text{개}}$ 이 된다.

4단계 이후에도 문자와 지수가 같은 모서리의 쌍이 있다면 D 의 경계는 $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1}c_1c_1\cdots c_nc_n$ 이고 이것은 유한개의 원환체와 유한개의 사영평면의 연결합 $\underbrace{T^2\#\cdots\#T^2}_{m\text{개}}\#\underbrace{\mathbb{R}P^2\#\cdots\#\mathbb{R}P^2}_{n\text{개}}$ 이 된다. $T^2\#\mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$ 이므로

$$\underbrace{T^2\#\cdots\#T^2}_{m\text{개}}\#\underbrace{\mathbb{R}P^2\#\cdots\#\mathbb{R}P^2}_{n\text{개}} \cong \underbrace{\mathbb{R}P^2\#\cdots\#\mathbb{R}P^2}_{2m\text{개}}\#\underbrace{\mathbb{R}P^2\#\cdots\#\mathbb{R}P^2}_{n\text{개}}$$

와 같이 $2m+n$ 개의 $\mathbb{R}P^2$ 의 연결합이 된다. □

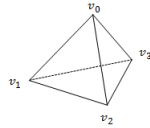
3.2 삼각화를 통한 오일러 특성수의 계산

컴팩트 곡면 $S^2, T^2, \mathbb{R}P^2$ 를 삼각화 하여 각각의 꼭짓점, 모서리, 면의 수를 구하여 오일러 특성수를 계산하자.

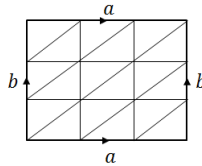
3.2.1 S^2, T^2, \mathbb{RP}^2 의 오일러 특성수 계산

컴팩트 곡면을 임의로 삼각화하여 오일러 특성수를 계산한다.

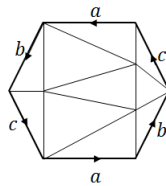
$$\chi(S^2) = V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2$$



$$\chi(T^2) = V - E + F = 9 - 27 + 18 = 0$$



$$\chi(\mathbb{RP}^2) = V - E + F = 6 - 15 + 10 = 1$$



곡면의 연결합의 오일러특성수의 정리를 이용해 유한개의 원환체와 유한개의 사영평면의 오일러 특성수를 계산하자.

3.2.2 유한개의 원환체의 연결합으로 주어지는 곡면의 오일러 특성수 계산

$$\begin{aligned}\chi(T^2) &= 0 \\ \chi(T^2 \# T^2) &= \chi(T^2) + \chi(T^2) - 2 = -2 = 2 - 2 \times 2 \\ \chi(T^2 \# T^2 \# T^2) &= \chi(T^2 \# T^2) + \chi(T^2) - 2 \\ &= \chi(T^2) + \chi(T^2) + \chi(T^2) - 4 = -4 = 2 - 2 \times 3 \\ &\vdots \\ \chi(\underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{n\text{개}}) &= 2 - 2n\end{aligned}$$

3.2.3 유한개의 사영평면의 연결합으로 주어지는 곡면의 오일러 특성수 계산

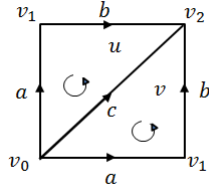
$$\begin{aligned}\chi(\mathbb{R}P^2) &= 1 = 2 - 1 \\ \chi(\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2) &= \chi(\mathbb{R}P^2) + \chi(\mathbb{R}P^2) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 = 2 - 2 \\ \chi(\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2) &= \chi(\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2) + \chi(\mathbb{R}P^2) - 2 = 1 - 2 = -1 = 2 - 3 \\ &\vdots \\ \chi(\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_{n\text{개}}) &= 2 - n\end{aligned}$$

3.3 복체의 호몰로지군을 이용한 오일러 특성수 계산

단한 연결곡면에 대해서 호몰로지군을 이용한 베티수의 정의로부터 오일러 특성수를 계산 할 수 있다.

3.3.1 $X = S^2$ 에서의 오일러 특성수 계산

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \Delta_2(X) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$



$$\begin{aligned} u &\longmapsto -a - b + c & a &\longmapsto v_1 - v_0 \\ v &\longmapsto a + b - c & b &\longmapsto v_2 - v_1 \\ & & c &\longmapsto v_2 - v_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\partial_2) &= \{ku + lv \mid k(-a - b + c) + l(a + b - c)\} \\ &= (l - k)a + (l - k)b - (l - k)c = 0, \quad k, l \in \mathbf{Z} \\ &= \{k(u + v) \mid k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \langle u + v \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Im}(\partial_3) = \{0\}$$

$$\therefore H_2^\Delta(S^2) = \text{Ker}(\partial_2) / \text{Im}(\partial_3) = \langle u + v \rangle / \{0\} \cong \mathbf{Z}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\partial_1) &= \{ka + lb + mc \mid k(v_1 - v_0) + l(v_2 - v_1) + m(v_2 - v_0)\} \\
&= \{(k-l)v_1 + (-k-m)v_0 + (l+m)v_2 = 0, \quad k, l, m \in \mathbf{Z}\} \\
&= \{ka + kb - kc \mid k \in \mathbf{Z}\} \\
&= \langle a + b - c \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Im}(\partial_2) &= \langle -a - b + c, a + b - c \rangle \\
&= \langle a + b - c \rangle
\end{aligned}$$

$$\therefore H_1^\Delta(S^2) = \text{Ker}(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2) = \langle a + b - c \rangle / \langle a + b - c \rangle \cong 0$$

$$\text{Ker}(\partial_0) = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
\text{Im}(\partial_1) &= \{ka + lb + mc \mid k(v_1 - v_0) + l(v_2 - v_1) + m(v_2 - v_0)\} \\
&= (k-l)v_1 + (-k-m)v_0 + (l+m)v_2 = 0, \quad k, l, m \in \mathbf{Z} \\
&= \{rv_1 + sv_2 - (r+s)v_0 \mid r, s \in \mathbf{Z}\} \\
&= \langle v_1 - v_0, v_2 - v_0 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore H_0^\Delta(S^2) &= \text{Ker}(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle / \langle v_1 - v_0, v_2 - v_0 \rangle \\
&\cong \langle v_0 \rangle \\
&\cong \mathbf{Z}
\end{aligned}$$

따라서 S^2 의 호몰로지군은 다음과 같다.

$$\therefore H_n^\Delta(S^2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & n=0,2 \text{ 일 때} \\ 0, & \text{다른 경우} \end{cases}$$

베티수의 정의에 따라 S^2 의 n -차원 베티수를 구하면 다음과 같다.

$$\beta_0(S^2) = 1 \quad \beta_1(S^2) = 0 \quad \beta_2(S^2) = 1 \quad \beta_n(S^2) = 0 (n \neq 0, 2)$$

베티수를 이용하여 S^2 의 오일러 특성수를 계산할 수 있다.

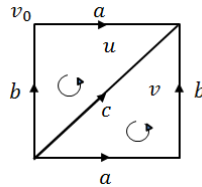
$$\therefore \chi(S^2) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \beta_j = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$$

3.3.2 유한개의 원환체의 연결합으로 주어진 곡면의 오일러 특성수 계산

$T^2 \# \dots \# T^2$ 에서의 오일러 특성수를 계산하기 위해 다음과 같은 일반화 과정을 거쳐서 $T^2 \# \dots \# T^2$ 의 호몰로지를 구하여 베티수를 이용해 오일러 특성수를 계산할 수 있다.

$X = T^2$ 의 호몰로지를 계산할 수 있다.

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \Delta_2(X) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$



$$u \mapsto c - a - b$$

$$v \mapsto a + b - c$$

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\partial_2) &= \{ku + lv \mid k(c - a - b) + l(a + b - c) \\ &= (l - k)a + (l - k)b - (k - l)c = 0, k, l \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{k(u + v) \mid k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \langle u + v \rangle\end{aligned}$$

$$\text{Im}(\partial_3) = \{0\}$$

$$\therefore H_2^\Delta(T^2) = \text{Ker}(\partial_2) / \text{Im}(\partial_3) = \langle u + v \rangle / \{0\} \cong \mathbf{Z}$$

$$\begin{aligned}\text{Ker}(\partial_1) &= \{ka + lb + mc \mid k(v_0 - v_0) + l(v_0 - v_0) \\ &\quad + m(v_0 - v_0) = 0 \quad k, l, m \in \mathbf{Z}\} \\ &= \langle a, b, c \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Im}(\partial_2) &= \{(l - k)(a + b - c) \mid l, k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{n(a + b - c) \mid n \in \mathbf{Z}\} \\ &= \langle a + b - c \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore H_1^\Delta(T^2) &= \text{Ker}(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2) \\
&= \langle a, b, c \rangle / \langle a + b - c \rangle \\
&\cong \langle a, b, a + b - c \rangle / \langle a + b - c \rangle \\
&\cong \langle a, b \rangle \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}
\end{aligned}$$

$$\text{Ker}(\partial_0) = \langle v_0 \rangle$$

$$\text{Im}(\partial_1) = \{0\}$$

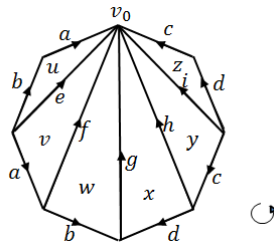
$$\therefore H_0^\Delta(T^2) = \text{Ker}(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) = \langle v_0 \rangle / \{0\} \cong \mathbf{Z}$$

따라서 T^2 의 호몰로지군은 다음과 같다.

$$\therefore H_n^\Delta(T^2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & n=0, 2 \text{ 일 때} \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, & n=1 \text{ 일 때} \\ 0, & \text{다른 경우} \end{cases}$$

$X = T^2 \# T^2$ 의 호몰로지를 계산할 수 있다.

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \Delta_2(X) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$



$$u \mapsto e - a - b$$

$$v \mapsto a + f - e$$

$$w \mapsto b + g - f$$

$$x \mapsto h - g - d$$

$$y \mapsto i - h - c$$

$$z \mapsto c - i + d$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\partial_2) &= \{ku + lv + mw + nx + oy + pz \mid (-k + l)a + (-k + m)b \\ &\quad + (p - o)c + (p - n)d + (k - l)e + (l - m)f + (m - n)g \\ &\quad + (n - o)h + (o - p)i = 0, \quad k, l, m, n, o, p \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{q(u + v + w + x + y + z) \mid q \in \mathbf{Z}\} \\ &= \langle u + v + w + x + y + z \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Im}(\partial_3) = \{0\}$$

$$\therefore H_2^\Delta(T^2 \# T^2) = \text{Ker}(\partial_2) / \text{Im}(\partial_3) = \langle u + v + w + x + y + z \rangle / \{0\} \cong \mathbf{Z}$$

$$\text{Ker}(\partial_1) = \langle a, b, c, d, e, f, g, h, i \rangle$$

$$\cong \langle a, c, e, i, b+g-f, h-g-d, h-g-d \rangle$$

$$\text{Im}(\partial_2) = \langle e-a-b, a+f-e, b+g-f, h-g-d, i-c-h, c-i+d \rangle$$

$$\cong \langle b+g-f, h-g-d, b-f+h-d \rangle$$

$$\therefore H_1^\Delta(T^2 \# T^2) = \text{Ker}(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2)$$

$$= \langle a, c, e, i, b-f+h-d \rangle / \langle b-f+h-d \rangle$$

$$\cong \langle a, c, e, i \rangle \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$$

$$\text{Ker}(\partial_0) = \langle v_0 \rangle$$

$$\text{Im}(\partial_1) = \{0\}$$

$$\therefore H_0^\Delta(T^2 \# T^2) = \text{Ker}(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) = \langle v_0 \rangle / \{0\} \cong \mathbf{Z}$$

따라서 $T^2 \# T^2$ 의 호몰로지군은 다음과 같다.

$$\therefore H_n^\Delta(T^2 \# T^2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & n=0,2 \text{ 일 때} \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & n=1 \text{ 일 때} \\ 0, & \text{다른 경우} \end{cases}$$

이것을 일반화 하여 $T^2\#\dots\#T^2$ 의 호몰로지군을 계산할 수 있다.

$$\therefore H_n^\Delta(\underbrace{T^2\#\dots\#T^2}_{m\text{개}}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & n=0,2\text{일 때} \\ \underbrace{\mathbf{Z}\oplus\dots\oplus\mathbf{Z}}_{2m\text{개}}, & n=1\text{일 때} \\ 0, & \text{다른 경우} \end{cases}$$

베티수의 정의에 따라 $T^2\#\dots\#T^2$ 의 n -차원 베티수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \beta_0(\underbrace{T^2\#\dots\#T^2}_{m\text{개}}) &= 1 & \beta_1(\underbrace{T^2\#\dots\#T^2}_{m\text{개}}) &= 2m \\ \beta_2(\underbrace{T^2\#\dots\#T^2}_{m\text{개}}) &= 1 & \beta_n(\underbrace{T^2\#\dots\#T^2}_{m\text{개}}) &= 0 \quad (n \neq 0, 1, 2) \end{aligned}$$

베티수를 이용하여 $T^2\#\dots\#T^2$ 의 오일러 특성수를 계산할 수 있다.

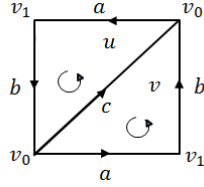
$$\therefore \chi(\underbrace{T^2\#\dots\#T^2}_{m\text{개}}) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \beta_j = 1 - 2m + 1 + 0 = 2 - 2m$$

3.3.3 유한개의 사영평면의 연결합으로 주어진 곡면의 오일러 특성수 계산

$\mathbb{R}\mathbf{P}^2\#\dots\#\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 에서의 오일러 특성수를 계산하기 위해 다음과 같은 일반화 과정을 거쳐서 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2\#\dots\#\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 의 호몰로지를 구하여 베티수를 이용해 오일러 특성수를 계산할 수 있다.

$X = \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 의 호몰로지를 계산할 수 있다.

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \Delta_2(X) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$



$$u \mapsto a + b + c \quad a \mapsto v_1 - v_0$$

$$v \mapsto a + b - c \quad b \mapsto v_0 - v_1$$

$$c \mapsto 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\partial_2) &= \{ku + lv \mid k(a + b + c) + l(a + b - c)\} \\ &= (k + l)a + (k + l)b + (k - l)c = 0, \quad k, l \in \mathbf{Z} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

$$\text{Im}(\partial_3) = \{0\}$$

$$\therefore H_2^\Delta(\mathbb{R}\mathbf{P}^2) = \text{Ker}(\partial_2) / \text{Im}(\partial_3) = \{0\} / \{0\} = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Ker}(\partial_1) &= \{ka + lb + mc \mid k(v_1 - v_0) + l(v_0 - v_1) + m \cdot 0 = 0 \quad k, l, m \in \mathbf{Z}\} \\
&= \{r(a+b) + sc \mid r, s \in \mathbf{Z}\} \\
&= \langle a+b, c \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Im}(\partial_2) &= \{k(a+b+c) + l(a+b-c) \mid k, l \in \mathbf{Z}\} \\
&= \langle a+b+c, a+b-c \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore H_1^\Delta(\mathbb{R}\mathbf{P}^2) &= \text{Ker}(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2) = \langle a+b, c \rangle / \langle a+b+c, a+b-c \rangle \\
&\cong \langle a+b+c, c \rangle / \langle a+b+c, 2c \rangle \\
&\cong \langle c \rangle / \langle 2c \rangle \cong \mathbf{Z}_2
\end{aligned}$$

$$\text{Ker}(\partial_0) = \langle v_0, v_1 \rangle$$

$$\begin{aligned}
\text{Im}(\partial_1) &= \{0\} \\
&= \{k(v_1 - v_0) + l(v_0 - v_1) \mid k, l \in \mathbf{Z}\} \\
&= \{(k-l)(v_1, v_0) \mid k, l \in \mathbf{Z}\} \\
&= \langle v_1 - v_0 \rangle
\end{aligned}$$

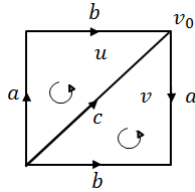
$$\begin{aligned}
\therefore H_0^\Delta(\mathbb{R}\mathbf{P}^2) &= \text{Ker}(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) = \langle v_0, v_1 \rangle / \langle v_1, v_0 \rangle \\
&\cong \langle v_0 - v_1, v_0 \rangle / \langle v_1 - v_0 \rangle \\
&\cong \langle v_0 \rangle \\
&\cong \mathbf{Z}
\end{aligned}$$

따라서 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 의 호몰로지군은 다음과 같다.

$$\therefore H_n^\Delta(\mathbb{R}\mathbf{P}^2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & n=0 \text{ 일 때} \\ \mathbf{Z}_2, & n=1 \text{ 일 때} \\ 0, & \text{다른 경우} \end{cases}$$

$X = \mathbb{R}\mathbf{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbf{P}^2 = K$ (Klein bottle)의 호몰로지를 계산할 수 있다.

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \Delta_2(X) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$



$$u \mapsto c - b - a$$

$$v \mapsto b - a - c$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\partial_2) &= \{ku + lv \mid k(c - b - a) + l(b - a - c) = (-l - k)a + (l - k)b \\ &\quad + (k - l)c = 0, \quad k, l \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

$$\text{Im}(\partial_3) = \{0\}$$

$$\therefore H_2^\Delta(\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbf{P}^2) = \text{Ker}(\partial_2) / \text{Im}(\partial_3) = \{0\} / \{0\} = 0$$

$$\text{Ker}(\partial_1) = \{ka + lb + mc \mid k \cdot 0 + l \cdot 0 + m \cdot 0 = 0 \quad k, l, m \in \mathbf{Z}\} = \langle a, b, c \rangle$$

$$\text{Im}(\partial_2) = \{k(c - b - a) + l(b - a - c) \mid k, l \in \mathbf{Z}\} = \langle -a - b + c, -a + b - c \rangle$$

$$\begin{aligned} \therefore H_1^\Delta(\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbf{P}^2) &= \text{Ker}(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2) = \langle a, b, c \rangle / \langle -a - b + c, -a + b - c \rangle \\ &\cong \langle a, b, c \rangle / \langle a + b - c, a - b + c \rangle \\ &\cong \langle a + b - c, b, c \rangle / \langle a + b - c, 2b - 2c \rangle \\ &\cong \langle b - c, c \rangle / \langle 2(b - c) \rangle \\ &\cong \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z} \end{aligned}$$

$$\text{Ker}(\partial_0) = \langle v_0 \rangle$$

$$\text{Im}(\partial_1) = \{0\}$$

$$\therefore H_0^\Delta(\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbf{P}^2) = \text{Ker}(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) = \langle v_0 \rangle / \{0\} \cong \mathbf{Z}$$

따라서 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 의 호몰로지 군은 다음과 같다.

$$\therefore H_n^\Delta(\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbf{P}^2) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & n=0 \text{일 때} \\ \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}, & n=1 \text{일 때} \\ 0, & \text{다른 경우} \end{cases}$$

이것을 일반화 하여 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \# \dots \# \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 의 호몰로지군을 계산할 수 있다.

$$\therefore H_n^\Delta(\underbrace{\mathbb{R}\mathbf{P}^2 \# \dots \# \mathbb{R}\mathbf{P}^2}_{m \text{개}}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & n=0 \text{일 때} \\ \mathbf{Z}_2 \oplus \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}}_{m-1 \text{개}}, & n=1 \text{일 때} \\ 0, & \text{다른 경우} \end{cases}$$

베타수의 정의에 따라 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2\#\dots\#\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 의 n -차원 베타수를 구하면 다음과 같다.

$$\beta_0(\underbrace{\mathbb{R}\mathbf{P}^2\#\dots\#\mathbb{R}\mathbf{P}^2}_{m\text{개}}) = 1 \quad \beta_1(\underbrace{\mathbb{R}\mathbf{P}^2\#\dots\#\mathbb{R}\mathbf{P}^2}_{m\text{개}}) = m - 1$$

$$\beta_n(\underbrace{\mathbb{R}\mathbf{P}^2\#\dots\#\mathbb{R}\mathbf{P}^2}_{m\text{개}}) = 0 \quad (n \neq 0, 1)$$

베타수를 이용하여 $\mathbb{R}\mathbf{P}^2\#\dots\#\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ 의 오일러 특성수를 계산할 수 있다.

$$\therefore \chi(\underbrace{\mathbb{R}\mathbf{P}^2\#\dots\#\mathbb{R}\mathbf{P}^2}_{m\text{개}}) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \beta_j = 1 - (m - 1) + 0 = 2 - m$$

3.4 포앙카레-호프 지표정리에 의한 오일러 특성수 계산

3.4.1 벡터장(vector field)의 지표(index)계산

벡터장 $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 이 $v(0) = 0$ 일 때 다음과 같이 정의된 벡터장을 그릴 수 있고 각각의 벡터장에 대하여 지표의 정의로 부터 각각의 지표를 계산 할 수 있다.

- (1) $v(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ 이면 그림 4와 같이 v 는 0으로부터 뻗어나가는 원천(Source)를 얻을 수 있다.
- (2) $v(x, y) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ 이면 그림 5와 같이 v 는 0으로 들어가는 흡입(Sink)를 얻을 수 있다.
- (3) $v(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ 이면 그림 6과 같이 v 는 안장점(Saddle)을 얻을 수 있다.

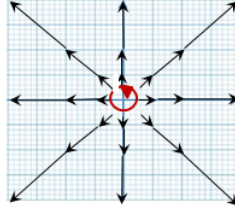


그림 4: Source $\text{ind}_0(v) = 1$

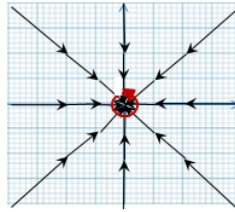


그림 5: Sink $\text{ind}_0(v) = 1$

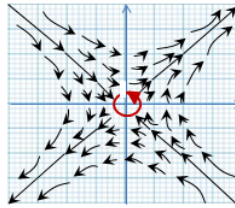


그림 6: Saddle $\text{ind}_0(v) = -1$

3.4.2 벡터장을 이용한 포앙카레-호프 지표정리의 오일러 특성수 계산

컴팩트 다양체 X 위에 삼각화를 T 라 하자. 삼각형 T 의 각각의 단체의 중심이 영점인 TX 에 속하는 벡터장 V_T 를 만들 수 있다. 각 단체의 중심에 있는 점에서 높은 차원의 단체에서 낮은 차원의 단체로 벡터장을 만들어주면 다음 그림과 같다. 닫힌연결곡면에서의 각각의 단체의 중심은 벡터장의 영점이다. 이때 꼭짓점의 영점에서의 행동은 흡입(Sink)이고 지표 1, 모서리의 중심인 영점에서의 행동은 안장점(Saddle)이고 지표 -1, 면의 중심인 영점에서의 행동은 원천(Source)이고 지표 1 을 가진다. 삼각화에 의한 닫힌연결곡면 X 의 오일러 특성수는 포앙카레-호프 지표정리에 의해

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \sum_{v(x)=0} \text{ind}_x(v) \\ &= \sum_{i=0}^2 \text{ind}_{c_n} V_T \quad (c_n \text{ 는 } n\text{ 단체의 중심}) \\ &= \sum_{i=0}^2 (-1)^i n_i = V - E + F \quad (n\text{ 단체는 } i\text{ 차원}) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

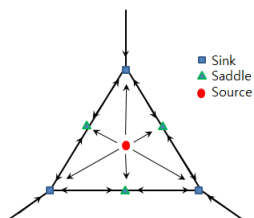
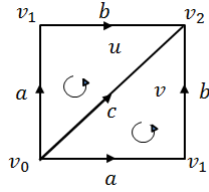


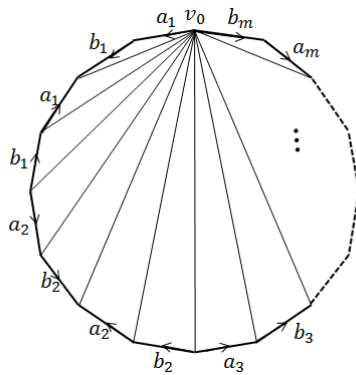
그림 7: 삼각형에서의 벡터장

(1) S^2 의 오일러 특성수 계산



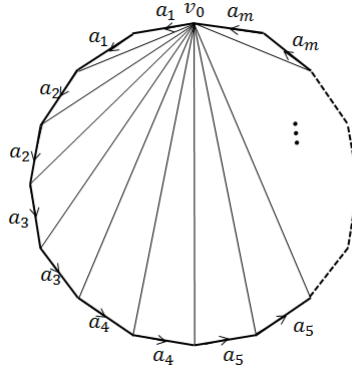
	꼭짓점(v)	변(e)	면(f)	$\chi(X)$
	Sink (+1)	Saddle (-1)	Source (+1)	
개수	3	3	2	$V - E + F = 2$
index	3	-3	2	$\sum_{v(x)=0} \text{ind}_x(v) = 2$

(2) $\underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{m \text{개}}$ 의 오일러 특성수 계산



	꼭짓점(v)	변(e)	면(f)	$\chi(X)$
	Sink (+1)	Saddle (-1)	Source (+1)	
개수	1	$6m-3$	$4m-2$	$V - E + F = 2-2m$
index	1	$-6m+3$	$4m-2$	$\sum_{v(x)=0} \text{ind}_x(v) = 2 - 2m$

(3) $\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2}_{m \text{개}}$ 의 오일러 특성수 계산



	꼭짓점(v)	변 (e)	면 (f)	$\chi(X)$
	Sink (+1)	Saddle (-1)	Source (+1)	
개수	1	$5m-3$	$4m-2$	$V - E + F = 2-2m$
index	1	$-5m+3$	$4m-2$	$\sum_{v(x)=0} \text{ind}_x(v) = 2 - m$

제 4 장

결론

중학교 교과서에서 볼록 다각형에 대해 $V - E + F$ 로 정의한 오일러 특성수(Euler characteristic)를 보다 일반적인 정의로 확장하였고, 오일러 특성수를 정의하는 다양한 방법에 대하여 살펴 보았다. 특히, 닫힌 2차원 곡면에 대한 오일러 특성수를 서로 다른 정의를 이용하여 계산하여 보았고 이들이 서로 같은 값을 줌을 확인하였다.

이로부터 같은 수학적 대상을 다루는 방법이 다양할 수 있음을 알게 되었고, 이들이 서로 같다는 것을 계산함으로써 이와같은 수학적 표현의 다양성이 같은 대상을 서로 다른 관점에서 표현할 수 있는 능력을 길러주는데 도움이 되었다.

이 논문을 통하여 오일러 특성수라는 아주 단순한 위상적 불변량이 갖는 다양한 모습들을 관찰하고 이해할 수 있었다.

참고 문헌

- [1] W. S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer (1991)
- [2] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall (1974)
- [3] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)
- [4] 우정호, 박교식, 이경화, 김남희 외 6인, *중학교 수학 1*, 두산동아 (2009)
- [5] J. Fraleigh, *Abstract Algebra (7th edition)*, AddisonWesley (2003)

Abstract

A research on various definitions of Euler characteristic of surfaces

Ju-young Kim

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education

Sungshin Women's University

Supervised by Ki-Heon Yun , Ph. D.

Euler characteristic is one of the simplest topological invariants. In the thesis, we studied various definitions of Euler characteristic and we computed the Euler characteristic of closed surfaces by using the given definitions.

Keywords : Euler characteristic, closed surface