

강병개 教授指導
碩士學位 請求論文

고등학교 수학교과 과정에서
무한개념의 이해

2012 年

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

윤지연

고등학교 수학교과 과정에서
무한개념의 이해

강병개 教授指導

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

2012 年 5 月

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

윤지연

認 准 書

윤지연의 碩士學位 論文을 認准함

審査委員 _____ 印

審査委員 _____ 印

審査委員 _____ 印

2012 年 5 月

誠信女子大學校 教育大學院

논문개요

수학에서 다루는 무한의 개념은 수열과 함수의 극한, 연속함수와 미분, 적분 이론의 기초가 되므로, 무한에 대한 올바른 이해는 매우 중요하다. 그러나 고등학교 과정에서 극한이나 미분, 적분의 정확한 정의를 다루는 것은 학생들의 성취수준을 고려할 때 무리가 있는 것이 사실이다. 따라서, 고등학교 과정에서 무한의 개념은 보다 직관적인 의미에서 도입되며 그 결과 극한이나 미분, 적분 단원에서는 학생들로 하여금 개념혼동 및 여러가지 오류를 범할 수 있는 요인들이 있었다.

따라서 본 논문에서는 먼저 무한 개념의 역사적 배경과 미적분학에서 다루는 무한의 개념을 알아보고, 무한의 일반적 정의와 현재 고등학교 교육과정에서의 다루고 있는 정의를 비교해 보았다. 또 학생들이 보다 효과적으로 무한의 개념을 이해하기 위한 방안에 대해 생각해 보았다.

연구 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 학생들이 극한을 직관적으로 이해할 수 있게 하되 오류를 범하거나 혼동을 일으킬 수 있는 부분에 대해서는 충분한 설명과 다양한 예시를 보여주어야 한다.

둘째, 고등학교에서는 미분과 적분을 계산하는 기능적인 측면에 초점을 두고, 논리적 전개는 내용을 이해하는 수준에서 다루어져야 한다.

셋째, 지속적으로 교수·학습 방법을 개선하여 학생들의 무한에 대한 사고의 폭을 넓힐 수 있도록 해야 한다.

차 례

논문 개요	i
I 서론	1
II 무한 개념의 역사적 배경	3
II.1 고대 그리스에서 무한의 개념	3
II.2 Galileo Galilei (1564 ~ 1642년)	6
II.3 Cantor (1845 ~ 1918년)	7
III 미적분학에서 다루는 무한의 개념	9
III.1 Eudoxus의 실진법	9
III.2 17세기의 구적법	10
III.3 미적분학과 관련된 극한의 개념	12
III.4 무한에 대한 엄밀성의 결여가 미적분학에 미친 영향	15
IV 무한의 일반적 정의와 고등학교의 정의 비교	19
IV.1 무한집합	19
IV.2 수열과 함수의 극한	20
IV.3 연속함수와 미분	26
IV.4 적분(구분구적법)	32

V	결론 및 제언	36
	참고문헌	39
	ABSTRACT	42

I 서론

무한이란 개념은 수학, 신학 및 철학을 비롯한 여러 분야에서 서로 다른 의미로 쓰이며 수, 양, 공간, 시간 따위에 제한이나 한계가 없음을 말한다.

수학에서 무한을 어떻게 다루어야 하는지에 대한 논의는 대체로 그리스 시대에 시작되었다고 볼 수 있다. 잘 알려진 바와 같이 Zenon의 역설 안에는 ‘한없이 쪼갬다’, ‘한없이 더한다’는 의미의 무한이라는 개념이 포함되어 있다. Zenon의 역설은 인간의 역사에 “무한을 어떻게 다룰 것인가”에 대한 커다란 과제를 남겼는데, 이에 관한 논의는 18세기 이후 미분과 적분의 개념이 등장하면서 본격적으로 이루어지게 된다.

Aristoteles는 Zenon의 역설을 극복하고자 하는 과정에서 ‘실제적 무한’과 ‘잠재적 무한’의 차이를 처음으로 제시하였으며 잠재적 무한의 초석을 마련하였다. 잠재적 무한은 가능성 존재로서의 무한으로 아무리 나가도 지나온 과정이 유한하고 최종의 상태에 존재할 수 없으므로 계속 커질 수 있으나 그 존재를 갖지 않는 무한을 의미하고, 실제적 무한은 완성된 형태의 무한으로 하나의 완결된 ‘것’으로서 어딘가에 존재하는 무한을 의미한다.

중세를 거치며 많은 수학자들이 ‘실제적 무한’과 ‘잠재적 무한’을 연구하였지만 18세기까지 여전히 매우 큰 수와 무한한 수 사이의 구별이 이루어지지 않았다. 또한 19세기 수학 교재에서 미분 및 무한소와 같은 용어를 사용하면서도 그 의미가 정확하게 정의되지 않아 학생들의 혼란을 가중시켰다.

미적분학에서 가장 접근하기 어려운 개념은 ‘한없이 가까이 간다’와 같이 무한히 접근하는 것을 어떻게 식으로 나타내느냐의 문제이다. Newton과

Leibnitz도 이 개념을 명확하게 정의하지 못했으며, 일부는 직관에 의지할 수밖에 없었다. 함수의 극한과 연속, 미분의 현대적 정의는 Cauchy에 의하여 얻어졌는데, 이것을 흔히 $\varepsilon - \delta$ 법이라고 부른다. 이 정의에서는 Newton이 말하는 ‘한없이 접근할 때’와 같은 애매한 표현이 들어 있지 않다. 그는 $\varepsilon - \delta$ 법으로 극한 개념을 정의하고 이를 기초로 하여 함수, 극한, 연속, 도함수, 적분 등 미적분학의 기본 개념을 정의하고 성질들을 확립해 나갔다.

앞서 언급하였듯이 무한에 대해 이해를 하고 이를 수학적으로 표현하는 것은 상당히 어려운 일이다. 고등학교 과정에서 극한이나 미분, 적분의 정확한 정의를 다루는 것은 무리가 있는 것이 사실이다. 이들 개념은 무한을 수학적으로 다루는 것과 밀접한 관계가 있는데, 단순히 ‘한없이 크다’, ‘한없이 작다’의 개념만으로는 설명할 수 없다는 것이 이들을 교육하는 한계라고 말할 수 있다. 그러나 무한이 매우 다루기 어려운 개념이라는 사실, 그동안 수학의 역사에서 가장 논란이 큰 개념이 무한을 다루는 문제 였다는 사실, 그동안 이 문제를 극복하기 위하여 인류가 기울여왔던 노력 등을 소개하는 것은 얼마든지 가능해 보인다.

따라서 본 논문에서는 먼저 무한 개념의 역사적 배경과 미적분학에서 다루는 무한의 개념을 알아보고, 무한의 일반적 정의와 현재 고등학교 교육과정에서 다루고 있는 정의를 비교해 보고자 한다. 또 여기에서 무한을 수학적으로 다루는 것에 대한 어려움과 이로 인해 학생들에게 야기될 수 있는 혼란에 대해 언급하고, 학생들이 보다 효과적으로 개념을 이해하기 위한 방안을 제시하고자 한다.

II 무한 개념의 역사적 배경

수학에서 무한을 어떻게 다루어야 하는지에 대한 논의는 대체로 그리스 시대에 시작되었다고 볼 수 있다. 그것은 물질을 한없이 자르면 궁극적으로 어떤 것이 남을까하는 Democritos의 원자론으로부터 시작되었다.

이 장에서는 수학에서 다루는 무한 개념의 역사적 배경을 알아본다.

II.1 고대 그리스에서 무한의 개념

(1) Zenon (BC 490? ~ BC 430?)의 역설(Paradox)

기원전 5세기에 제논은 운동과 연속성에 대한 몇 가지 역설을 제시하였는데 이는 다음과 같다.

① 이분법의 역설 ('경주자는 결코 경주를 마칠 수 없다')

움직이는 물체는 일정한 거리에 도달하기 전에 먼저 그 거리의 반을 가야만 한다. 그러나 그 물체는 반에 도달하기 전에 처음 거리의 $\frac{1}{4}$ 을 가야하고, 역시 그 전에 처음의 $\frac{1}{8}$ 지점에 도달해야 한다. 이런식으로 물체는 무한개로 나뉘어진 작은 부분에 도달해야 한다. 즉 경주자가 경주를 마치기 위해서는 유한 시간 안에 무한 지점에 도달해야 하는 것이다. 그러나 무한히 많은 지점을 모두 거치는 것은 불가능하므로 이 경주자는 결코 경주를 마칠 수 없다.

② 아킬레스의 역설 ('아킬레스는 거북이를 절대 따라잡을 수 없다')

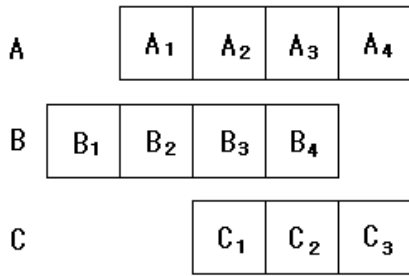
아킬레스가 먼저 출발한 거북이와 경주를 할 경우, 아킬레스가 빨리 달리고 거북이가 늦게 달린다고 해도 아킬레스는 결코 거북이를 따라 잡을 수 없다. 왜냐하면 거북이가 간 지점에 아킬레스가 다다르면 거북이는 조금 더 앞서 나가 있기 때문이다. 또 거북이가 앞서 나간 그 거리까지 아킬레스가 뛰어갔을 때 거북이는 조금 더 앞으로 나가 있을 것이다. 이 과정은 한없이 계속될 것이기 때문에 아무리 빠른 아킬레스라도 느린 거북이를 절대 따라잡을 수 없다.

③ 화살의 역설 ('날아가는 화살은 정지하고 있다')

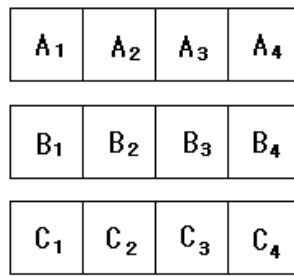
움직이는 화살이 어느 특정한 지점 A에 왔을 때, 화살은 그 위치에 순간적으로 정지하고 있다. 또 다른 특정한 지점 B에 왔을 때도 마찬가지로 B에 순간적으로 정지하고 있다. 또 C, D, E, ... 등 계속 그 위치에 순간적으로 정지하고 있다. 즉 날아가는 화살이 모든 순간에 정지하여 있고, 이런 일들은 순간적으로 연속하여 일어나는 것이지 화살이 움직이는 것이 아니다.

④ 경기장의 역설 ('임의의 시간은 그 반의 시간과 같다')

[그림 1-1]과 같이 크기가 같은 네개의 물체가 A, B, C 3개의 열이 있다. A는 정지해 있고, B는 오른쪽으로 움직이며, C는 왼쪽으로 B와 같은 속력으로 움직인다. 그러면 [그림 1-2]와 같이 나란히 서는 때가 존재한다. 이때 A에 대한 B의 속력은 C에 대한 B의 속력의 두배가 된다. 즉, B와 A가 스치는 시간은 B와 C가 스치는 시간의 반이 된다. 그러나 이 두가지 일은 동시에 일어난 것으로 그 시간은 같다. 따라서 어떤 시간은 그 반의 시간과 같게 된다.



[그림 1-1]



[그림 1-2]

이와 같은 Zenon의 역설은 시간과 공간에 관한 문제들로서 오랜 기간 동안 논의되었다. Zenon의 역설 안에는 ‘한없이 쪼갬다’, ‘한없이 더한다’는 의미의 무한이라는 개념이 포함되어 있다.

Zenon의 이와 같은 역설은 Democritos의 원자론과 함께 물질을 무한히 나누면 무엇이 될 것인지에 대한 의문을 제기하였다.

Zenon의 역설에서 드러나는 수학적 문제는 $a \div \infty$, $0 \times \infty$ 를 다루는 방법을 요구하고 있으며, 아킬레스와 거북의 문제는 무한급수의 원리를 어떻게 할 것인지에 대한 문제제기로 볼 수 있다. 그러나 그 당시에는 이와 같은 무한의 문제를 다룰 수 있는 적극적인 방안이 검토되지 않았다.

(2) Aristoteles (BC 384 ~ BC 322)

그리스의 무한론을 완성시킨 Aristoteles는 무한을 잠재적 무한과 실제적 무한으로 구분하였다. 잠재적 무한은 ‘가능적·과정적’ 의미의 무한을 뜻하고, 실제적 무한은 하나의 완결된 것으로 ‘존재성’을 갖는 무한을 의미한다. 다시 말해서, 잠재적 무한은 아무리 나가도 지나온 과정이 유한하고 최종의 상태에 존재할 수 없으므로 계속 커질 수 있으나 그 존재를 갖지 않지만, 실제적 무한은 모든 유한량을 넘어선 그 자체로서 확정된 하나의 양

을 말한다. 예를 들어 지구의 나이를 생각해보자. 만일 지구가 특정 시점에서 생성되었다면 지구의 나이는 잠재 무한이다. 왜냐하면 어느 시점에서나 그 나이는 유한이지만 계속 늘어나기 때문이다. 자연수의 집합도 잠재적으로 무한하다고 볼 수 있다. 만일 100만에서 멈췄다면 그보다 하나 더 큰 수, 둘 더 큰 수 등을 생각할 수 있다. 그러나 만일 지구가 과거에 항상 존재했다면 지구 나이는 실제적 무한이다. 마찬가지로 자연수 집합은 하나의 총체적 존재로 파악하면 자연수 집합은 실제적 무한이다.[26]

이렇듯 무한을 ‘잠재적’ 혹은 ‘실제적’으로 보는지에 따라 차이가 존재하게 된다. Zenon의 역설에서도 무한의 개념을 ‘잠재적’ 혹은 ‘실제적’으로 보는지에 따라 다르게 해석할 수 있다. 당시 Zenon의 역설을 해결하고자 노력하였던 Aristoteles는 ‘잠재적’의미에서 선분을 무한 분할하면 점에 도달할 수 없지만, ‘실제적’의미에서는 점에 도달할 수 있다고 생각했다. 그러나 존재하는 이상 일정한 크기를 지녀야 하고 일정한 크기를 지닌다면 유한이 되어야 하기 때문에 Zenon의 역설은 해결할 수 없다고 생각했다. 따라서 Aristoteles는 학문적으로 인정되는 무한 개념은 잠재적 무한으로 제한시켜 이 역설을 피하려 했고, 무한 개념에 대해 잠재적 무한만을 마지못해 인정하는 소극적인 태도를 취했다.[20]

II.2 Galileo Galilei (1564 ~ 1642년)

Galilei는 수학적으로 깊이 있게 실제적 무한을 다루었던 사람이였다. 그는 유한과 무한의 차이에 주목하여 공간은 더 이상 쪼갤 수 없는 ‘불가분자’인 무한소로부터 이루어졌다고 주장하였는데 이것은 실제적 무한을 인정한 것이다. Galilei는 유한적인 개념이 무한의 경우에는 통하지 않는 다

는 것을 ‘갈릴레이의 역설’을 통해 설명하였다. Galilei는 자연수 전체와 그 일부인 제곱수 전체의 개수가 같다는 것을 다음과 같이 보여준다.

1	2	3	4	5	6	7	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...
1	4	9	16	25	36	49	...

자연수와 제곱수는 위와 같이 일대일 대응이 되고, 따라서 자연수 전체와 그 일부인 제곱수 전체의 개수가 같다는 것을 보여준다. 이것은 19세기 후반에 Cantor가 제시한 ‘기수(Cardinal number)’의 개념에 대한 기초를 제공하였다.

Galilei의 이러한 주장은 수학에서 실제적 무한을 최초로 다루었다는 역사적인 의미를 갖는다. 또한 무한집합을 유한집합처럼 다룰수는 없지만 무한이 부적합한 개념이 아니라는 것과 무한을 다룰때 유한한 것에 적용되는 것과는 다른 논리를 적용하여 접근해야 한다는 것을 말해주고 있다.

II.3 Cantor (1845 ~ 1918년)

Cantor는 무한을 수학적 대상으로 취급한 최초의 수학자이다. 무한을 존재하는 실체로 여긴 그의 이론은 수학적 실제적 무한의 역사에서 전환점이 된다. Cantor는 두 무한집합의 원소들의 일대일 대응에 초점을 맞추었다. 유한집합의 경우에 어떤 두 집합의 원소들이 서로 일대일 대응일 때 이 두 집합은 기수가 같다고 한다. 무한집합에 대하여도 같은 논법을 적용하여 두 집합 A, B가 일대일로 대응되면 두 집합은 대등(equipotent) 하다고 하

며, 대등한 두 집합의 기수는 같다고 정의한다. 예를 들면 다음과 같이 짝수와 자연수 사이에 일대일 대응을 만들 수 있다.

1	2	3	4	5	...
↓	↓	↓	↓	↓	...
2	4	6	8	10	...

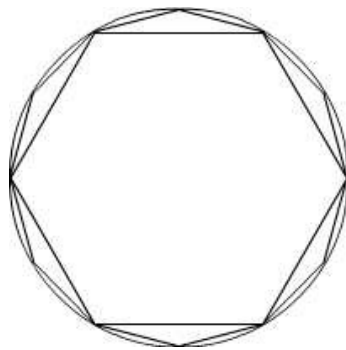
즉 각 자연수는 두 배를 하여 짝수에 대응시키고 짝수는 절반을 하여 자연수에 대응시킨다. 이 경우 짝수의 집합은 자연수 전체의 집합과 기수가 같다. 따라서 Cantor는 두 집합이 동일한 수의 원소를 갖는다고 결론지었다.

Cantor는 유한집합의 기수와 어느 정도 비슷한 논법으로 무한집합을 집합의 ‘기수(cardinal number)’에 따라 단계적으로 분류하는 방법을 설명했다. 하지만 Cantor의 무한 집합 이론은 큰 논란을 불러일으켰다. 자연수 집합 전체가 그 집합의 일부분과 일대일 대응을 이룬다는 사실을 불합리하게 여긴 일부 수학자들은 실제적 무한 집합과 그것을 이용한 이론을 받아들이려 하지 않았다. 그러나 Cantor는 단념하지 않았다. 그는 무한을 생각해 나가는 것이 아니라 실제로 존재하는 무한인 실제적 무한으로 인식하였다. 또한 그는 무한집합의 기수, 서수(ordinal number)를 고찰의 대상으로 삼고 기수의 비교나 덧셈, 곱셈 등을 정의하였다.

III 미적분학에서 다루는 무한의 개념

III.1 Eudoxus의 실진법

수학자들은 오래 전부터 도형의 넓이나 선의 길이를 구하는 문제에 관심을 가졌다. 기원전 4세기 그리스의 Eudoxos는 오늘날의 구분구적법에 가까운 ‘실진법(悉盡法, method of exhaustion)’을 처음 사용하였다. 실진법이 사용되기 이전에 원의 넓이는 그 원에 정다각형을 내접시켜 변의 수를 한없이 늘려 근사시킬 수 있다고 쉽게 생각되었다. 실진법이란 임의의 어떤 양에서 반 이상을 없애고, 그 나머지에서 그 반 이상을 없애고, 이런 과정을 계속하면 결국에는 주어진 양에서 어떠한 작은 양보다도 더 작은 어떤 양이 남는다는 것이다.[12] 예를 들면 [그림 2]와 같이 원의 넓이를 구할 때 원에 적당한 정다각형을 내접시키고, 이것과 원의 면적의 차가 어떤 양보다 작아진다는 것을 보여주는 것이다. 실진법은 곧 극한에 해당한다.

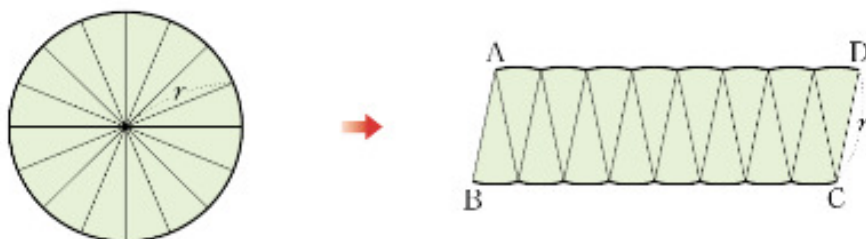


[그림 2]

Eudoxos의 실진법을 통해 처음으로 원의 넓이의 증명에 관한 엄밀한 절차가 만들어는데, 당시에는 극한의 개념이 확립되지 못한 시기이기 때문에 실진법 증명의 타당성 여부에 논란이 많았다. 그러나 Eudoxos는 이러한 논리를 이용하여 원뿔의 부피가 원기둥 부피의 3분의 1이라는 것을 밝혀냈다. 또한 Archimedes는 Eudoxos의 논리를 토대로 도형을 내접시킬 뿐만 아니라 외접시키는 방법도 병행하여 원하는 측도와 내접, 외접된 도형의 넓이와의 오차를 줄임으로써 넓이나 부피를 구하기도 하였다. 그는 이와 같은 방법으로 구의 표면적이나 π 의 근사값을 구하는 고전적인 계산법을 고안해냈다.

III.2 17세기의 구적법

오늘날의 구분구적법과 같은 방법을 처음 발전시킨 사람은 16세기 말 독일의 Kepler이다.



[그림 3]

그는 [그림 3]에서 보듯이 원의 중심을 꼭지점으로 하는 무한히 가늘고 긴 삼각형의 높이가 반지름과 같다는 것을 이용하여 원의 넓이를 구하였다.

원둘레 위에 있는 무한히 작은 밑변을 각각 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 이라 하면, 원의 넓이는 작은 삼각형의 넓이의 합이므로 $\frac{1}{2}a_1r + \frac{1}{2}a_2r + \dots + \frac{1}{2}a_nr + \dots$ 이 된다. 또한 각각의 a 의 합은 원둘레 l 이므로 원의 넓이 S 는 $S = \frac{1}{2}rl$ 로 표현할 수 있다. 이것은 고대의 Archimedes가 더 상세하게 증명한 유명한 계산이기도 하다. Kepler는 이와 같은 방법으로 타원의 넓이를 구하기도 하였다.[12]

또한 Kepler는 당시 포도주통의 부피 계산에 쓰이던 당시의 방법을 수정하기 위하여 부피 측정에 대한 연구를 시작하였다. 그는 Archimedes도 다루지 않았던 여러 회전체의 부피도 계산하였는데, 그가 입체의 부피를 구했던 방법은 입체가 무한개의 무한소 부분으로 이루어져 있다는 생각에서 비롯되며, 이는 앞에서 언급한 타원의 넓이 구하는 경우의 거의 같다.

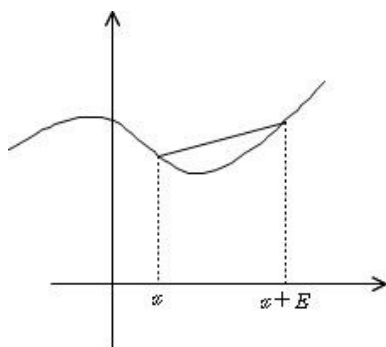
비록 그전의 수학자들이 구분구적법을 생각하지 않은 것은 아니었지만 Kepler는 ‘무한소 해석’의 방법으로 구분구적법을 더욱 정교화하였다. 이것은 아무리 작은 값이라도 양을 갖는 것은 무시될 수 없다는 종전의 주된 생각에 반해 무한번의 계산 과정에서 점점 작아지는 아주 작은 양은 무시될 수 있다는 Kepler의 생각을 의미한다.

Galilei의 제자였던 Cavalieri는 Kepler의 『포도주 통의 부피 계산』에 자극을 받아 무한소에 대한 자신의 생각과 고대 및 중세의 무한론의 영향에 대한 내용을 한권의 책으로 정리하였다. 그의 저서 『불가분량의 기하학』에서는 Kepler의 생각이 체계적으로 확대되어 있다. Cavalieri는 영역을 더 이상 나눌 수 없는 단위 영역들의 무한 합으로 보았다. 그리고 더 이상 나눌 수 없는 단위 영역을 그는 분할 불가능 영역이라고 불렀으며 아마도 그것은 선이 될 것이라고 생각했다. 그는 『여섯 가지 기하학 문제』라는 자신의 책에서 목걸이가 구슬로 만들어져 있고 옷감이 실로 짜여 있듯이, 또 책이 수백쪽으로 이루어져 있듯이, 영역은 분할 불가능 영역으로 이루어

져 있다고 ‘설명’했다. 이러한 개념을 이용해 그는 두 개의 넓이나 두 개의 부피를 비교할 수 있었고, 또 이 둘 사이의 올바른 관계도 얻어 낼 수 있었다.[11]

III.3 미적분학과 관련된 극한의 개념

도함수를 수학적으로 체계화한 사람은 Fermat이다. 그는 $y = f(x)$ 형태의 다항식 곡선에서 함수가 극대값 또는 극소값을 취하는 점을 발견하는 방법에 주목하였다. 이 방법은 다음과 같다.



[그림 4]

어떤 점에서 $f(x)$ 의 값과 $f(x + E)$ 의 값을 비교하면 두 값은 분명히 다르지만 매끄러운 곡선의 꼭대기 또는 밑바닥에서 두 값의 차이는 아주 작게 된다. 따라서 극대점과 극소점을 찾기 위해서 Fermat는 비록 정확하게 일치하지는 않지만 두 값이 거의 같다고 생각하고, $f(x) = f(x + E)$ 로 놓았다. 이 때 두점 사이의 간격 E 가 작아질수록 등식과 비슷한 이 식은 참인 등식에 점점 가까워진다. 그래서 Fermat는 E 로 전체를 나눈 뒤 $E = 0$ 이라

고 놓아 다항식의 극대점 및 극소점의 좌표를 얻었다. 페르마의 설명이 완전하지는 않지만 결국

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E} = 0$$

을 만족하는 x 에서 극대나 극소를 구할수 있다는 점에서 본질적으로 오늘날 미분을 이용한 극대, 극소를 찾는 방법과 같다.

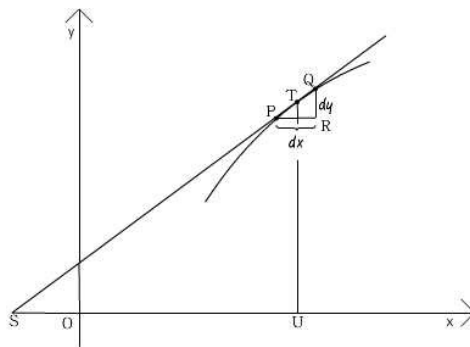
또한 Fermat는 위의 방법을 응용하여 접선을 구하는 방법도 발견하였다. 그러나 그는 이 과정을 충분히 설명하지 않았고 다만 극대점과 극소점을 구하는 방법과 비슷하다고만 서술하였다.

미적분학의 탄생에 가장 큰 공헌을 한 사람은 Newton과 Leibniz이다. Newton은 도함수를 매우 심도있게 사용하였는데, 도함수를 얻는 방법은 페르마와 본질적으로 동일했다. 1676년에 Newton은 미적분에 관한 논문 『곡선의 구적에 관하여』에서 무한히 작은 양이나 유량이라는 표현 대신에 그는 ‘증가하기 시작한 증분에 대한 최초의 비(prime ratio)’, ‘소멸하기 시작한 증분에 대한 마지막 비(ultimate ratio)’와 같은 표현을 사용했다. 또한 『자연철학의 수학적 원리』 제1판과 제3판에서 다음과 같이 말하였다.[13]

“사라져 가는 양들의 궁극적 비는 엄밀하게 말해서 궁극적 양의 비가 아니라 한없이 작아지는 이 양들의 비가 근접해 가는 극한값이다. 어떤 수치가 주어지더라도 그 수치 이내로 가까워지지만 그렇다고 해서 이 양들이 무한정 작아지기 전에 극한값을 지나거나 도달할 수 없다.”

여기서 그는 ‘극한’이라는 핵심 용어를 언급하였지만 그 개념을 더 자세히 다루지는 않았다.

한편 미적분학의 또 다른 발명자인 Leibniz의 연구에서도 극한 개념의 윤곽이 희미하게 나타나고 있다. Leibniz는 곡선 위의 점 P, Q 가 서로 ‘무한히 가까울’ 때 두점의 x 좌표의 차이를 dx 로 y 좌표의 차이를 dy 로 정의하였다. 이때 아래 [그림 5]와 같이 점 T 에서의 접선은 호 PQ 와 일치한다. 따라서 dy 를 dx 로 나눈 값은 접선의 기울기가 된다.[11] 그는 여기서 암묵적으로 극한 개념을 사용하여 미분양들의 비를 다루고 있다.



[그림 5]

Newton과 Leibniz의 극한의 개념의 그것이 수학적으로 엄밀하게 정의되지 않았기 때문에 논리적으로 결함이 있었다. 그것은 Newton도 어느 정도 인정하고 있었다. 그는

“양이 없어지기 전까지는 그 비가 궁극적이라 할 수 없기 때문에 사라져 가는 양의 궁극적인 비란 존재하지 않는다고 반대할 사람이 있을 것이다.”[11]

고 밝힘으로써 자신의 견해가 다른 사람들에 의해 받아들여 지지 않을 수도 있음을 인정했다.

또한 Leibniz는 적분을 설명하면서 유한합에서 무한합으로 가는 과정을 명확하게 하지 않아서 Jakob Bernoulli (1654 ~ 1705)와 Johann Bernoulli (1667 ~ 1748)로 부터 "설명이라기 보다는 알 수 없는 수수께끼"라는 혹평을 듣는다.

III.4 무한에 대한 엄밀성의 결여가 미적분학에 미친 영향

미적분학을 새로운 분야로 확대하면서 새로운 개념과 방법론이 출현했고 그에 따라 엄밀화의 문제는 더욱 복잡해졌다. 뉴턴, 라이프니츠, 오일러, 라그랑주, 그리고 그 밖의 18세기 학자들은 무한 급수라는 문제에 대해 많은 실수를 범했으며 잘못된 증명과 옳지 않은 결론을 내놓았다. 예를 들어 함수 $\frac{1}{1+x}$ 은 $(1+x)^{-1}$ 으로 나타낼 수 있다. 여기에 이항정리를 적용하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$x = 1$ 일 때, 위의 식은 다음과 같이 바뀐다.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

이 급수를

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

로 쓰면 합은 0이 되어야 한다. 그러나 급수를

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

로 쓰면 합은 1이 된다. 게다가 S를 급수의 합이라고 하면

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

이고, 이것은

$$S = 1 - S$$

라고 표현 할 수 있으므로 결과적으로 $S = \frac{1}{2}$ 라는 값을 얻게 된다.

Leibniz는 위와 같은 무한 급수에서 첫째 항까지의 합을 택하고, 그 다음에 두번째 항까지의 합을 택하고, 다시 세번째 항까지의 합을 택하는 일련의 과정을 반복하면 $1, 0, 1, 0, \dots$ 를 얻으므로 이러한 급수의 합은 1과 0이 된다고 생각하였다. 또한 1과 0의 가능성의 정도가 똑같으므로, Leibniz는 두 값의 산술 평균인 $\frac{1}{2}$ 을 급수의 합으로 택해야 한다고 주장하였다.

미적분학 및 무한 급수를 비롯한 여러 해석학 분야의 모순을 접하며 수학자들은 미적분학의 논리적 기초에서 드러난 문제점들을 수정하고자 하였다. 이처럼 18세기 미적분학의 엄밀성에 대한 논란이 증폭되는 가운데 Lagrange 등에 의하여 해석학의 엄밀화 운동이 시작되었다. 이러한 운동의 일환으로 Lagrange는 Fourier의 삼각급수론을 엄밀성이 결여되었다는 이유로 심사에서 탈락시키기도 하였다.

베를린 과학학술원 수학 분과에서는 Lagrange의 제안에 따라 무한에 대한 문제에 가장 뛰어난 해결책을 제시한 사람에게 상을 수여하겠다고 발표하였는데, 그 발표문 중 일부는 다음과 같다.[11]

“우리 학술원은 모순된 가정에서 어떻게 올바른 정리가 그토록 많이 유도되어 나올 수 있었는지 설명할 수 있는 사람을 찾고자 하며, 아울러 무한을 대체할 수 있는 참된 수학적 원리도 명확히 확립해 주기를 요망한다. 단 지나치게 난해한 방식을 사용하거나 내용이 장황해서는 안 된다. 그리고 최대한의 일반성과 엄밀성, 명료성, 단순성을 갖추어야 한다.”

그 결과에 대한 공식 발표는 다음과 같았다.

“우리 학술원은 만족할 만한 응답을 얻어 내지 못했다고 생각한다. 하지만 “무한은 인간 정신을 삼켜 버린 심연이다”라는 부제를 단 프랑스어 논문의 저자가 우리 학술원의 의도에 가장 근접해 있다. 따라서 우리 학술원은 그에게 상을 수여하기로 결정했다.”

이처럼 18세기 수학자들은 미적분학의 기초를 확립하고자 노력하였으며, 그들 중 몇몇은 올바른 방향을 설정하기도 하였다. 그러나 여전히 매우 큰 수와 무한한 수 사이의 구별이 이루어지지 않았으며, 임의의 유한한 수에 대해 성립하는 정리는 무한한 수에 대해서도 당연히 성립한다고 생각하였다. 또한 증분의 비는 도함수로 대체 되었고, 유한 항의 합과 적분은 전혀 구분하지 않는 등 까다로운 문제들은 무시하거나 간과 되었다.

또한 19세기 수학 교재에서 미분 및 무한소와 같은 용어를 사용하면서도 그 의미를 정확하게 설명하지 않아 학생들의 혼란을 가중 시켰다. 이러한 분위기 속에 Cauchy는 미적분학의 엄밀화 운동을 시작하였는데, 그는 극한 개념을 기초로 하여 함수, 연속, 도함수, 적분 등 미적분학의 기본 개념을 정의하고 성질들을 확립해 나갔다. 이로써 미적분학에서 가장 접근하기 어려운 개념인 ‘한없이 가까이 간다’와 같이 무한히 접근하는 것을 어

떨개 식으로 나타내느냐의 문제는 Cauchy에 의해 해결 되었다. Cauchy에 의하여 얻어진 함수의 극한과 연속, 미분의 현대적 정의는 흔히 $\varepsilon - \delta$ 법이라고 부른다.

이것은 함수 $f(x)$ 와 실수 L 이 있을때, 임의의 양수 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 적당한 양수 $\delta > 0$ 가 존재하여

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

을 만족하면 x 가 x_0 에 접근할 때 $f(x)$ 의 극한값을 L 이라 하고

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

로 나타낸다.

이 정의에서 Newton이 말하는 ‘한없이 접근할 때’와 같은 애매한 표현이 들어 있지 않음을 알 수 있다.

IV 무한의 일반적 정의와 고등학교의 정의 비교

이 절에서는 무한집합, 수열과 함수의 극한, 연속함수, 미분과 적분을 중심으로 하여 고등학교 교과서에 기술된 정의를 소개하고, 이를 일반적 정의와 비교함으로써 무한을 수학적으로 다루는 것에 대한 어려움과 이로 인해 학생들에게 야기될 수 있는 혼란에 대해 언급하고자 한다.

IV.1 무한집합

무한집합은 중학교 1학년때 처음 접하게 되며, 고등학교 과정의 집합부분에서 다시 언급된다.

Pinter[25]에 의하면 무한집합에 대한 일반적 정의는 다음과 같다.

“집합 A 가 집합 $B = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 과 일대일로 대응되는 자연수 n 이 존재하면 유한집합(finite set)이라 하고, 유한집합이 아닌 집합을 무한집합이라고 한다.”

그러나 이러한 정의를 학생들이 이해하는 것은 대단히 어렵다. 또 중학교 1학년에게는 일대일 대응의 개념도 학습되지 않은 상황이다. 중학교 교과서에서도 먼저 유한집합을 정의한 후 유한집합이 아닌 집합을 무한집합이라고 설명하고 있다. 박종률 외[9]의 중학교 교과서에서 유한집합과 무한집합에 대해 정의하는 부분을 적어보면 다음과 같다.

다음과 같은 세 집합 A, B, C 가 있다.

$$A = \{x \mid x \text{ 는 우리나라 삼국시대 삼국의 명칭}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ 는 6의 배수}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ 는 1보다 작은 자연수}\}$$

집합 $A = \{\text{고구려, 백제, 신라}\}$ 는 원소의 개수가 3이다. 이와 같이 원소의 개수가 유한인 집합을 유한집합이라고 한다. 또, 6의 배수의 집합 $B = \{6, 12, 18, \dots\}$ 은 원소의 개수가 무수히 많다. 이와같이 원소의 개수가 무수히 많은 집합을 무한집합이라고 한다.

이 두 정의를 비교할 때, 중학교에서 일대일대응의 개념을 사용하지 않고 집합의 원소의 개수를 직접 헤아리는 방법으로 유한집합을 정의하고 있는데, 직관적이기는 하지만 일반적 정의에서 크게 벗어나지 않음을 알 수 있다.

IV.2 수열과 함수의 극한

(1) 수열의 극한

정동명 외[21]에 따르면 수열의 극한에 대한 일반적 정의는 다음과 같다.

수열 $\{x_n\}$ 에 대하여, 적당한 실수 x 이 존재해서 명제

「임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여, 이에 대응하는 적당한 자연수 $K(\varepsilon) = K$ 가 존재하여 $n \geq K$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $|x_n - x| < \varepsilon$ 이다.」

를 만족하면, 수열 $\{x_n\}$ 은 수렴한다, 또는 x 에 수렴한다고 말한다. 이때, x 를 $\{x_n\}$ 의 극한(limit)이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_n x_n = x \text{ 또는, 간단히 } \lim x_n = x$$

로 나타내며, 편의에 따라 “ $n \rightarrow \infty$ 일 때, $x_n \rightarrow x$ ”로 나타내기도 한다. 이때, 수열 $\{x_n\}$ 이 수렴하지 않으면, 그 수열은 발산한다(diverge)고 말한다.

황선욱 외[23]의 고등학교 교과서에서 무한수열의 극한값을 도입하는 부분을 적어보면 다음과 같다.

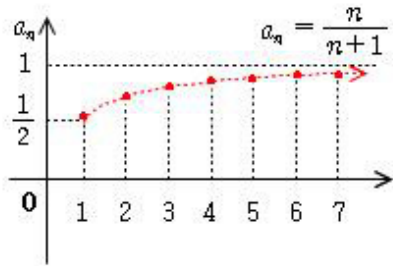
무한 수열 a_n 에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값이 일정한 값으로 가까이 가는 경우에 대해서 알아보자.

다음과 같이 주어진 두 수열 a_n, b_n 이 있다.

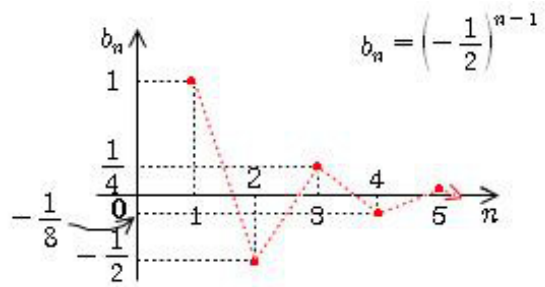
$$a_n : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$b_n : 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \dots$$

두 수열 a_n, b_n 에서 n 이 한없이 커질 때, 항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 6-1]



[그림 6-2]

위의 그림에서 n 이 한없이 커질 때, $\frac{n}{n+1}$ 의 값은 1에 한없이 가까워지고 $(-\frac{1}{2})^{n-1}$ 의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$ 에서 n 이 한없이 커질 때, $\{a_n\}$ 의 값이 일정한 값 α 에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$ 은 α 에 수렴한다고 하며, α 을 수열 $\{a_n\}$ 의 극한값 또는 극한이라고 한다. 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ 또는 } n \rightarrow \infty \text{ 일때 } a_n \rightarrow \alpha$$

이때, ∞ 는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호로 무한대라고 읽는다.

일반적 정의에서 다루는 극한에 대한 엄밀한 정의를 고등학교 학생들이 이해하는 것은 매우 어려운데, 사실 대학교의 수학과 학생들에게조차 이 정의는 매우 생소하고 당황스러운 것이 사실이다. 고등학교 교육과정 해설상의 『교수·학습 상의 유의점』에서도 수열의 극한에 관한 정의와 성질은 직관에 의하여 이해하는 수준으로 다루고, 무한수열의 수렴이나 발산은 그래프를 통해 직관적으로 예측해 보라고 언급하고 있다.

그러나 학생들이 수열의 극한값을 직관적으로 이해할 때에는 무한을 실제적 무한의 개념이 아닌 잠재적 무한의 개념을 토대로 하기 때문에 논리가 충분하지 않아서 여러가지 오류를 범할 염려가 있다. 예를 들어보자. 급수 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ 의 극한값으로 다음과 같은 경우가 나타날 수 있다.

$$S_1 : (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$S_2 : 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

$$S_3 : 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots = S = \frac{1}{2}$$

이러한 오류는 무한급수의 수렴, 발산에 대한 개념이 명확하게 확립되지 않아서 발생한 것이다.

또한 무한수열의 극한에서 극한값을 그래프를 통해 직관적으로 예측함으로써 발생하는 개념혼동으로 ‘진동’하는 수열을 들 수 있다.

대부분의 교과서에서는 무한수열 $\{a_n\}$ 의 수렴과 발산에 대해 다음과 같이 정리하고 있다.

- 1) 수렴 : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 일정한 값)
- 2) 발산 : $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ (양의 무한대로 발산)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ (음의 무한대로 발산)} \\ \text{진동} \end{cases}$

그러나 $(-\frac{1}{2})^n$ 는 진동하지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{1}{2})^n = 0$ 으로 수렴한다. 따라서 위와 같이 진동을 발산이라고 정리해놓을 경우 학생들에게 진동은 무조건 발산한다는 오개념을 형성할 수 있다.

황선욱 외[23]에서는 무한수열의 수렴과 발산에 대해 다음과 같이 정의하고 있다.

무한수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

(1) α 에 수렴하는 경우 : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 상수)

(2) 발산하는 경우

① 양의 무한대로 발산 : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

② 음의 무한대로 발산 : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

③ 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지 않는 경우

많은 교과서에서 진동하는 수열을 발산하는 수열의 한 종류로 기술한 것과 달리 황선욱 외[23]에서는 진동이라는 용어를 사용하지 않는다. 그 대신 발산하는 경우로 양의 무한대로 발산하거나 음의 무한대로 발산하거나, 양의 무한대나 음이 무한대로 발산하지 않는 경우라고 표현하고 있다. 이는 진동에 대한 정확한 정의를 제시함으로써 진동하는 수열이 모두 발산하는 것이 아니라는 사실을 명확히 언급하고 있다.

(2) 함수의 극한

강병개 외[1]에 의하면 함수의 극한에 대한 일반적 정의는 다음과 같다.

거리공간 (X, d) 에서 (Y, ρ) 의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 정의되고 한 점 $x_0 \in X$ 에 대하여 조건

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$$

을 만족하는 $b \in Y$ 가 존재하면 b 를 x 가 x_0 에 가까이 갈 때 함수 f 의 극한(limit)이라하고

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

로 나타낸다.

그러나, 이와 같은 극한의 엄밀한 정의를 고등학교에서 다루는 것은 학생들의 성취수준을 고려할 때 매우 어려운 것임에 틀림없다. 따라서, 고등학교의 극한의 개념은 보다 직관적인 의미에서 도입된다. 황선욱 외[24]의 고등학교 교과서에서는 함수의 극한에 대해 다음과 같이 정의하고 있다.

일반적으로 함수 $y = f(x)$ 에서 x 의 값이 a 가 아니면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 L 에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$ 는 L 에 수렴한다고 한다.

이때, L 을 x 의 값이 a 에 한없이 가까워질 때 함수 $f(x)$ 의 극한 값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

과 같이 나타낸다.

다른 교과서도 위의 정의와 대동소이한 극한의 정의를 사용하고 있다. 그런데 위의 정의에서 ‘한없이 가까이’와 같은 표현들은 상황에 의존하기 때문에 수학적으로 엄밀하다고 말할 수는 없다. 그러나 고등학교 교과서상의 정의는 학생들이 특별한 함수들의 극한을 인지하고 그 값을 구할 수 있기에는 충분히 명확하므로 고등학교 교과서에서 위와 같은 직관적 정의를 도입하는 것은 타당해 보인다.

IV.3 연속함수와 미분

(1) 연속함수

강병개 외[1]에서는 연속을 다음과 같이 정의하고 있다.

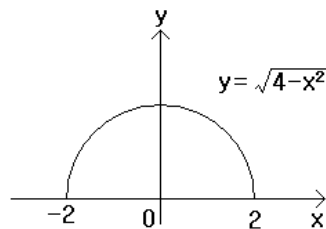
(X, d) 와 (Y, ρ) 가 거리공간이고 $A \subset X$ 라 하자.

함수 $f : A \rightarrow Y$ 가 $x_0 \in A$ 에 대하여

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x, x_0) < \delta, x \in A \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

을 만족할 때 함수 f 는 x_0 에서 연속(continuous)이라고 한다. I 의 모든 점에서 연속이면 $f : I \rightarrow R$ 은 집합 I 위에서 연속이라 한다. 만일 함수 f 가 모든 $x \in A$ 에서 연속이면 f 는 A 에서 연속이라고 하고, 연속함수로 부른다.

함수가 실수의 한 구간에서 연속이기 위한 필요충분조건은 구간의 모든 점에서 연속인 것이다. 예를 들면, [그림7]과 같이 주어진 그래프의 반원함수는 정의역이 $[-2, 2]$ 일 때 연속인 함수이다.



[그림 7]

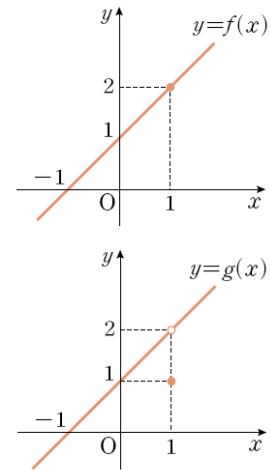
유희찬 외[17]의 고등학교 교과서에서는 연속함수를 다음과 같이 도입하여 정의를 내리고 있다.

함수 $f(x) = x + 1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이 성립하고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이

$x = 1$ 에서 연결되어 있음을 알 수 있다. 하

지만 함수 $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ 에서
 는 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq g(1)$ 이 성립하고, 그 그래프는

오른쪽 그림과 같이 $x = 1$ 에서 끊어져 있다.



[그림 8]

일반적으로 $I \subseteq R$ 이 실수의 한 구간일 때 고등학교에서 다루는 함수 $f : I \rightarrow R$ 의 연속의 정의는 다음과 같다.

함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 조건을 만족하면 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이라고 한다.

- i) $x = a$ 에서 정의되어 있고
- ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하며
- iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

그런데, $f : I \rightarrow R$ 이 함수이고 $a \in I$ 이므로 $f(a)$ 가 정의됨은 명백하다. 또 iii)이 성립하려면 $f(x)$ 가 존재해야 하므로 위의 i), ii), iii)은 사실 iii)만 있어도 된다. 즉 다음이 성립한다.

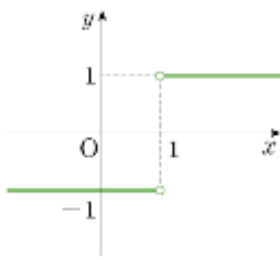
$$f : I \rightarrow R \text{ 이 점 } I \text{에서 연속} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

이것을 $\varepsilon - \delta$ 를 써서 나타내면,

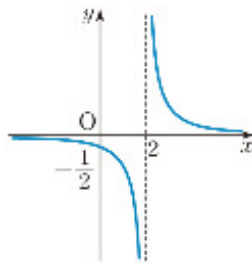
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |d(x, a)| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

과 같고, 강병개 외[1]의 정의와 일치함을 알 수 있다. 그런데 고등학교 교과서에서 i), ii), iii)을 함께 쓰는 것은 고등학교 학생의 수준에서 함수가 정의되는 것, 극한이 존재하는 것과 그 극한값이 $f(a)$ 와 같다는 것을 하나의 식으로만 나타내고 그것을 한꺼번에 이해하는 것이 어렵다는 판단 때문이다.

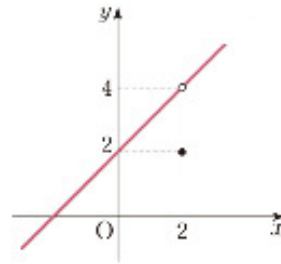
이를테면 고등학교 교과서에서 연속이 아닌 예를 다음 그림과 같이 제시하고 있다.



[그림 9-1]



[그림 9-2]



[그림 9-3]

위의 [그림 9-1]은 $f(a)$ 가 정의 되지 않는 경우로 조건 i)을 만족하지 않고, [그림 9-2]는 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하지 않는 경우로 조건 ii)를 만족하지 않는다. 마지막 [그림 9-3]은 $f(a)$ 가 정의 되고, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 있지만 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ 인 경우로 조건 iii)을 만족하지 않는다.

따라서 이 각각의 경우를 따로 다루어서 연속에 대한 개념을 파악하도록 할 필요가 있으므로 식 iii)만으로 연속을 정의하는 것은 무리가 있다.

(2) 미분

정동명 외[21]에서는 미분계수와 도함수에 대해 다음과 같이 정의하고 있다.

함수 $f : [a, b] \rightarrow R$ 에 있어서, 점 $c \in [a, b]$ 에 대하여 적당한 $L \in R$ 이 존재하여 명제

“임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 적당한 $\delta > 0$ 이 존재해서

$$0 < |x - c| < \delta, x \in [a, b] \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$$

이다.”

를 만족하면, 즉 극한

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

가 존재하면, f 는 점 $x = c$ 에서 미분가능(differentiable at c)하다고 하고 이때, 극한값 L 을 점 $x = c$ 에서의 f 의 미분계수(derivative of f at c)라고 하며 이를 기호로

$$f'(c) \text{ 또는 } Df(c)$$

로 나타낸다.

함수 $f : [a, b] \rightarrow R$ 에 있어서, 함수 f 가 미분 가능한 점 $x \in [a, b]$ 전체의 집합을 E 라고 하면, E 의 각 점 x 에 대하여 그 점에서의 미분계수 $f'(x)$ 를 대응시킬 수 있다. 여기서, 함수 f 에 대하여 새로운 함수 $g : E \rightarrow R$ 을 $g(x) = f'(x)$ 로 정의할 때, 이 함수

g 를 f 의 도함수(derived function of f , or derivative of f)라고 하고, 이를 기호로

$$f' \text{ 또는 } \frac{df}{dx}$$

로 나타낸다.

유희찬 외[17]에서는 미분계수와 도함수에 대해서 다음과 같이 정의하고 있다.

함수 $y = f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a + \Delta x$ 까지 변할 때의 평균 변화율은 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ 이다.

여기서, $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y = f(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능하다고 하고, 이 극한값을 함수 $y = f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 순간변화율 또는 미분계수라 하며, 기호로 $f'(a)$ 와 같이 나타낸다.

또한, 함수 $y = f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 모든 x 의 값에서 미분가능할 때, 함수 $y = f(x)$ 는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 특히, 함수 $y = f(x)$ 가 정의역에 속하는 모든 x 의 값에서 미분가능할 때, 함수 $y = f(x)$ 는 미분가능한 함수라고 한다. 일반적으로 함수 $y = f(x)$ 가 정의역 X 에서 미분가능하면 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여 미분 계수 $f'(x)$ 를 대응시키는 새로운 함수

$$f' : x \rightarrow f'(x) \text{ 즉, } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

가 존재한다. 이때, 함수 $f'(x)$ 를 $f(x)$ 의 도함수라 하고, 이것을 기호로

$$f'(x), y', \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

미분에 대한 정의는 일반적인 정의나 고등학교 교과서 상에서의 정의나 차이점은 없다. 그러나 극한에 대한 차이는 앞에서 언급한 것처럼 존재하므로, 학생들이 미분에 대해 인지는 직관적인 수준밖에 이르지 못한다.

앞서 역사적 배경에서 다룬 것처럼, 미적분학의 역사에서 미분과 적분의 엄밀한 정의가 없던 시대에 극심한 개념의 혼란과 계산상의 오류를 범했던 사실이 있다. 고등학교 과정에서 극한값이 다소 직관적으로 정의되었다는 사실은 고등학교 학생들도 이러한 개념의 혼란을 겪을 가능성이 매우 크다는 것을 말해준다.

예를 들면 교육과정에서는 다루지 않는 로피탈의 정리가 그 사용의 편리성 때문에 일부 교사 또는 학원 강사등에 의해서 학생들에게 가르쳐지고 있는데, 이는 자칫 위에서 언급한 개념의 혼란을 부추길 우려가 있다.

대부분의 학생들은 로피탈의 정리가 정확히 어떤 조건하에서 성립하는지, 그리고 왜 성립하는지에 대한 이유를 제대로 알지 못한 채 조건들만 기계적으로 암기하여 사용하거나, $\frac{0}{0}$ 꼴이나 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구할 때 조건에 대한 검토 없이 무분별하게 사용할 우려가 있다.

IV.4 적분(구분구적법)

라이프니츠는 리만 합의 극한으로 해석되는 정적분의 개념을 소개하였다. 그는 유한합 $\sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k$ 이 “무한히 적은”부분구간의 폭 d_x 와 함수값 $f(x)$ 의 곱이 무한합이 되는 것을 상상하였다.

강성주 외[2]에서 리만합의 극한으로서의 정적분의 정의는 다음과 같다.

폐구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수는 리만 적분가능하다. P 를 구간 $[a, b]$ 의 분할이라 하고, x_i^* 를 i 번째 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 안의 점이라 할 때, 분할 P 에 따른 f 의 리만합을 $\sum_{i=1}^N f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$ 라고 한다. 이때, 어떤 x_i^* 를 선택하는가에 따라서 수많은 리만합이 있게 된다. 예를 들면, x_i^* 를 각 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 에서 함수값이 최대가 되도록 선택하면 리만합은 단순히 상합이 되고, x_i^* 를 각 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 에서 함수값이 최소가 되도록 선택하면 리만합은 하합이 된다. 함수 f 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, $\{P_k\}$ 를 소구간의 최대 길이가 $k \rightarrow \infty$ 일때 0으로 가는 분할들의 수열이라고 하자. S_k 를 P_k 에 대응하는 리만 합이라 하자. 그러면, $k \rightarrow \infty$ 일 때 $S_k \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ 이다.

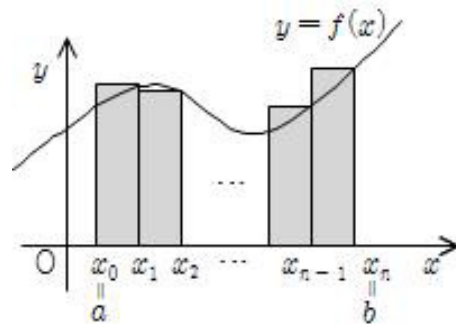
유희찬 외[17]에서는 고등학교 교과서에 정적분에 대해 다음과 같이 정의하고 있다.

함수 $y = f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(x) \geq 0$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구분구적법으로 구해 보자. 구간 $[a, b]$ 를 n 등분하여 양

끝점과 각 분점을 차례로 $x_0(=a), x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_n(=b)$ 이라고 하고, 각 소구간의 길이를 Δx 라고 하면 다음과 같다.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

이때, 오른쪽 그림과 같이 각 소구간의 오른쪽 끝에서의 함수값이 세로의 길이인 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라고



하면

[그림 10]

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

이다.

여기서, $n \rightarrow \infty$ 이면 S_n 은 구하는 도형의 넓이 S 에 한없이 가까워진다.

$$\therefore S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

일반적으로 함수 $y = f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

가 항상 존재한다. 이때, 이 극한값을 함수 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분이라 하고, 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)dx$$

즉 함수 $y = f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x \quad (\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x)$$

강성주 외[2]의 정의와 류희찬 외[17]의 정의의 차이점은 고등학교 과정에서 연속인 함수만을 다루며, 이 경우 구간을 등분하여 적분을 계산하는 것이 가능하다는 것이다. 이에 관하여 다음의 정리가 있다.

(강병개 외[1] “리만의 기준”)

리만적분의 정의에서 $\int_a^b f dx$ 는 $[a, b]$ 의 임의의 분할 P 에 대한 $U(P, f)$ 의 최대하계 또는 $L(P, f)$ 의 최소상계로 구하는데, 여기에서 분할 P 의 각 소구간의 길이가 각각 달라서 계산이 쉽지 않다. 다음의 정리는 리만의 기준(Riemann's criterion)이라고 불리는데, 함수가 연속인 경우에 적분값은 구간을 등분해서 구해도 됨을 말해준다.

(리만의 기준)

f 가 $[a, b]$ 에서 연속이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right)$$

즉 연속인 함수만을 다루는 고등학교 과정에서 구간을 임의로 분할한 것의 적분값과 구간을 등분하는 적분값이 같다.

고등학교에서 다루는 정적분은 연속함수에 관한 내용만을 다루기 때문에 구간을 등분하여 도입하는 것이 타당하다.

또 고등학교에서는 적분을 계산하는 기능적인 측면이 강조되고, 이를 통한 면적, 체적 등 기초적인 활용을 다룬다.

극한에 대한 엄밀한 개념을 구성할 수 없는 고등학생들이 극한을 토대로 한 미분과 미분의 역연산으로 도입되는 적분을 심도있게 학습하는 것은 매우 어려운 일이다.

따라서 고등학교에서는 정적분의 뜻과 성질을 이해하고, 정적분의 기본정리를 이용하여 정적분의 계산을 하며, 이를 활용하여 여러 가지 함수의 정적분을 구하고, 곡선으로 둘러싸인 평면도형의 넓이, 간단한 입체 도형의 부피, 속도와 거리에 정적분을 활용하는 정도의 내용을 학습하는 것만으로도 충분하다.

V 결론 및 제언

본 논문에서는 중·고등학교 학생들에게 무한 개념을 효율적으로 지도하기 위한 방안을 모색하고자 무한 개념의 역사적 배경과 미적분학에서 다루는 무한의 개념을 알아보고, 무한이 교과서에 도입되어 학생들에게 교수되는 것을 분석하고 무한의 일반적 정의와 고등학교 교과서상의 정의를 비교하였다.

무한집합의 일반적 정의는 일대일 대응의 개념을 이용하고 있지만 이를 학생들이 이해하는 것은 대단히 어려우므로, 교과서에서는 이 개념을 사용하지 않고 집합의 원소의 개수를 직접 헤아리는 방법으로 유한집합과 무한집합을 정의하고 있는데, 이는 직관적이기는 하지만 일반적 정의에서 크게 벗어나지 않는다.

극한은 극한에 대한 엄밀한 정의를 이해하는 것은 매우 어려우므로 고등학교 교과서에서는 직관에 의하여 이해하는 수준으로 다루고, 무한수열의 수렴이나 발산은 그래프를 통해 직관적으로 예측하도록 하고 있다.

그러나 학생들이 수열의 극한값을 직관적으로 이해할 때에는 무한을 실제적 무한의 개념이 아닌 잠재적 무한의 개념을 토대로 하기 때문에 논리가 충분하지 않아서 여러가지 오류를 범할 염려가 있다. 또한 무한수열의 극한에서 극한값을 그래프를 통해 직관적으로 예측함으로써 개념의 혼동을 일으킬 수 있다.

따라서 학생들이 직관적으로 이해할 수 있게 하되 오류를 범하거나 혼동을 일으킬 수 있는 부분에 대해서는 충분한 설명과 다양한 예시를 보여 주어야 한다.

연속의 정의를 하나의 식으로 표현하지 않고 세가지 조건으로 나누어 기술하는 것은 그것을 하나의 식으로만 이해한다는 것이 고등학교 수준에서 매우 어려운 일이므로 불가피한 선택으로 보인다.

미분에 대한 정의는 일반적인 정의나 고등학교 교과서 상에서의 정의나 차이점은 없다. 그러나 미분은 극한의 개념을 바탕으로 하고 있고, 고등학교 과정에서 극한은 다소 직관적으로 정의되었기 때문에 학생들은 미분의 대한 개념의 혼란과 계산상의 오류를 범할 가능성이 매우 크다.

적분에 대한 일반적 정의와 고등학교 교과서상의 정의의 차이점은 구간의 분할에 있다. 일반적 정의에서는 구간을 임의로 분할하지만 고등학교 과정에서는 구간을 등분하고 있다. 이는 앞서 언급한 것처럼 고등학교에서 다루는 정적분은 연속함수에 관한 내용만을 다루고 있으며, 연속인 함수에서는 구간을 임의로 분할한 것의 적분값과 구간을 등분하는 적분값이 같기 때문에 구간을 등분하여 도입하는 것이 타당하다. 또한 극한에 대한 엄밀한 개념을 구성할 수 없는 고등학생들이 극한을 토대로 한 미분과 미분의 역연산으로 도입되는 적분을 심도있게 학습하는 것은 매우 어려운 일이다. 따라서 고등학교에서는 적분을 계산하는 기능적인 측면이 강조되고, 이를 통한 면적, 체적 등 기초적인 활용을 다루는데, 고등학생들의 학습 수준 고려할 때 더 이상의 내용전개는 바람직 하지 않다. 이상에서 살펴본 바와 같이, 무한에 관한 수학적 개념은 수열과 함수의 극한, 연속함수와 미분, 적분 이론의 기초가 된다. 따라서 무한에 대한 올바른 이해는 매우 중요하다. 그러나 고등학교 과정에서 극한이나 미분, 적분의 정확한 정의를 다루는 것은 학생들의 성취수준을 고려할 때 무리가 있는 것이 사실이다. 따라서, 고등학교 과정에서 무한의 개념은 보다 직관적인 의미에서 도입된다. 그러나 앞서 역사적 배경에서 다룬 것처럼, 미분과 적분의 엄밀한 정의가 없던 시대에 무한의 개념을 직관적으로만 받아들여 미적분학

의 역사에서 극심한 개념의 혼란과 계산상의 오류를 범했던 사실이 있다. 이러한 역사적 사실에 비추어 볼 때, 고등학교 과정에서 극한값이 다소 직관적으로 정의되었다는 사실은 고등학교 학생들도 이러한 개념의 혼란을 겪을 가능성이 매우 크다는 것을 말해준다.

따라서 이와 같은 혼란을 극복하고, 보다 올바른 무한 개념에 관한 이차적 직관을 형성할 수 있도록 무한에 대한 수학적 개념을 학습할 때 무한이 매우 다루기 어려운 개념이라는 사실, 그동안 수학의 역사에서 가장 논란이 큰 개념이 무한을 다루는 문제였다는 사실, 그동안 이 문제를 극복하기 위하여 인류가 기울여왔던 노력 등을 소개하는 등 지속적인 교수·학습 방법을 개선하여 학생들의 무한에 대한 사고의 폭을 넓힐 수 있도록 해야 할 것이다.

참고 문헌

- [1] 강병개 외 2인, 해석학개론, 경문사, 2012
- [2] 강성주, 기초해석학, 경문사, 2005
- [3] 권기환, 무한대와 무한소 개념과 학생들의 오개념 및 극복 방안-중·고등학교를 중심으로-, 인하대학교 교육대학원, 석사학위논문, 2011
- [4] 김근홍, 무한 개념 형성에 관한 고찰, 순천대학교 교육대학원 석사학위논문, 2003
- [5] 김락중 외 3인, 해석학 입문, 경문사, 2003
- [6] 김미진, 현 교육과정에 따른 중·고등 수학교과 과정에 나타난 무한 개념 분석, 경희대학교 교육대학원 석사학위논문, 2010
- [7] 김성기 외 2인, 해석개론, 서울대학교출판문화원, 2011
- [8] 김한승, 교육과정 밖의 수학적 정리를 학습하는 사례 연구 : 고등학교 수학을 중심으로, 성균관대 교육대학원 석사학위논문, 2007
- [9] 박종률 외 8명, 중학교 수학1, ㈜디딤돌, 2011

- [10] 수학교재편찬위원회 옮김, George B. Thomas, 미적분학(제1판), 청문각, 2006
- [11] 심재관 옮김, Morris Kline, 수학의 확실성, 사이언스북스, 2007
- [12] 양영오 외 1인 옮김, Carl B. Boyer 외 1인, 수학의 역사 상, 경문사, 2000
- [13] 양영오 외 1인 옮김, Carl B. Boyer 외 1인, 수학의 역사 하, 경문사, 2000
- [14] 우정호 외 7명, 고등학교 수학 I, (주)두산동아, 2011
- [15] 우정호 외 7명, 고등학교 미적분과 통계기본, (주)두산동아, 2011
- [16] 유희찬 외 12명, 고등학교 수학 I, (주)미래엔, 2011
- [17] 유희찬 외 12명, 고등학교 미적분과 통계기본, (주)미래엔, 2011
- [18] 윤찬식, 로피탈 정리를 통한 문제 해결 향상성에 관한 분석 및 연구, 부산외국어대 교육대학원 석사학위 논문, 2007
- [19] 전미영, 고등학교학생과 수학교사의 무한개념 이해에 관한 연구, 고려대학교 교육대학원 석사학위논문, 2003
- [20] 정고은, 무한개념의 효율적인 지도방안, 서강대학교 교육대학원 석사학위논문, 2008
- [21] 정동명 외 1인, 실해석학개론(제2판), 경문사, 2004
- [22] 조영혜, 무한급수 개념의 이해에 관한 연구:고등학교 3학년 학생들 중심으로, 건국대학교 교육대학원 석사학위논문, 2008

- [23] 황선욱 외 12인, 고등학교 수학 I, (주) 좋은책 신사고, 2011
- [24] 황선욱 외 12인, 고등학교 미적분과 통계기본, (주) 좋은책 신사고, 2011
- [25] PINTER C.C, Set Theory, Addison Wesley, 1971

ABSTRACT

Understanding for infinity concept in the High School mathematics curriculum

Yun, Ji Yeon

Major in Mathematics Education

Graduate School of Education

Sungshin Women's University

Supervised by Kang, Byung Gai, Ph. D.

This thesis starts from the historical background and the rigorous definition of infinity from calculus. We compare it from the intuitive definition which is dealt in highschool mathematics. We also final some teaching skills to help our students to understand the concept of infinity effectively.

As results, we found the following,

First, teachers should give sufficient explanations and show various examples to the subjects in which students may have confusion.

Second, the functional aspects such as calculation skills should be emphasized rather than rigorousness in teaching analysis. Logical explanations should be given to the extent that helps student to understand basic concepts of infinity. In mathematics, the concept of infinity is very important as it is fundamental to the theory of continuous functions, differentiation

and integration. But it is also true that the rigorous definitions of limit, continuity, differentiation and integration are not appropriate in highschool mathematics education. So those concepts are introduced somewhat intuitively in highschool education, and as a result, students may have some confusion in learning analysis. In some cases, ambiguous definitions are the main factors for students to make some mistakes.

Third, highschool mathematics education should enlarge the scope of thinking abilities of students about infinity and limit.