creative commons
COMMONS DEED

저작자표시-비영리-동일조건변경허락 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

동일조건변경허락. 귀하가 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공했을 경우에는, 이 저작물과 동일한 이용허락조건하에서만 배포할 수 있습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

강 병 개 敎授指導

碩士學位 請求論文

고등학교 수열과 극한에 대한 개념혼동의 요인분석

2011

誠信女子大學校 敎育大學院

敎育學科 數學敎育專攻

최 한 나

고등학교 수열과 극한에 대한

개념혼동의 요인분석

강 병 개 教授指導

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

2011 年 5月

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

최 한 나

認 准 書

최한나의 碩士學位 論文을 認准함

審査委員 ________________ 印

審査委員 ________________ 印

審査委員 ________________ 印

2011 年 5 月

誠信女子大學校 教育大學院

논 문 개 요

수열은 현대의 경제학, 자연 과학, 공학 등 거의 모든 분야에서 응용되는 미적분학의 선행개념이며, 우리의 실생활과 밀접한 관계에 있는 개념이다. 초등학교와 중등학교 수학에서도 암묵적으로 수열이 등장하기는 하지만, 수열은 선택과목인 고등학교 수학 I 에서 처음 다뤄진다. 이러한 교과과정의 배열은 수열개념을 교수·학습과정에서 다루기 쉽지 않다는 것을 짐작하게끔 한다.

고등학교에서 수열과 수열의 극한에 관한 엄밀한 정의를 가르치는 것은 쉽지 않다. 따라서 직관적 관점에서 수열과 수열의 극한개념을 가르치는 것에 동의하는 것이 일반적이다. 그 결과, 이 단원에서는 학생들로 하여금 다양한 개념혼동을 일으킬 수 있는 요인들이 있었다.

본 논문에서는 고등학교 수학 I 교과서에서 학생들이 가질 수 있는 수열과 수열의 극한에 대한 개념혼동의 요인을 분석하고 대안을 제시하고자 하였다.

연구결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 고등학교 수준에서 수열의 엄밀한 정의를 다루는 것은 무리이므로 일반적인 정의를 소개는 하되, 강조하지는 않는 절충안이 필요하다.

둘째, 수학적 귀납법은 대부분 통일된 방법으로 설명하고 있었으나, 추가적으로 수학적 귀납법(2)의 소개가 필요하다고 생각된다.

셋째, 알고리즘과 순서도는 통일된 개념을 가지고 있지 않아서 학생들로 하여금 정확한 의미를 파악하는데 어려움을 가질 수 있었다.

넷째, 무한수열의 수렴과 발산의 개념은 직관적 측면에 의존하고 있었다. 무엇보다도 진동하는 수열을 발산하는 수열의 영역에 포함시키고 있었는데, 이는 학생들에게 극한에 대한 큰 개념혼동을 가져올 수 있다.

차 례

I 서론

I.1 연구의 필요성 및 목적

수열의 역사가 고대 바빌로니아 시대로 거슬러 올라간다는 사실을 감안하면 수열은 인류 문화의 발전과 함께 했음을 알 수 있다. 사실 간단한 이자 계산을 하는 데에도 등비급수의 합을 구하는 방법을 알아야 했으므로, 수열의 이용이 인간의 생활과 얼마나 밀접한 관계가 있는지 짐작하기가 어렵지 않다. 현대에는 자연과학, 사회과학, 공학, 경제학 등 거의 모든 분야에서 응용되는 미적분학의 선행 개념이기도 하다.

이처럼 수열이 우리의 생활과 다른 학문에 밀접하게 연관되어 있음에도 불구하고 수열과 수열의 극한은 고등학교 수학에서 선택 교과목인 수학 I 에서 처음 다룬다. 물론 초등학교나 중학교에서 암묵적으로 수열을 다루기는 하지만 정식 교과과정에서 수열은 수학I 에 처음 등장하는데, 그만큼 수열을 다루기가 쉽지 않다는 것을 반증하는 것이기도 하다.

고등학교 수학 I 의 수열 단원에서는 나열되어 있는 수들의 변화를 살펴보고 일반항을 구하는 과정을 통하여 유추와 일반화, 그리고 일반화된 명제의 증명을 학습하게 된다. 이에 관하여 교육과정에서는 교수 · 학습 방법으로 "귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 할 수 있다." 고 기술하고 있다[1]. 이러한 과정은 수학적 사고의 전형적인 패턴이라고 말할 수 있으므로, 수열의 학습은 수학적 사고력을 신장시키는데 가장 좋은 소재의 하나일 것이다. 그러나 또 한편으로는 바로 이러한 과정이 학생들에게는 매우 힘들고 어려

운 작업이 될 것이므로 개념과 과정을 파악하는데 장애가 있을 수 있고 따라서 여러 가지의 개념혼동이 발생할 수 있다. 알고리즘과 순서도는 분명 일의 처리 순서를 명확하게 정리하여 간편하게 도식으로 보여줄 수 있는 효과적인 방안이기는 하지만 이 두 용어 모두 수학적 용어는 아니다. 다시 말하면 이들을 수학적으로 명확하게 규정지을 수 있는 정의가 없다는 뜻이다. 따라서 이 두 개념은 교과서마다 약간씩 다른 설명과 처리과정으로 서술되어 있었다.

순서도와 함께 수학적 귀납법도 학생들에게 매우 부담스러운 주제가 아닐 수 없다. 수학적 귀납법을 이용한 명제의 증명은 증명방법의 이해는 물론이고, 경우에 따라 문제해결을 위한 다양한 전략을 탐구해야 하므로 학생들로서는 매우 무거운 과제임에 틀림없다. 수열의 극한은 더 다루기 힘든 주제이다. 교육과정에서는 수열의 극한에 대한 교수·학습상의 유의점으로 다음을 제시한다[1].

① 수열의 극한에 관한 정의와 성질은 직관에 의하여 이해하는 수준으로 다룬다.

② 무한수열의 수렴이나 발산은 그래프를 통해 직관적으로 예측해 보게 한다.

따라서 수열의 극한의 엄밀한 정의를 고등학교에서 다루는 것은 현실적으로 어려우며, 수열의 극한의 개념은 상당부분 직관에 의존하는 것이 사실이다. 하지만 직관에 의존하는 개념은 논리적 설명이 부족하여 학생들로 하여금 개념의 정확한 정의를 이해하기 어렵다. 박선화[7]의 연구결과는 학생들이 수열과 수열의 극한 정의에 있어서 엄밀한 정의보다는 직관적 정의에 의존하여 학습함으로써 인지적 장애를 일으킨다고 보고 있다.

예를 들면 다음과 같다.

∘ 수열은 수를 생성하는 규칙이다.

∘ 교대수열은 극한값이 없다.

∘ 더하고 빼는 것이 교대로 계속되면 그 결과는 0이라고 생각한다.

∘ 수열의 극한은 수열이 한없이 가까워지지만 같아질 수 없는 수이다.

∘ 수열의 항을 나열해 보면 극한값을 구할 수 있다.

∘ 뭔가에 가까워지는 수열은 수렴하는 수열이다.

∘ 극한에 도달할 수 있다.

이 논문에서는 먼저 수열에 대한 일반 이론적 배경을 알아보고, 현재 교육과정에서의 수열, 수학적 귀납법, 알고리즘과 순서도, 수열의 극한에 대한 교과서별 개념의 기술 방법을 비교·분석해 보고자 한다. 또 여기에서 학생들로 하여금 개념이해에 있어 혼동을 불러 일으킬 요소는 없는지 조사하고, 그 개선방안을 제시하려고 한다.

I.2 연구문제

본 연구의 목적을 달성하기 위한 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

첫째, 제 7차 개정 교육과정에서 수학 I 의 교과서별 수열과 수열의 극한 단원의 개념정의와 제시방법에 어떤 차이를 보이고 있는가?

둘째, 13종의 고등학교 수학 I 교과서의 수열과 수열의 극한 단원의 항목별 공통점과 차이점은 무엇인가?

셋째, 일반적인 수학적 정의를 사용하여 고등학교 수학 I 교과서의 수열과 수열의 극한 단원을 어떻게 구성할 수 있는가?

II 이론적 배경

II.1 수열의 역사적 배경

역사적으로 수열의 사용은 바빌로니아 시대를 거슬러 올라가는데, 바빌로니아 시대에는 수열의 이해를 넘어서서 급수의 합을 구하는 방법까지 이해하고 있었다. 19세기 중반 이후 메소포타미아 지방에서 기원전 2400년경부터 기원전 1300년경까지에 만들어진 것으로 추정되는 50만개 가량의 점토판이 발견되었는데, 그중 약 300개는 수학에 대한 것으로 알려져 있다. 미국의 수학사학자 노이게바우어(Neugebauer)는 루브르 박물관의 한 점토판에 다음과 같은 급수에 관한 문제가 있는 것을 발견하였다.

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = 2^{10} - 1$$

또 다른 서판에는 제곱수열의 합

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 385$$

을 구하고 있는 것으로 보아 등비급수와 제곱수의 합을 구하는 방법을 알고 있던 것으로 추측된다.

또한 $\sqrt{2}$의 근삿값으로

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1.41421296\cdots$$

이 계산된 점토판도 발견되었다[27].

고대 이집트도 수열에 대한 상당한 지식이 있었다고 믿어지는데, 1887년 독일의 고고학자 아이젠로올에 의해 현대어로 번역된 린드 파피루스(B.C.

1600년경)에서는 등차수열과 등비수열에 해당하는 예가 실려 있었다. 등차수열에 해당하는 문제는 곡물의 분배에 관한 것으로 현재의 단위를 써서 말하면 다음과 같다.

> 곡물 100kg을 5명이 나누는데 A보다 B, B보다 C, C보다 D, D보다 E가 각각 어떤 일정한 양만큼 많아지도록 나누었다. 그리고 A와 B 두 명의 몫은 나머지 3명에 대한 몫의 $\frac{1}{7}$이었다. 5명이 각각 나누어 가진 곡물의 양을 구하여라.

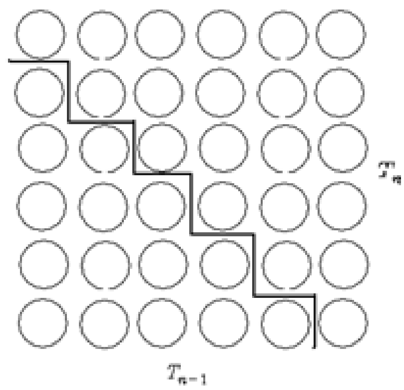
이 문제는 등차수열의 합을 구하는 것으로, A가 가진 곡물의 양을 구하기 위해서 A의 양을 a, 많아지는 일정한 양을 d라 하면 5명이 나누어 가진 곡물의 양은 각각 $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$이므로 등차수열을 이룬다[20].

고대 그리스의 피타고라스(Pythagoras) 학파는 수를 기하학적인 도형과 결부시켜서 삼각수, 사각수, 오각수, $\cdots$를 생각하였다.

이들은 1부터 n까지 자연수의 합이

$$T_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

임을 그림에서 선 아래의 삼각형을 이용하여 구했으며,이것을 삼각수라고 불렀다. 즉, 선 위의 공의 개수는 $T_n = 1+2+3+\cdots+n$이고 선 아래의 공의 개수는



$1+2+3+\cdots+(n-1) = T_n - n$ 이며, 전체 사각형 내의 점의 개수는 n^2 이므로

$$T_n + T_n - n = n^2 \quad \therefore\ T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 또한, 그들은 그림이 사각수 S_n이며 점들을 실선으로 구분하였을 때, S_n은 n개의 홀수의 합 $S_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$이고, 삼각수와 사각수의 관계식 $S_n = T_n + T_{n-1}$이 성립함을 보였다[14].

그 후에 수열에 관한 연구 기록은 알려져 있는 것이 많지 않으나 13세기에는 이탈리아의 수학자 피보나치(Fibonacci)가 지은 『산반서』라는 책에서는 다음과 같은 문제를 들고 있다.

> 토끼 한 쌍이 달마다 토끼 한 쌍을 낳고 태어난 한 쌍의 토끼는 두 번째 달부터 한 쌍의 토끼를 낳기 시작한다면 토끼 한 쌍에서 시작하는 경우 1년간 몇 쌍의 토끼가 태어날까?

위의 유명한 문제는 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$ 와 같이 제 3항 이하가 언제나 앞의 두 항의 합으로 되어있는 수열을 이룬다. 이러한 수열을 '피보나치 수열'이라 부르며 이 수열의 일반항을 a_n이라 한다면,

$$a_n + a_{n+1} = a_{n+2} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

가 성립한다[10].

중세이후, 수열과 급수에 관한 이론은 발전을 거듭하였는데, 실례로 그레고리(Gregory)는 역삼각함수의 전개식

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots (-1 \leq x \leq 1)$$

로부터

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

를 얻었다고 한다. 이는 수열로부터 π를 구하는 새로운 발명이기도 하다[27].

뉴튼과 라이프니츠에 의하여 미적분학이 발견된 후에 미적분학은 급속도로 발전하였으나, 극한의 개념이 정확하게 정립되지 않았으므로 수열과 함수의 극한에 대하여 여러 가지 혼란스러운 상황이 전개되었다. 18세기에 이르러 이탈리아의 수학자 그란디(Guido Grande)는 무한 교대급수에 대해 연구하였는데, 그는

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

의 합이 $\frac{1}{2}$이 될지 어떠할지에 대해 고민하였다. 이때 $\frac{1}{2}$이라는 값은 처음의 n항의 부분합의 두 값을 산술평균한 결과이다. 그란디는 라이프니츠와 편지를 주고받으면서 위 급수에는 기적과 비교할만한 역설이 보인다고 말하였고, 그 까닭은 다음과 같다. 급수를 두 항씩 정리해보면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots \\ &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ &= 0 + 0 + 0 + \cdots \end{aligned}$$

와 같이 나온다고 하였으며, 이 식이 무(無)로부터의 창조를 상징하는 것으로 보았다[20]. 또한, 대수학자인 오일러(Euler)조차도 $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$을 아무 의심 없이 사용하면서

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty,$$
$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \cdots = 0$$

으로 결론지었다[11]. 이러한 일화는 19세기 미적분학의 발전과 더불어 무한급수의 수렴성에 대한 문제가 제기되면서 수열의 수렴과 발산에 관한 문제들이 수학자들을 얼마나 괴롭혔는지 알려준다. 당시 아벨(Abel, N. H.)은

수렴·발산 논쟁에 관하여 “발산하는 급수는 악마의 발명품이다.”라고 말할 정도였다[27].

19세기에 이르러 코시(Cauchy, A.L.)의 정수항의 급수 수렴조건에 대한 연구에서 비로소 산술적 성격을 띠기 시작하였고, 코시는

> 하나의 변수가 연속적으로 값을 취하면서 일정한 값에 한없이 가까이 가고, 마지막에 일정한 값과 차이가 원하는 만큼 작게 될 때 그 변수의 마지막 값을 그 밖의 모든 값의 극한이라 한다.

고 표현하며, $\varepsilon - \delta$ 법에 의한 정리로 오늘날 해석학에서의 수열과 함수의 극한값에 관한 수렴과 발산을 명확히 정의하였다[11].

이어 1854년 리이만(Riemann)은 조건수렴시킬 수 있다는 것을 발견하였고, 19세기 말에는 보렐(Boral, F.E.E.)에 의해서 새로운 총합법이 생각되어졌다. 최근에는 Banach 공간의 수법으로 연구가 계속되어지고 있으며, 많은 수학자들의 노력으로 비로소 수열이 학문적으로 체계화되고 많은 발전을 하게 되었다[27].

II.2 수열의 일반적 정의

일반적으로 공집합이 아닌 집합 A에 대하여 자연수의 집합 $\mathbb{N}$에서 A로의 함수 $f : \mathbb{N} \to A$를 A에서의 수열(sequence)이라고 한다. 이때 f의 상(image)을 차례로 나열하여 집합으로 나타내면

$$\{f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots\}$$

이 되는데, 이것을 수열이라고 부르기도 한다. 또 이때,

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \cdots, f(n) = a_n, \cdots$$

으로 두면 수열을

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

으로 나타 낼 수 있고 이것을 간단히 $\{a_n\}$으로 표시하기도 한다. 여기에서 각 a_n을 수열 $\{a_n\}$의 n번째 항이라고 한다.

위에서와 같이 수열이 자연수 전체의 집합에서 주어진 집합으로의 함수라는 정의에 대해서는 별 다른 이견이 없다. 그런데 위의 정의에서 정의역이 자연수의 집합인 $\mathbb{N}$이므로 위의 정의는 우리가 흔히 무한수열(infinite sequence)이라고 일컫는 수열을 말한 것이고, 고등학교 교육과정에서 용어로 제시되어 있는 유한수열(finite sequence)을 따로 정의한 책은 흔하지 않다.

유한수열은 Apostol[29]에 의하면 다음과 같이 정의된다.

n이 자연수일 때, 공집합이 아닌 집합 A에 대하여 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}$에서 A로의 함수 f를 n개의 항을 가지는 유한수열이라고 한다. 이때도 앞에서와 같이 f의 상(image)을 이용하여

$$\{f(1), f(2), \cdots, f(n)\}$$

으로 나타낼 수 있고,

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \cdots, f(n) = a_n$$

으로 두면 이 수열을

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

으로 표현할 수 있다. 여기에서 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}$은 자연수의 집합 $\mathbb{N}$의 부분집합이므로, 유한수열은 무한수열의 축소함수(restriction)로 간주할 수 있다.

II.3 수학적 귀납법

수학적 귀납법은 여러 개의 구체적인 사실로부터 공통성을 추출하여 새로운 사실을 추측하는 귀납법의 성격을 띤다. 그런 측면에서 수학적 귀납법을 귀납법의 일종으로 생각하기 쉬우나, 사실 수학적 귀납법의 원리는 연역적으로 증명된다.

자연수의 집합은 Peano공리계에 의하여 정의된다. 이 공리계에서 자연수 전체의 집합을 P라 할 때, 집합 P는 다음 성질을 갖는다[5].

(i) $1 \in P$이다.

(ii) P에서 P자신으로의 1대 1인 함수(函數) $x \mapsto x^+$가 존재한다. 즉, $x^+ = y^+ \Longrightarrow x = y$이다.

(iii) 모든 $x \in P$에 대하여 $x^+ \neq 1$이다.

(iv) 귀납법 공리(歸納法公理) : 집합 P의 부분집합 S가 다음 조건

$$1 \in S, x \in S \Longrightarrow x^+ \in S$$

를 만족하면 $S = P$이다.

위의 정의에서 x^+를 x의 직후자(直後者)(immediate successor)라고 한다. 또 함수 $x \mapsto x^+$를 후자함수(後者函數)(successor mapping)라고 부른다. 여기에서 $1^+ = 2,\ 2^+ = 3,\ 3^+ = 4,\ \cdots$로 두면 $P = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$가 된다.

수학적 귀납법은 위의 공리계의 (iv)귀납법 공리에 그 근거를 두고 있는데, 이것을 다음과 같은 수학적 귀납법의 원리로 표현할 수 있다.

[**수학적 귀납법의 원리**]

S가 자연수의 집합 $\mathbb{N}$의 부분집합으로 다음 두 조건

(1) $1 \in S$이다.

(2) 모든 자연수 k에 대하여 $k \in S \Longrightarrow k + 1 \in S$가 성립한다.

를 만족시키면 $S = \mathbb{N}$이다.

수학적 귀납법의 원리는 Peano 공리계의 일부이므로 증명을 요하지 않으나 다음의 정수의 정렬성(Well-Ordering Property)과 서로 동치이다.

[**정수(整數)의 정렬성(整列性)**]

0 이상의 정수의 집합의 공집합이 아닌 부분집합은 최소원을 가진다.

수학적 귀납법의 원리는 다음과 같이 표현할 수 있는데, 이것이 고등학교에서 사용하는 수학적 귀납법이라는 증명방법이다.

[**수학적 귀납법 (1)**]

$p(n)$을 자연수 전체의 집합에서의 조건명제라고 할 때 다음 두 조건

(1) $p(1)$이 참이다.

(2) 모든 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이면 $p(k+1)$도 참이다.

가 성립하면 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이다.

또한 고등학교 교과서를 살펴보면, 다음의 수학적 귀납법을 사용하고 있는 예도 찾을 수 있다.

[수학적 귀납법 (2)]

$p(n)$을 자연수 전체의 집합에서의 조건명제라고 하자. $a \in \mathbb{N}$일 때 다음 두 조건

(1) $p(a)$가 참이다.

(2) 모든 자연수 $k \geq a$에 대하여 $p(k)$가 참이면 $p(k+1)$도 참이다.

가 성립하면 $n \geq a$인 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이다.

II.4 알고리즘과 순서도

알고리즘과 순서도는 수학적 정의를 가지는 용어는 아니다. 다시 말하면, 알고리즘을 어떤 수학적 개념으로 명확하게 서술하기는 어려우며 따라서 고등학교 교과서에서도 교과서마다 그것을 표현하는 방법이 다르다. 조성진 외[23]에 의한 알고리즘의 뜻은 다음과 같다.

> 알고리즘(algorithm)은 주어진 문제를 해결하기 위한 (효율적인) 방법을 말한다.

즉, 알고리즘이란 어떤 값이나 값의 집합을 입력으로 받아 값이나 값의 집합을 출력하는 잘 정의된 계산절차를 말한다. 따라서 알고리즘은 입력을 출력으로 변환하는 일련의 계산과정이라 할 수 있다. 미국 스탠포드 대학의 Knuth 교수는 “The Art of Computer Programing”에서 알고리즘의 5가지 특징을 다음과 같이 기술하고 있다.

1. 유한성 (finiteness) : 알고리즘은 유한번의 과정 안에 끝나야 한다.
2. 명확성 (definiteness) : 알고리즘의 각 단계는 명확하게 정의되어야 한다.
3. 입력 (input) : 알고리즘이 시작되기 위해서는 초기에 어떤 특정한 값을 입력해야한다.
4. 출력 (output) : 알고리즘은 입력과 관계가 있는 몇 개의 출력이 있어야 한다.
5. 유효성 (effectiveness) : 알고리즘에서의 모든 작업은 정확해야 하며 종이와 연필로 유한 시간에 끝낼 수 있어야 한다.

알고리즘의 수학적 정의를 찾을 수 없으므로, 무엇이 알고리즘인가에 대한 여러 주장이 있을 수 있다. 또 문제에 따라서 그 문제를 해결할 수 있는 알고리즘이 없거나 여러 개 존재 할 수 있으며, 여러 개인 경우 어느 알고리즘이 더 효율적인가 하는 문제가 발생한다. 여기서 효율적이라는 것은 알고리즘이 수행되었을 때 그 답을 얻는데 걸리는 시간이 얼마나 적게 사용되는가를 의미한다.

순서도는 어떤 작업을 수행하는 알고리즘이나 과정의 흐름을 정해진 기호를 이용하여 알기 쉽게 도표로 나타낸 것을 뜻한다. 따라서 순서도는 알고리즘에 따라 달리 나타날 수 있다.

II.5 수열의 수렴과 발산

정동명 외[21]에서는 수열의 수렴과 발산을 다음과 같이 정의한다.

수열 $\{x_n\}$에 대하여, 적당한 실수 x가 존재해서 명제「임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여, 이에 대응하는 적당한 자연수 $K(\varepsilon) = K$ 가 존재하여 $n > K$인 모든 자연수 n에 대하여 $|x_n - x| < \varepsilon$ 이다.」를 만족하면, 수열 $\{x_n\}$은 수렴한다(converge), 또는 x에 수렴한다고 말한다. 이때, x를 $\{x_n\}$의 극한(limit)이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n} x_n = x$$

또는, 간단히

$$\lim x_n = x$$

로 나타내며, 편의에 따라 "$n \to \infty$일 때, $x_n \to x$"로 나타내기도 한다. 이때, 수열 $\{x_n\}$이 수렴하지 않으면, 그 수열은 발산한다(diverge)고 말한다.

이와 같이 수열의 수렴과 발산은 $\varepsilon - \delta$ 법에 의해 서로 상반되는 개념으로 정의되어지고 있으며, 이에 대하여 별 다른 이견은 없다.

III 수학 I 교과서 비교·분석

III.1 연구대상

이 절에서는 수열의 정의, 수학적 귀납법, 알고리즘과 순서도, 수열의 극한을 중심으로 하여 현행 고등학교 교과서들을 비교해보고자 한다. 이 연구를 위하여 현행 고등학교 수학 I 교재 13종을 비교·분석 하였다. 분석에 사용된 교과서는 아래의 표와 같은데, 편의상 교과서를 출판사명의 가나다순으로 하여 A~M으로 분류하였다.

약호	출판사	저자
A	고려출판	이만근 외 3인
B	(주) 교학사	김수환 외 13인
C	(주) 교학사	황석근 외 12인
D	(주) 금성출판사	양승갑 외 7인
E	(주) 금성출판사	정상권 외 8인
F	더 텍스트	김해경 외 8인
G	더 텍스트	윤재한 외 14인
H	(주) 두산동아	우정호 외 7인
I	(주) 미래엔 컬쳐그룹	유희찬 외 6인
J	(주) 박영사	우무하 외 4인
K	법문사	이동원 외 5인
L	(주) 좋은책신사고	황선욱 외 12인
M	(주) 지학사	이강섭 외 3인

III.2 수열과 알고리즘, 수열의 극한 단원의 항목별 비교

이 절에서는 수열의 정의, 수학적 귀납법, 알고리즘과 순서도, 수열의 극한을 중심으로 하여 현행 고등학교 교과서에 기술된 개념을 소개하고, 개념혼동이 일어날 수 있는 가능성을 지적하고자 한다.

(1) 수열의 정의

고등학교 과정에서 수열의 엄밀한 수학적 정의를 다루는 것은 분명 무리가 있어 보인다. 일반적으로 집합 A에서의 수열은 자연수의 집합에서 A로의 함수를 의미하는데, 현행 고등학교 수학 I 교과서에 공통적으로 등장하는 수열의 정의는 대체로

"일정한 규칙에 의하여 차례로 나열한 수의 열"

이다. 그런데 이 정의에 의하면 예를 들어서 π의 소수점 아래 자릿수의 열

$$1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, \cdots$$

는 일정한 규칙을 찾을 수 없으므로 수열이라고 할 수 없게 된다. 따라서 고등학교에서 다루는 수열의 정의는 대학 이상에서 다루는 수열의 일반적 정의와는 분명한 차이가 있다.

앞에서 열거한 각각의 수학 I 교과서에서 수열의 정확한 정의를 어떻게 다루고 있는지 살펴본 결과에서도 처음부터 대학에서 다루는 것만큼 정확한 수열의 정의를 도입한 교과서는 있지 않았다. 이들의 교과서를 3가지로 분류하여 비교해보면 다음과 같다.

첫 번째, 예를 들어서 수열과 항의 개념을 정리하고 뒤에 일반적인 정의를 설명하는 식으로 언급한 교과서의 본문은 다음과 같다.

[교과서 L]

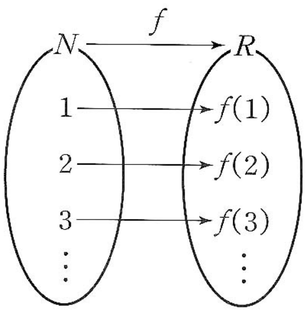
1부터 시작하여 차례로 2를 더하여 얻은 수를 순서대로 나열하면 다음과 같다.

$$1, 3, 5, 7, 9, \cdots$$

이와 같이 일정한 규칙에 의하여 차례로 나열된 수의 열을 수열 이라고 하며, 나열된 각 수를 그 수열의 항이라고 한다. 이때 각 항을 앞에서부터 차례로 첫째 항, 둘째 항, 셋째 항, …또는 제 1항, 제 2항, 제 3항, …이라고 한다.

수열 $\{a_n\}$ 은 자연수 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ 에 이 수열의 각 항 $a_1, a_2, a_3, \cdots,$ $a_n, \cdots$ 을 차례로 대응시킨 것이므로, 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수로 생각할 수 있다.

즉, 자연수 전체의 집합 N에서 실수 전체의 집합 R로의 함수 $f : N \to R$ 의 함숫값을 차례대로 나열한 $f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots$ 은 수열이 되고, $f(n) = a_n$ 으로 나타내면 이 수열의 항 $f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots$ 은 각각 다음과 같다.



$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

따라서 일반항 a_n이 n에 대한 식 $f(n)$으로 주어지면 n에 $1, 2, 3, \cdots$ 을 차례대로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 정할 수 있다.

이와 같이 처음에는 수열의 구체적인 예를 들어 “일정한 규칙에 의하여 차례로 나열된 수의 열”을 수열이라고 정의를 한 후, 이 예를 일반화하

여 수열의 수학적 정의를 정확하게 기술한 교과서 A, D, E, H, K, L 이 있었다.

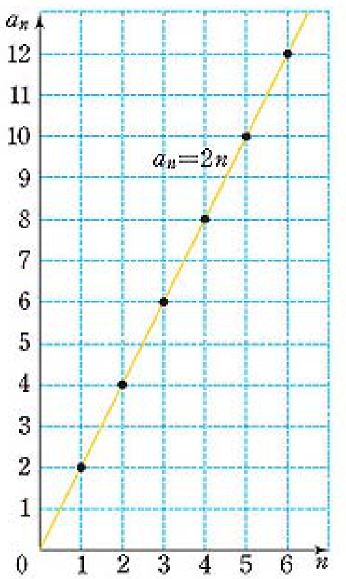
두 번째로, 교과서에서 정확한 수열의 정의를 예로 들거나 '한걸음 더'에서 제시함으로써 심화학습으로 다룬 교과서도 있었다. 본문을 살펴보면,

[교과서 C]

함수 $f(x)$가 주어지면 x가 자연수 $1, 2, 3, \cdots$ 을 값으로 취할 때의 함숫값을 차례로 나열한 무한수열 $f(1), f(2), f(3), \cdots$ 이 얻어진다. 또 무한수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 이 주어졌을 때,

$$f(n) = a_n$$

이라고 하면 f는 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하고 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수가 된다. 그러므로 수열을 그래프로 나타낼 수 있다.
오른쪽 그림은 수열 $\{2n\}$의 그래프이다.



다음 수열의 그래프를 그려보자.
(1) $\{n+1\}$ (2) $\{n^2\}$

교과서 C의 경우 수열의 정의를 예로 들고 "일정한 규칙에 대하여 나열한 수의 열"로 수열을 정의한 다음, 수열의 일반적 정의는 '한걸음 더'에서 다룸으로써 심화학습으로 취급하였다. 이와 같이 수학적으로 정확한 수열의 정의를 교과서 본문에서 다루지 않고 심화학습에서 다루고 있는 교과서 C, F, G 가 있었다.

이제 세 번째로 정확한 수열의 정의에 대한 언급 없이 예와 함께 "일정한 규칙에 따라 나열한 수의 열" 로 정의하고 있는 교과서 B, I, J, M 이 있었다. 이들을 살펴보면, 다음과 같다.

[교과서 I]

어떤 규칙에 따라 차례로 늘어놓은 수의 열을 수열이라 하고, 수열을 이루고 있는 각 수를 그 수열의 항이라고 한다. 이때, 앞에서부터 차례로 첫째 항, 둘째 항, 셋째 항, $\cdots$, n째 항, $\cdots$ 또는 제 1항, 제 2항, 제 3항, $\cdots$, 제 n항, $\cdots$ 이라 하고,

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

과 같이 나타낸다.

[교과서 M]

오른쪽 그림과 같이 삼각 김밥을 배열할 때, 맨 위에 있는 것부터 각 층에 있는 삼각 김밥의 개수를 차례로 배열하면 다음과 같다.

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\cdots$$

한편 1보다 큰 3의 배수를 작은 수부터 차례로 나열하면

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \cdots\cdots$$

이와 같이 어떤 규칙에 따라 차례로 나열된 수의 열을 수열이라 하고, 나열된 각 수를 그 수열의 항이라고 한다.

(2) 수학적 귀납법

앞서 살펴본 바와 같이, 수학적 귀납법의 원리는 Peano의 공리계에 속한 것인데, 고등학교에서 다루는 수학적 귀납법은 다음과 같다.

[**수학적 귀납법 (1)**]

$p(n)$을 자연수 전체의 집합에서의 조건명제라고 할 때 다음 두 조건

(1) $p(1)$이 참이다.

(2) 모든 자연수 k에 대하여 $p(k)$가 참이면 $p(k+1)$도 참이다.

가 성립하면 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이다.

대부분의 교과서에서 수학적 귀납법을 위와 같이 제시하고 있었고, 이것을 이용하여 자연수에 관한 명제를 증명하는 예를 보여주고 있다. 이 증명 방법들은 예외 없이 매우 기계적인 방법으로 이루어지고 있어서 학생들을 혼란하게 할 염려는 없어 보인다.

다음의 예는 자연수에 관한 명제 중 n의 값이 1보다 큰 경우에 해당하는 것을 수학적 귀납법으로 증명하는 문제들이다.

예제 1) $h>0$일 때, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.(교과서 L)

$$(1+h)^n > 1+nh$$

예제 2) 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라. (교과서 L)

(1) $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $2^n > n^2$

(2) $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$

예제 3) $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 부등식 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$이 성립함을 증명하여라.(교과서 C)

예제 4) 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라. (교과서 H)

(1) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ (단, $n \geq 2$ 인 모든 자연수)
(2) $2^n > 2n+1$ (단, $n \geq 3$인 모든 자연수)

예제 5) 다음 사실을 수학적 귀납법으로 증명하여라.(교과서 D)

어느 고등학교 야구 경기 대회에서 n개의 팀이 출전하여 모든 팀이 다른 팀과 반드시 한 경기씩을 치르는 리그전을 경기를 할 때, 총 경기의 수는 다음과 같다.

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ (단, } n \geq 2)$$

위의 예들을 다루는 데는 다음과 같은 원리가 필요하다.

[수학적 귀납법 (2)]

$p(n)$을 자연수 전체의 집합에서의 조건명제라고 하자. $a \in \mathbb{N}$일 때 다음 두 조건

(1) $p(a)$가 참이다.
(2) 모든 자연수 $k \geq a$에 대하여 $p(k)$가 참이면 $p(k+1)$도 참이다.

가 성립하면 $n \geq a$인 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이다.

이제 각 교과서에서 수학적 귀납법(1)과 수학적 귀납법(2)를 어떻게 제시하고 있는지 비교해보자.

먼저 교과서 본문에 2가지의 수학적 귀납법의 원리를 제시한 교과서 A, D, E, H, I, L, M 이 있었다. 이같은 교과서를 접한 학생들은 $n \geq 2$로 주어진 문제에서도 어렵지 않게 접근 할 수 있었다.

그러나 이러한 성질을 교과서 본문에 놓지 않고 교과서 가장자리에 보충자료로서 제시한 교과서 C, F 가 있었고, 수학적 귀납법(2)의 원리에 대해 어떠한 단서도 없이 예제를 통하여 문제풀이 과정에서 $p(\ell)$을 초항으로 놓는 수학적 귀납법의 원리를 이끌어내고자 한 교과서 B, J, K 가 있었다.

또한 m이상의 자연수 n을 놓고 푸는 문제를 제시하지 않고 모든 자연수 n에 대해서 성립하는 수학적 귀납법만 보인 교과서 G 가 있었다.

(3) 알고리즘과 순서도

앞서 언급한대로, 알고리즘과 순서도를 수학적 용어로 정의하는 것은 매우 어렵다. 따라서 이들을 수학적 기준에 따라 기술하고 설명하는 것은 한계가 있으며, 바로 이 점 때문에 교과서마다 진술이 다르고, 교사나 학생들에게 큰 혼란을 야기하기도 한다.

앞에서 열거한 교과서에 등장하는 알고리즘과 순서도의 뜻을 살펴보자.

교과서	알고리즘과 순서도의 정의
A	어떤 문제를 해결하기 위하여 단계적으로 할 일을 정하고, 이것을 처리하는 순서를 알고리즘이라 하며 이 알고리즘의 처리 순서를 기호를 사용하여 알기 쉽게 그림으로 나타낸 것을 순서도라 한다.
B	수의 계산이나 문제해결에 필요한 계산 절차 또는 처리 과정의 순서를 알고리즘이라 하고, 알고리즘을 약속된 기호를 사용하여 알아보기 쉽게 그림으로 나타낸 것을 순서도라고 한다.
C	문제 해결에 필요한 처리 과정의 순서를 단계적으로 정리한 것을 알고리즘이라고 한다. 알고리즘의 처리 순서를 아래 기호를 사용하여 그림으로 나타낸 것을 순서도라고 한다.
D	어떤 문제의 해결에서 필요한 유한번의 단계적인 계산 방법이나 처리 과정의 순서를 알고리즘이라 하고, 알고리즘의 처리 순서를 알기 쉽게 기호를 사용하여 나타낸 것을 순서도라고 한다.
E	문제 해결에 필요한 계산 절차 또는 처리 순서를 그 문제에 대한 알고리즘이라 하고, 알고리즘의 처리 순서를 알기 쉽게 기호를 사용하여 그림으로 나타낸 것을 순서도라고 한다.
F	어떤 문제를 해결하기 위한 유한번의 계산 절차 또는 처리 순서를 그 문제에 대한 알고리즘(algorithm)이라 하고, 알고리즘을 알아보기 쉽게 약속된 기호를 사용하여 그림으로 나타낸 것을 순서도라 한다.

G	어떤 문제를 해결하기 위하여 단계적으로 할 일을 정하고 그 처리 과정의 순서를 정리한 것을 알고리즘(algorithm)이라고 한다. 그리고 알고리즘의 처리 순서를 알기 쉽게 기호를 사용하여 그림으로 나타낸 것을 순서도라고 한다.
H	문제의 해답에 이르는 유한 번의 계산 절차 또는 처리 순서를 그 문제에 대한 알고리즘(algorithm)이라 하고, 알고리즘을 알아보기 쉽게 그림으로 나타낸 것을 순서도라고 한다.
I	어떤 문제를 해결하기 위하여 유한 번의 계산 절차 또는 처리 순서를 그 문제에 대한 알고리즘(algorithm)이라 하고, 알고리즘을 알아보기 쉽게 그림으로 나타낸 것을 순서도라고 한다.
J	문제해결에 필요한 처리 순서를 알고리즘이라고 하고, 이를 기호를 써서 알기 쉽게 그림으로 나타낸 것을 순서도라고 한다.
K	문제해결 과정의 처리 순서를 그 문제에 대한 알고리즘이라고 하고, 그러한 알고리즘의 처리 순서를 알기 쉽게 기호를 사용하여 그림으로 나타낸 것을 순서도라 한다.
L	어떤 문제를 해결하기 위하여 필요한 유한번의 계산 절차 또는 일의 처리 순서를 알고리즘이라고 한다. 또한 약속된 기호를 사용하여 알고리즘을 알기 쉽게 그림으로 나타낸 것을 순서도 라고 한다.
M	어떤 문제를 해결하기 위하여 유한번의 계산 방법 또는 처리 순서를 나타낸 것을 알고리즘(algorithm)이라고 한다.

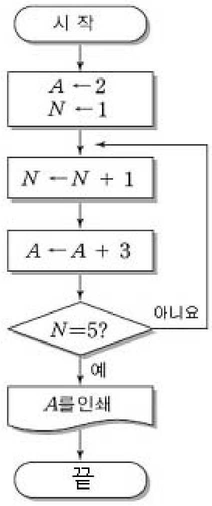
비슷하기는 하지만 각 교과서마다 조금씩 다른 표현으로 알고리즘과 순서도를 설명하고 있음을 알 수 있다. 이제 위의 정의에 따라 순서도를 해석하고 작성하는 방법을 살펴보기로 하자. 먼저 교과서 C 에서는 다음과 같이 다루고 있다.

[교과서 C]

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 제 5항을 구하는 순서도를 작성하여라. 처리 순서와 반복 횟수를 고려하여 다음과 같이 알고리즘과 순서도를 간단히 작성할 수 있다.

단계 ① 2를 A로 놓고 1을 N으로 놓는다.
단계 ② $N+1$을 다시 N으로 놓는다.
단계 ③ $A+3$을 계산하여 다시 A로 놓는다.
단계 ④ $N=5$이면 단계 ⑤로 가고 $N \neq 5$ 이면 단계 ②로 간다.
단계 ⑤ A를 인쇄한다.

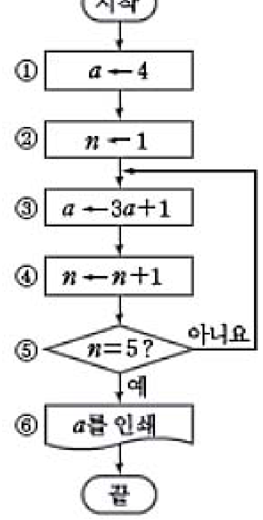
N	1	2	3	4	5
A	2	5	8	11	14



이제 다른 교과서에서 순서도의 풀이과정을 어떻게 서술하고 있는지 살펴보자.

[교과서 G]

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 제 5항을 구하는 알고리즘과 순서도를 만들어 보자.



$a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n + 1$ (단, $n \geq 1$)

① 4를 a_1에 저장한다.

② $3a_1 + 1$의 값을 구하고, 그것을 a_2에 저장한다.

③ $3a_2 + 1$의 값을 구하고, 그것을 a_3에 저장한다.

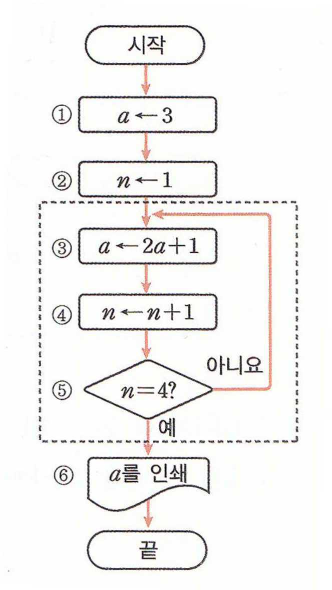
④ $3a_3 + 1$의 값을 구하고, 그것을 a_4에 저장한다.

⑤ $3a_4 + 1$의 값을 구하고, 그것을 a_5에 저장한다.

⑥ a_5의 값을 인쇄한다.

[교과서 I]

$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n + 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_n를 구하는 알고리즘을 만들어 보자.



① 3을 a로 한다.

② 1을 n으로 한다.

③ $2a+1$의 값을 구하여 그것을 a로 한다.

④ $n+1$의 값을 구하여 그것을 n으로 한다.

⑤ ④의 결과에서 $n \neq 4$이면 ③으로 가고, $n = 4$ 이면 ⑥으로 간다.

⑥ a의 값을 인쇄한다.

이때, ③~⑤의 처리는 n이 4가 될 때까지 반복된다.

이와 같이 교과서마다 알고리즘, 순서도의 용어 정의에 있어서 서로 다르게 두는 곳이 많았다. 순서도의 용어에서도 교과서 C 에서는 '놓는다' 고 표현하였고, 교과서 G 에서는 '저장하다', 교과서 I 에서는 '∼한다' 고 표현하고 있었다.

(4) 수열의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$이 a로 수렴하는 것의 일반적 정의는 $\varepsilon-\delta$법에 의하여 주어지는데, 고등학교 교육과정에서 이것을 다루는 것은 무리임에 틀림없다. 따라서 고등학교에서 a는 n이 한없이 커지고, a_n의 값이 a에 한없이 가까워질 때 a를 수열 $\{a_n\}$의 극한값이라 하고

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

로 나타낸다. 또한 수렴하지 않는 수열을 발산한다고 보고 있다.

무한수열의 극한에서 찾을 수 있는 대표적 개념혼동은 '진동'하는 수열을 발산하는 것으로 보는 것이다. 예를 들면 다음과 같다.

대부분의 교과서에서는 무한수열 $\{a_n\}$의 수렴과 발산에 대하여 다음과 같이 설명하고 있었다.

$$\text{[1] 수렴 : 극한값 } \alpha\text{를 갖는다} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

$$\text{[2] 발산}\begin{cases} \text{양의 무한대로 발산,} & \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \\ \text{음의 무한대로 발산,} & \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \\ \text{진동} \end{cases}$$

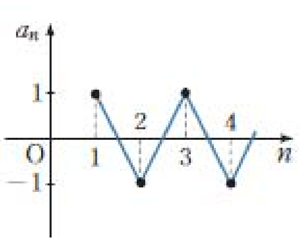
이처럼 무한수열 $\{a_n\}$의 분류를 수렴하는 수열과 양의 무한대로 발산하는 수열, 음의 무한대로 발산하는 수열, 진동하는 수열로 나누고 이에 대하여 정의하고 있었다. 수렴과 발산의 정의에 대해서는 앞에서 다루었으므로 생략하고 교과서에 나온 진동의 정의에 대해 써보면 다음과 같다.

[교과서 F]

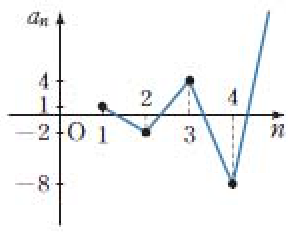
두 무한수열

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n-1} \cdots\cdots \text{①}$$
$$1, -2, 4, -8, \cdots, (-2)^{n-1} \cdots\cdots \text{②}$$

에 대하여 n이 한없이 커짐에 따라 이들 수열의 항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 각각 다음과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림1]에서 무한수열 $\{(-1)^{n-1}\}$은 n이 한없이 커질 때, 일반항 $(-1)^{n-1}$의 값이 1과 -1이 교대로 나타나므로 일정한 수에 가까워지지 않는다.

[그림2]에서 무한수열 $\{(-2)^{n-1}\}$은 n이 한없이 커질 때, 일반항 $(-2)^{n-1}$의 절댓값이 한없이 커지고 그 부호는 양과 음이 교대로 나타났음을 알 수 있다.

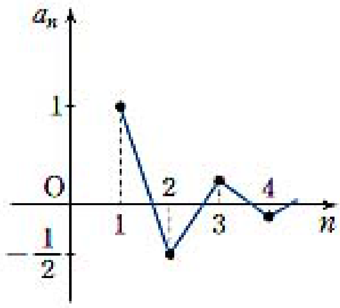
이와 같이 무한수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n이 일정한 값에 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않을 때, 수열 $\{a_n\}$은 진동한다고 한다.

이제 각 교과서에서 무한수열 $\{a_n\}$의 수렴과 발산의 정의를 어떻게 다루고 있는지 살펴보겠다. 이들의 교과서를 4가지로 분류하여 비교해보고자 한다.

첫 번째, 진동을 발산에 넣고 진동하는 수열 중에서 수렴하는 수열을 예로 들고 별다른 설명을 하지 않은 교과서의 본문은 다음과 같다

[교과서 F]

무한수열 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, \cdots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \cdots$에 대하여 n이 한없이 커짐에 따라 이들 수열의 항의 값이 변하는 상태를 그림으로 나타내면 다음과 같다. n이 한없이 커짐에 따라 수열의 일반항 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

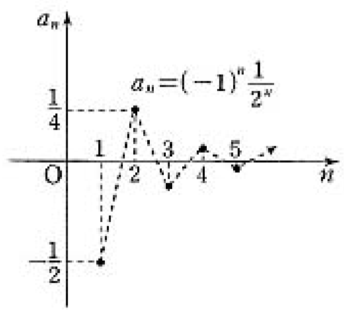


이와 같이 진동이면서 수렴하는 수열을 교과서 본문에 제시하여 놓고, 교대나 진동이라는 설명은 제시하지 않은 채 일반항 a_n이 어떤 값에 가까워지는 것만 그래프로 보이고 있었다. 이처럼 직관적으로 이해할 수 있는 수준의 수렴하는 수열의 예로 진동하는 수열을 사용한 교과서 A, C, D, F, G, M 이 있었다.

두 번째, 진동을 발산에 넣고 진동하는 수열 중에서 수렴하는 수열을 예로 들고 그에 맞는 설명을 한 교과서의 본문은 다음과 같다.

[교과서 K]

무한수열 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, (-1)^n\frac{1}{2^n}, \cdots$ 의 극한값을 구하여라.



오른쪽 그림에서 a_n은 n이 홀수일 때는 음의 값, n이 짝수일 때는 양의 값을 번갈아 가지면서, n이 한없이 커질 때 그 값이 0에 가까워짐을 알 수 있다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=0$$

이와 같이 교대나 진동, 양의 값과 음의 값을 번갈아 가면서 가진다는 표현을 쓰면서, 일반항의 값이 어떤 값에 수렴하는 수열 즉, 진동하면서 수렴하는 수열을 제시한 교과서 B, E, I, K 가 있었다. 이들의 교과서에서는 진동하면서 수렴한다는 표현을 풀이과정에서 정확히 쓰고 있었지만 정의에서는 진동을 발산으로만 놓아, 학생들에게 개념상의 혼란을 가져올 가능성이 있다.

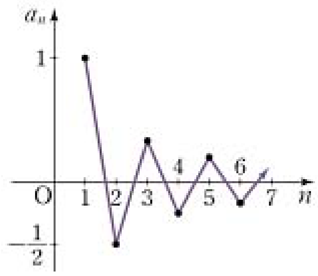
세 번째, 진동을 발산으로 넣고 진동하는 수열 중에서 수렴하는 수열을 '수학으로 세상보기', '문제 만들기'에서 제시함으로써 심화학습으로 다룬 교과서의 본문은 다음과 같다.

[교과서 H]

다음 학생들의 대화에서 잘못된 부분을 찾아보고, 수학 용어와 일상 용어의 차이점을 말해 보아라.

지형) 시은아, 내 생각에 수열 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots$ 은 진동하는

것 같아. 다음 그래프를 보면 수열의 각 항이 왔다 갔다 하잖아. 진자가 왔다 갔다 하면서 진동하는 것처럼 말이야.



시은) 진동은 수열이 발산할 때 쓰는 용어잖아. 수열 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots,$ $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots$은 0에 수렴하는걸?

[교과서 J]

《문제 만들기》

무한수열 $\{1+(-1)^n\}$에서 -1대신 다른 숫자를 대입하여 수렴과 발산을 조사하는 문제를 만들고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

이와 같이 무한 수열의 수렴과 발산을 정의한 후, 진동에 대해서 '수학으로 세상보기', '문제 만들기'와 같은 심화학습 문제로 제시하여 학생 스스로 진동수열의 수렴과 발산에 대한 정확한 개념획득이 가능하도록 한 교과서 H, J 가 있었다.

네 번째, 앞서 살펴본 13종의 교과서에서 발산의 범주로 '진동'을 다루지 않고 정의한 교과서도 있는데, 예를 들면 다음과 같다.

[교과서 L]

무한수열 $\{a_n\}$에 대하여

(1) α에 수렴하는 경우 : $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (α는 상수)

(2) 발산하는 경우

① 양의 무한대로 발산 : $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

② 음의 무한대로 발산 : $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

③ 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지 않는 경우

라 제시하였다. 앞에서 말한 진동의 정의와 같이 무한수열 $\{a_n\}$이 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는 경우 '진동'이라는 말 대신에 정의에 충실하도록 '양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지 않는 경우' 라 정의하였다. 그런 다음 참고사항으로 무한수열 $\{(-1)^n\}$, $\{(-2)^{n-1}\}$ 과 같은 수열을 '진동'이라 한다고 명시해주었다.

III.3 수열과 알고리즘, 수열의 극한 단원에서의 개념혼동 요인분석

첫째, 수열의 정의를 살펴보면, 각 교과서마다 고등학교 수준의 수열의 정의로써 "일정한 규칙에 의하여 차례로 나열된 수의 열"로 정의하는 것은 모두 동일하였다. 이러한 정의와 함께 제시한 수열의 구체적인 예를 일반화하여 수열의 수학적 정의를 정확하게 기술한 교과서는 A, D, E, H, K, L

이 있었다. 또한 교과서에서 정확한 수열의 정의를 본문이 아닌 심화학습에서 다루고 있는 교과서로는 C, F, G 교과서가 있었고, 정확한 수열의 정의에 대한 언급 없이 "일정한 규칙에 따라 나열한 수의 열" 로 정의한 뒤, 그러한 예를 들고 있는 교과서로 B, I, J, M 교과서가 있었다.

이와 같이, 앞에서 살펴본 교과서에서 볼 때, 수열의 일반적 정의를 고등학교 교과서에서 다루는 것이 쉽지 않은 일임을 짐작할 수 있다. 그렇다고 해서 "일정한 규칙에 의하여 나열된 수의 열"이라고 하는 정의를 선행하는 것은 "수열이란 반드시 규칙을 가져야 한다. 또는 수열은 식으로 나타낼 수 있어야 한다." 는 제한된 수열 개념을 형성시켜 학생들이 보다 일반적인 수열을 이해하는데 방해가 될 수 있다.

둘째, 수학적 귀납법을 살펴보자. 수학적 귀납법의 원리는 대부분의 고등학교 교과서에서 일률적으로 다뤄지고 있는 것을 알 수 있었다. 이들 교과서 A, D, E, H, I, L, M 에서는 초항이 $p(1)$에서 시작하는 경우뿐만 아니라 일반화된 수학적 귀납법의 원리로 $p(\ell)$을 제시하고 있어 다양한 문제들을 이해하는데 도움을 주고 있었다. 그러나 이 같은 내용을 본문에서 다루지 않고 보조 자료로서 제시한 교과서 C, F 와 초항을 $p(1)$로 제시하지 않고 바로 $p(\ell)$부터 시작하는 교과서 B, J, K 도 있었는데, 이는 학생이 수학적 귀납법의 원리를 명확히 이해하는데 있어서 어려움을 느낄 수 있다. 또한 교과서 G 와 같이 모든 자연수 에 대하여 성립하는 수학적 귀납법의 원리만을 다루는 것은 학생의 이해에 있어 제한적 사고의 위험이 있다.

셋째, 알고리즘과 순서도의 정의는 각 교과서마다 조금씩 다른 표현으로 정의를 서술하고 있음을 알 수 있었다. 또한 순서도의 풀이과정도 각기 달랐는데, 교과서 C 에서는 '놓는다' 고 표현하였고, 교과서 G 에서는 '저장하다', 교과서 I 에서는 '∼한다' 고 표현하고 있었다. 이처럼 통일되지

않은 용어의 설정은 학생들로 하여금 개념혼동을 갖게 만드는 요인이 될 것이다.

넷째, 수열의 수렴과 발산의 정의에서는 대부분의 교과서에서 '진동'을 발산의 범주에 포함하고 있었다. 하지만, 진동하면서 수렴하는 수열에 대해서는 각각 다르게 제시하고 있었다. 이들을 분류하여 보면, 진동하면서 수렴하는 수열을 본문에 제시 후, 진동이라는 설명을 넣지 않은 교과서 A, C, D, F, G, M 이 있었고, 수렴하는 진동 수열에 대해서 예시를 든 후, 교대나 진동, 양의 값과 음의 값을 번갈아 가진다는 표현으로 정확히 설명한 교과서 B, E, I, K 가 있었다. 또한 심화학습 문제를 통하여 진동수열의 수렴과 발산에 대한 정확한 개념획득이 가능하도록 한 교과서 H, J 가 있었으며, 앞에서 열거한 대부분의 교과서와는 다르게 발산의 범주로 '진동'을 다루지 않고 정의한 교과서 L 이 있었다.

많은 교과서에서 진동하는 수열을 발산하는 수열의 한 종류로 기술하고 있었으나, 몇몇 교과서가 지적하고 있듯이 진동하는 수열이 다 발산하는 것은 아니다. 그러므로 진동을 발산의 범주에 포함하는 것은 학생들에게 잘못된 개념을 가르치는 결과를 가져올지 모르며, 개념상의 혼란을 야기할 수 있다.

IV 결론 및 제언

본 논문에서는 수열과 급수에 대한 역사적, 이론적 배경을 알아보고, 2007년 개정 교육과정의 수학과 선택과목 중 수학 I 교과서에서 수열의 정의와 수학적 귀납법의 원리, 알고리즘과 순서도, 수열의 극한을 중심으로 비교·분석하였다. 그 내용을 정리해보면 다음과 같다.

첫째, 수열의 정의는 대부분의 교과서가 “일정한 규칙에 의하여 차례로 나열된 수의 열”을 수열이라고 정의하였다. 사실 고등학교 수준에서 수열의 엄밀한 정의를 다루는 것은 무리한 일이다. 그러나 수열을 단순히 “일정한 규칙을 가진 수의 열”로 정의하는 것은 그렇지 않은 수열을 만났을 때 학생들을 당황하게 하며, 또 $\{2n-1\}$, $\{3^n\}$ 과 같이 하나의 식으로 주어진 것만이 수열이라는 잘못된 인식을 심어주게 된다. 따라서 수열의 일반적인 정의를 소개는 하되, 지나치게 강조하지는 않는 절충안이 고등학교 교과서에서 필요한 것이라 본다.

둘째, 수학적 귀납법의 경우 대부분의 교과서가 통일된 방법으로 수학적 귀납법의 원리를 설명하고 있었다. 따라서 이 부분에 관하여 학생들을 혼란하게 할 요소는 없었다고 판단된다. 하지만 수학적 귀납법을 이용하여 어떤 명제가 참임을 밝히는 과정에서 둘째 이상의 항에 대하여만 성립하는 것을 증명하는 경우, 수학적 귀납법(2)를 어떻게 소개할지에 대해서는 약간의 주의가 필요하다고 생각된다.

셋째, 알고리즘과 순서도는 정확한 수학적 용어로 표현하는 방법이 없어서 교수방법에 있어서도 어려움이 많고 학습자들 역시 이해하기 어려운 편이었다. 또한 알고리즘이 일의 원리 순서를 나타낸 것이라면 처리 순서는 개인마다 다를 수 있으므로 통일된 알고리즘을 만들기 어렵다. 이것이

학생들로 하여금 알고리즘을 이해하기 어렵게 할 뿐만 아니라, 순서도를 이해하고 작성하는데 큰 장애요인이 됨을 알 수 있다. 그러므로 알고리즘과 순서도의 단원은 가급적 용어를 통일하고 그 처리과정을 보다 명확하게 하는 노력이 필요할 것이다.

넷째, 무한수열의 수렴과 발산이 매우 다루기 어려운 주제임은 역사적 사실들이 이를 입증하고 있다. 고등학교 과정에서 무한수열의 수렴과 발산을 직관에 의존하여 다룰 수밖에 없는 이유는 여기에 있다고 본다. 그럼에도 불구하고 수렴과 발산에 대한 용어가 교과서마다 차이가 난다는 것은 매우 큰 문제가 아닐 수 없다. '진동'이라는 용어가 그 예인데, 원래 이 용어는 교육과정에 제시되지 않은 용어이다. 진동하는 수열 중에는 수렴하는 것이 명백히 존재하는데도 진동을 발산의 범주에 포함시키는 것은 오류일 뿐만 아니라 학생들에게 매우 큰 혼란을 야기시킨다. 따라서 발산의 한 분류로 '진동'을 제시하기 보다는 정확한 의미의 발산개념을 제시할 필요가 있다고 생각된다.

위와 같이 교과서를 비교·분석한 결과 13종의 수학Ⅰ교과서가 모두 똑같은 개념과 서술방식에 의해 써진 것이 아니라, 각각 특색 있는 방법에 의해 교과서가 써진 것을 알 수 있었다. 이처럼 교과서마다 다른 방식으로 구성되어진 이유로는 교수학적 변환을 들 수 있다. 교수학적 변환은 교육과정의 개발자, 교과서 저자, 교사 등의 다양한 주체에 의해 이뤄지게 되며, 이때 주의해야할 점은 지식의 파손성에 관한 것이다. 만약 본래의 의미가 손상된 지식을 학생들에게 가르치게 된다면 그러한 교육은 실패한 교육이 될 것이고, 잘못된 지식을 습득하게 된 학생들은 후속 학습에서도 지속적인 오류를 일으키게 될 것이다. 따라서 앞에서 발견한 교과서들의 문제점에 대하여 교과서 저자들의 섬세한 교수학적 변환이 요구되는 바이다.

참고 문헌

[1] 교육인적자원부, 고등학교 교육과정 I , 교육인적자원부, 2007.

[2] 김기원 외 1인, 고등학교 수학에서 수열의 극한개념의 지도에 관한 연구, 수학교육, Vol.42 No.5 707-723p, 2003.

[3] 김남희 외 5인, 수학 교육과정과 교재연구, 경문사, 2009.

[4] 김수환 외 13인, 고등학교 수학 I , (주) 교학사, 2010.

[5] 김응태 외 1인, 정수론, 이우출판사, 1987.

[6] 김해경 외 8인, 고등학교 수학 I , 더 텍스트, 2010.

[7] 박선화, 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구, 서울대학교 대학원, 1998.

[8] 박임숙, 고등학교에서 수열의 극한 개념의 지도에 관한 소고, 수학교육논문집, Vol.18 No.1 287-394p, 2002.

[9] 양승갑 외 7인, 고등학교 수학 I , (주) 금성출판사, 2010.

[10] 양영오 외 1인 옮김, Carl B. Boyers 외 1인, 수학의 역사 상, 경문사, 2000.

[11] 양영오 외 1인 옮김, Carl B. Boyers 외 1인, 수학의 역사 하, 경문사, 2000.

[12] 우무하 외 4인, 고등학교 수학 I , (주) 박영사, 2010.

[13] 우정호 외 7인, 고등학교 수학 I , (주)두산동아, 2010.

[14] 우정호 외 5인, 고등학교 수학 I 교사용지도서, (주)대한교과서, 2003.

[15] 유희찬 외 11인, 고등학교 수학 I , (주)미래엔 컬쳐그룹, 2010.

[16] 윤재한 외 14인, 고등학교 수학 I , 더 텍스트, 2010.

[17] 이강섭 외 3인, 고등학교 수학, (주) 지학사, 2010.

[18] 이동원 외 6인, 고등학교 수학 I , 법문사, 2010.

[19] 이만근 외 3인, 고등학교 수학 I , 고려출판, 2010.

[20] 장경윤 외 2인 옮김, Dirk Jan Struik 저, 간추린 수학사, 경문사, 2004.

[21] 정동명 외 1인, 실해석학 개론, 경문사, 2009.

[22] 정상권 외 8인, 고등학교 수학 I , (주) 금성출판사, 2010.

[23] 조성진 외 2인, 이산수학, 경문사, 2009.

[24] 한인기, (교사를 위한) 수학의 역사, 교우사, 2003.

[25] 황석근 외 12인, 고등학교 수학 I , (주) 교학사, 2010.

[26] 황선욱 외 12인, 고등학교 수학 I , (주) 좋은책 신사고, 2010.

[27] 황선욱 외 12인, 고등학교 수학 I 교사용지도서, (주) 좋은책 신사고, 2010.

[28] 황혜정 외 5인, 수학교육학 신론, 문음사, 2008.

[29] Apostol, Mathematical Analysis, 2nd edition, Addison Wesley , 1981.

ABSTRACT

Factors Analysis of Conceptual Confusion for Sequences and Limits in High School

Choi, Han Na
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education
Sungshin Women's University
Supervised by Kang, Byung Gai Ph. D.

The theory of sequences is the preceding concept of calculus which can be applied in almost all fields that of the modern economics, natural sciences, engineering and it is very closely reated with our everyday life. In elementary and middle school mathematics, there appeared a lot of sequences without any conceptualization of it. But the concept of sequences is handled in an optional course of high school mathematics for the first time. This array of curriculum says that the concept of sequences is not easy to handle in teaching and learning.

It is practically difficult to deal with exact definitions of sequences, limits of sequences and any other concepts related to sequences in high school mathematics. So it is common to agree that it is appropreate to deal those concepts in somewhat intuitive view in high school mathematics. But as a

result, there have been a variety of causes which arouse conceptual confusions in those fields.

In this thesis, we investigate some of conceptual confusions which our students may have in the field of sequences, limit of sequences, mathematical inductions, algorithms and so on. The materials we use in our study are the mathematics I textbooks. We analysize our textbooks to find if there are any causes which arouse conceptual confusions in those fields.

As a result, the following conclusions were obtained.

First, it is not so easy to introduce the precise definitions of sequences in the high school level and so we need some alternative which introduces a general definition of sequences, but does not emphasize it.

Second, the concept of mathematical induction has unified explanations in most textbooks but we need additional introduction of mathematical induction(2).

Third, the theory of algorithms and flowcharts do not have any unified concepts, and so our studnets may have difficulies to grasp the precise meaning of them.

Fourth, the concept of convergence and divergence of infinite sequence is relied on somewhat intuitive aspects. Above all, in most textbooks, alternating sequence is classified in the realm of divergent sequence, which may arouse a big confusion in the concept of limit.