印 昞 植 敎授指導
碩士學位 請求論文

Polya의 이론을 적용한 학습자료 개발

-중학교 대수영역 중 '문자와 식'을 중심으로-

2005

誠信女子大學校 敎育大學院

敎育學科 數學敎育專攻

金 英 淑

Polya의 이론을 적용한
학습자료 개발

-중학교 대수영역 중 '문자와 식'을 중심으로-

印 昞 植 教授指導

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

2005年 5月

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

金 英 淑

認 准 書

金 英 淑의 碩士學位 論文을 認准함

審査委員 ______________ 印

審査委員 ______________ 印

審査委員 ______________ 印

誠信女子大學校 敎育大學院

논문개요

Polya의 이론을 적용한 학습자료 개발

-중학교 대수영역 중 ‘문자와 식’을 중심으로-

이 연구의 목적은 Polya의 이론을 적용해서 중학교 대수영역 중 ‘문자와 식’의 학습 자료를 개발하는 것이다. 이를 통해 현행 활용지도의 문제점을 수정・보완하고 선생님들에게는 좀 더 바람직한 방향으로의 교수 방법을 구현하여 수학 수업에 도움을 주고자 한다.

수학에서 문제란 한 눈에 풀이를 할 수 없는 것이다. 이런 문제들은 보증되거나 완벽하게 결정된 풀이의 과정을 얻기에 쉽지 않다. 그러나 이 과정은 문제 풀이에서의 결과보다 중요하다.

Polya의 문제해결 4단계를 적용한 몇 개의 예가 있다. Polya의 문제해결 4단계는 문제의 이해, 계획의 작성, 계획의 실행, 반성단계로 구성되어 있다. Polya의 이론은 문제 해결 과정을 찾는데 도움을 줄 것이다.

본 연구에서는 Polya의 이론을 근거로 학습 자료를 개발하였다. 그리고 제 7차 교육과정을 분석하여 문자지도의 방향과 목적을 설정하였다. 또한 개발한 학습 자료에 대한 교사의 호응도를 분석하여 학습 자료를 수정・보완하였다.

목 차

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성

제 7차 교육과정에서 말하는 21세기의 지식 기반, 정보화 기반 사회에서의 학교 교육의 중점은 단순 기능인의 양성보다는 자기 주도적으로 지적가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성에 있다. 학생들에게는 논리적이고 창의적인 사고력을 기르기 위하여 깊게 생각할 수 있는 시간이 필요하다. 수학교육은 수학적 개념을 어떻게 형성하고, 원리나 법칙을 어떻게 발견하는가에 따라서 학생들에게 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 토대로 탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학을 사용한 또는 수학을 통한 정보를 처리하고 교환하는 능력, 실생활이나 다른 교과 영역에서 수학적 지식을 사용하여 문제를 구성하고 해결하는 문제 해결력, 창의력, 수학적으로 사고하는 성향, 사고의 유연성, 자신감 등의 '수학적인 힘'을 길러 주는 것이다.

현행의 수학교육에서는 수학적 표현을 전적으로 교과서에 의존하고, 계산이나 문제풀이 등의 강의 위주의 수업이 이루어지고 있어서 수학을 다른 자연 과학과는 달리 실험성이 필요 없는 학문으로 여겨지게 하며 또한 단조로운 수업이 되어서 학생들의 흥미를 상실시키게 하는 경향이 있다. 그리고 한정된 수업 시간 내에 많은 학생들이게 주어진 교과 과정을 가르치기 위해서 어렵거나 계산기간이 많이 요구되는 문제와 복잡한 모형을 만들어야 하는 문제는 피하게 되는 실정이다. 그러므로 학생들은 단순한 모델에서 조차도 필요에 따른 적절한 변형을 경험해 볼 기회가 거의 없으므로 모델링이나 현상에 적용하는 등의 응용력이 떨어진다. 또한 입시위주의 제도가 교사들에게 수학의 실용적인 면을 살리지 못하게 하는 요인

으로 작용하여 교과서 외적인 자료의 준비는 거의 드문 상황이다. 그러므로 실생활을 이용한 수학문제에 있어서 특히 활용문제라면 대단히 어려워하고 있는 것이 현 실정이라고 할 수 있다.

앞으로 수학을 공부하게 될 모든 학생들이 수학에서 가정 어려워하는 것이 문장제의 활용 문제이다. 또한 교사들도 학생들에게 외면당하고 있는 활용문제를 가르치려고 노력한다는 것은 그리 쉬운 일은 아니다. 그렇다면 활용문제를 어려워하는 원인은 과연 어디 있다고 할 수 있을까?

첫째, 늘 접해오던 수학 문제는 단순히 식이나 그래프만 주어져도 쉽게 풀 수 있는 문제라고 할 수 있다. 하지만 활용 문제는 주어진 문제를 읽고, 그것으로부터 식이나 그래프, 그림 등을 유도하는 문장제이다. 즉, 주어진 문제를 익숙한 수학적인 형태로 다듬은 다음에야 학생들이 비로소 자주 접하던 문제의 형태가 나오는 것이다. 이러한 현상은 학생들에게 활용문제가 주어졌을 때 문제를 풀려고 시도조차 하지 않다가 그 문제에 적당한 식이나 풀이 방향을 교사가 세워준 다음에는 학생들이 교사의 별 도움 없이 쉽게 문제를 푸는 것을 보면 알 수 있다. 즉, 문장제의 활용문제는 자주 접하던 교과서의 대부분의 문제나. 문제집에서 다루어지는 대부분의 문제 형태와는 다소 다르다는 점이다.

둘째, 교사의 지도면에서 학생들이 처음 활용문제를 접할 때, 학생들이 직접 생각할 수 있는 시간을 주기보다는 문제를 읽고, 불과 몇 초 지나면 바로 "이건 이렇게 푸는 거다."라고 말하는 것이다. 죽 학생이 그 문제를 느끼고 생각할 시간을 주지 않는다. 학생들의 수업에 대한 가장 큰불만은 선생님이 문제를 풀어 볼 여유를 주지 않는다는 것이다.

셋째, 학생에게 활용문제가 주어졌을 때 그 학생은 어찌할 줄 몰라하며 그저 연필만 들고 있다가 그리곤 곧바로 연필을 내려놓는 것을 너무나 쉽게 볼 수 있다. 즉 학생 스스로가 활용 문제뿐 아니라, 수학 문제자체에

흥미가 없기 때문에 문제를 풀려고 하는 의지 자체가 결여되어 있기 때문이다. 이러한 수업은 교실에 학생들이 가득 차 있지만. 교사는 텅 빈 교실에서 혼자 수업을 하고 있는 셈이나 다름이 없다.

넷째, 우리나라의 수학교육의 현실에 대하여 앞에서도 잠깐 논하였지만, 학습량이 너무 많아 활용문제 하나 하나를 학생에게 개별지도 하기에는 주어진 시간이 너무 부족하다는 것이다.

따라서 본 연구의 목적은 Polya의 문제 해결전략을 활용하여 학생들로 하여금 문장제의 활용문제에 대한 두려움을 없애고, 수업 중 교사의 설명을 피동적으로 받아들이던 이제까지의 수학학습 습관에서 탈피하여 수학학습에 능동적으로 참여하도록 유도하고자 함이다. 또한 Polya의 문제 해결전략을 활용하여 학생들의 문제풀이 지도에 조금이나마 도움을 주어 학생들의 흥미를 유발시켜 학습효과를 향상시키고, 창의력과 문제 해결력을 신장시켜 활용문제에 대한 학습태도의 변화를 기대하고자 한다.

2. 연구 방법 및 절차

1) 문헌 연구

Polya의 문제 해결전략 이론을 살펴본다.

2) 자료개발

본 연구에서는 제 7 차 교육과정의 중학교 수학 중 ‘문자와 식’을 중심으로 살펴보겠다. 이런 과정을 통하여 현행 ‘문자와 식’의 문제점을 살펴보고 Polya의 문제 해결 전략을 도입한 학습자료를 개발하기 위해 다음과 같은 절차를 밟는다.

(1) 제 7 차 교육과정의 중학교 수학 중 '문자와 식'의 내용 및 교육과정을 분석한다.

(2) 현 교육과정의 목표수준을 고려하여 개발하려는 학습자료의 학습목표와 구성 체계를 설정한다.

(3) 설정된 목표와 구성 체계에 맞는 학습자료의 초안을 개발한다.

(4) 현직 교사를 대상으로 개발한 학습자료에 대한 호응도를 조사한다.

(5) 개발한 학습자료를 수정·보완한다.

Ⅱ. 문헌 연구

본 장에서는 Polya의 이론을 통해 학습자료 개발에 대한 이론적 토대를 마련하고자 한다. 그리고 Polya의 이론을 도입하여 중학교 수학 중 ‘수와 식’의 학습자료 개발 구성 체계에 대한 시사점을 얻고자 한다.

1. Polya의 문제해결 이론

1) Polya의 수학적 발견술

Polya는 수학을 완성된 산물로서의 형식적인 기성 수학과 구성 도중에 있는 활동으로서의 비형식적 수학으로 구분하면서 ‘발생 상태 그대로의 수학’의 교육적 중요성을 강조하고 있다. ‘발생 그대로의’ 수학과 탐구 양식으로서의 수학이란 ‘그것을 통하여 사물을 보는 눈’이며, ‘그것으로 무엇인가 할 줄 알아야 할’ 그 무엇이다. Polya의 이러한 탐구 양식으로서의 수학을 보다 중시하고 있는 것이다. 또한 그는 수학적 지식을 ‘정보’와 ‘방법적 지식(know-how)'으로 구분하고 있기도 한데 체계적인 기성 수학은 정보로, 실험적이고 귀납적인 탐구 양식을 수학의 본질적 측면에서 보는 Polya는 수학이 무엇인가를 기술함에 있어서 내용보다는 그 사고과정에 초점을 맞춘다. 즉, 수학적 탐구는 논증적 추론 뿐 아니라 개연적 추론에 의해서 이루어진다는 것이다. Polya에 따르면 연역적인 것으로 특징지워지는 수학은 단지 수학의 최종 완성품에 불가할 뿐이며, 창조 과정에 있는 수학은 연역적인 패턴을 따르지 않고 개연적 추론 패턴을 따르므로 학교 수학에서는 개연적 추론을 중시해야 한다. 결국 Polya는 수학교육의

목적이 수학적으로 '사고하도록 가르치는 것'이며 이는 단지 정보적 지식을 부여하는 것이 아니라 부여된 정보적 지식을 사용하는 능력, 곧 방법적 지식과 바람직한 사고 태도와 습관을 개발하는 것임을 말하고 있다. 사고 교육을 지향하는 수학 교육은 문제 해결 능력의 개발을 주요 목표로 하지 않을 수 없는 것이다. Polya가 문제를 해결하는 능력과 방법적 지식의 개발을 중시하고 수학적 발견술을 교육적 입장에서 부활시킨 것은 바로 이러한 교육 목적을 가지고 있기 때문이라고 말할 수 있다.

Polya의 문제해결 교육론의 핵심은 수학적 발견술(heuristics)에 있다고 할 수 있다. 발견술이란 아주 분명하게 규정되어 있지는 않은, 흔히 대략적으로 서술되어 있을 뿐 상세하게 제시되어 있지 않은 연구 분야의 명칭으로 발견과 발명의 방법과 규칙을 연구하는 것을 목표로 한다. Polya는 교육적 측면에서 현대적이고 조심성 있는 형식으로 발견술을 부활시키고자 시도하였으며, 문제풀이 과정 특히 그러한 과정에서 전형적으로 유용한 정신 조작을 이해하려고 노력하였다. 이를 상식적인 질문과 권고 형태의 대화체로 표현하여 적절한 순서로 배열하였다. 즉, Polya는 문제를 해결하는 일반적인 단계에 대한 제안을 하고 있는데, 그러한 문제해결의 4단계 문제 이해, 계획 작성, 계획 실행, 반성의 각 단계에 나오는 발문과 권고는 Polya의 발견술의 핵을 구성하고 있다. Polya(1986)는 그러한 발견술을 분명한 용어로 하나하나 기술하기보다 구체적인 보기를 통해 그것을 보여주는 방식을 택하고 있다. 그의 발견술에는 (1) 그림을 그리고 적절한 기호 붙이기 (2) 문제의 변형 (3) 정의로 되돌아가기 (4) 분해와 재결합 (5) 유추하기 (6) 일반화와 특수화 (7) 보조요소 도입하기 (8) 거꾸로 연구하기 (9) 방정식 세우기 등이 있다. (정은실,1995)

Polya의 발견술의 특징 중에서 중요한 것은 반성 과정을 강조한다는 점이다. Polya에게 있어 문제를 해결하는 능력은 이전에 해결한 문제로부터

실제적이고 교육적으로 학습한 것이 무엇이냐에 크게 의존한다. 따라서 문제해결 능력의 발달은 항상 자기가 푸는 문제에 주의를 집중하고 반성하는 데에 의존한다는 주장은 그의 문제해결 교육론의 핵심과 직결되는 것이다.

2) Polya의 4단계 문제해결 과정과 전략

Polya는 수학적 문제해결 과정을 다음과 같이 4단계로 구분하였다.

문제 이해	➡	계획의 작성	➡	계획의 실행	➡	반성

학생들은 스스로 이러한 문제해결 과정을 경험하는 가운데 자율적인 문제 해결자가 되어야 한다. 학생들의 문제해결 활동을 효과적으로 자연스럽게 돕기 위해서, 교사는 학생의 사고를 자극하고 이끌어 주는 적절한 수준의 발문과 권고를 사용해야 한다. 문제 해결의 각 단계에서 사용할 수 있는 발문과 권고에는 다음과 같은 것이 있다 (황혜정 외,2003).

■ 문제의 이해(Understanding the problem)

문제의 이해 단계란 문제에서 요구하는 바를 파악하는 단계이다. 이 단계에서는 문제를 해결하려는 욕구를 가지고 바른 문제해결을 위해서 문제를 정확하게 이해해야 한다. 이해가 되지 않는 문제에 답을 하는 것은 어리석은 일이다. 문제를 이해하고자 한다면 문제의 언어적 표현을 이해하고 문제의 주요 부분 즉, 미지의 것, 자료, 조건 혹은 가정과 결론을 명확히 인식해야한다. 이 단계를 발문과 권고로 제시하면 다음과 같다.

· 미지의 것은 무엇인가? 자료는 무엇인가? 조건은 무엇인가?

· 조건은 만족될 수 있는가? 조건은 미지의 것을 결정하기에 충분한가? 불충분한가? 또는 모순되는가?

· 그림을 그려보아라. 적절한 기호를 붙여보아라.

· 조건을 여러 부분으로 분해하라. 그것을 써서 나타낼 수 있는가?

■ 계획의 작성(Devising a plan)

계획의 작성 단계란 문제의 해를 구하기 위한 풀이 방법을 고안해 내는 과정이다. 문제에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하여 문제해결에 도움이 될 만한 여러 가지 전략을 구사하는 경우가 많다. 문제에 대한 이해로부터 계획을 세우게 되기까지의 길은 얽혀 있을 수 있다. 계획에 대한 생각은 점진적으로 떠오를 수도 있고 시행착오나 망설임을 거친 뒤에 섬광처럼 번쩍이는 생각이 떠오를 수도 있다. 학생이 그런 생각을 할 수 있도록 하기 위해 제기 할 수 있는 발문과 권고는 다음과 같다.

· 전에 그 문제를 본 일이 있는가? 약간 다른 형태로 된 같은 문제를 본 일이 있는가?

· 관련된 문제를 알고 있는가? 유용하게 쓰일 수 있을 듯한 어떤 사실이나 정리를 알고 있는가?

· 미지인 것을 잘 살펴보아라. 친숙한 문제 중 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라.

· 관련된 문제를 전에 풀어본 적이 있는데, 그것을 활용할 수 있을까?

· 문제를 달리 진술할 수 있을까? 좀 더 다르게 진술할 수 있을까?

· 만일 제기된 문제를 풀 수 없다면, 먼저 어느 정도 그와 관련된 문제를 풀어보아라.

· 자료는 모두 사용하였는가? 조건은 모두 사용하였는가? 문제에 포함되

어 있는 핵심적인 개념은 모두 사용하였는가?

■ 계획의 실행(Carrying out the plan)

이 단계에서는 앞에서 세운 계획에 따라 실제적인 실행을 하게 된다. 계획을 실행할 때는 세부적인 사항까지 확실하게 점검해야 한다. 이러한 실행 과정에서는 주로 알고리즘에 따른 계산이 수반된다. 계산을 할 때는 실수하지 않도록 매 단계를 검산하는 것이 중요하다.

· 풀이의 각 단계를 조심스럽게 실행 하도록 하라.
· 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가?
· 그것이 옳다는 것을 설명할 수 있는가?

■ 반성(Looking back)

반성 단계는 완성된 풀이를 검토하고 그 결과와 결과에 이르는 과정을 재점검해 보는 단계이다. 이는 획득한 지식을 견고히 하고 문제해결에 대한 전체적인 조망을 얻을 수 있다는 점에서 중요하다. 반성을 통해 이해를 깊게 할 수 있고, 풀이를 개선할 수 있으며 다양한 시각에서 문제를 바라볼 수 있다.

· 결과를 점검할 수 있는가?
· 풀이 과정을 점검할 수 있는가?
· 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가?
· 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있는가?

이러한 단계를 거쳐 문제를 해결하는데 이 때, 문제해결에 도움이 되는 일반적인 절차나 해법의 단서가 되는 생각, 발견의 실마리를 얻도록 하는 방법 등의 사고 전략을 이용할 수 있다. Polya가 말하는 발견술을 토대로

학교 수학에서 적절히 사용될 수 있는 발견전략을 중심으로 살펴보면 다음과 같다(신성균 외, 1993).

■ 식 세우기

식 세우기 방법은 수학 문제를 풀기 위하여 가장 보편적으로 사용되는 것으로 주어진 조건들 사이의 관계를 만족하는 식을 세워 그것을 해결에 이용하는 전략이다. 일단 식을 옳게 세우면 그 다음 단계들은 거의 기계적으로 진행되고, 답이 정확하게 나오기 때문에 식 세우기 전략은 수학에서 중요한 발견전략이다.

■ 그림 그리기

문제의 상황을 그림으로 나타내 봄으로써 문제의 성립 가능성 판별을 용이하게 해 준다. 즉, 주어진 문제를 막연하게 성립할 것으로 믿고 해결하려고 노력하는 것보다도 그림을 통하여 미지인 것과 주어진 자료와 조건을 만족시키는 대상이 있음을 확신하고 그것을 찾으려고 할 때 실수를 방지할 수 있는 것이다. 이 전략은 주로 문제의 외적 표상을 위하여 사용된다.

■ 표 만들기

문제에 주어진 자료를 표로 나타내게 되면 문제를 쉽게 이해할 수 있기 때문에 대개의 경우 해결 방법을 모색하기 위한 보조 전략으로 사용될 수 있다. 표는 문제에서 주어진 사실이나 관계를 잘 표현해 줄 수 있도록 만들어져야 한다. 표의 틀이 작성되고 난 후, 이 표에 문제에서 주어진 정보를 차례로 기재하고, 계산할 수 있는 것은 계산하여 빈칸을 채우고, 채울 수 없는 곳이나 구하고자 하는 곳을 문자를 사용하여 나타냄으로써 문

제를 해결할 수 있는 식을 유도해 낸다.

■ 예상과 확인

예상과 확인은 미리 답을 예상해 보고 그 답이 문제의 조건에 맞는지 확인해 보는 과정을 반복하여 문제를 해결해 나가는 전략이다. 어떤 문제에 대하여 충분히 생각하고 문제를 충분히 이해한 다음에 떠오른 예상은 그것을 검토해 볼만한 충분한 가치가 있다. 예상을 적절히 검토하면 전체적인 참을 유도해 낼 수 있는 기회가 될 수도 있다.

■ 규칙성 찾기

규칙성 찾기는 문제에 주어진 조건이나 관계에서 분석하여 어떤 규칙성을 찾아내고 이 규칙성을 확대하여 적용해감으로써 문제를 해결하는 전략이다.

■ 단순화하기

어떤 문제는 변수가 많거나 문제 상황이 복잡하여 문제해결 방법을 찾기 어려울 때가 있다. 이러한 경우 변수의 개수를 줄이거나 주어진 문제보다 좀 더 익숙하고 단순한 문제 상황으로 바꾸어 해결하고, 이 해결과정을 본 문제에 적용함으로써 원래의 문제를 쉽게 해결하는 방법을 단순화하기라고 한다.

■ 논리적 추론

논리적 추론은 특수 전략이라기보다는 수학적 문제를 결할 때 사용되는 일반적인 전략이라고 할 수 있지만 여기서는 기능적 측면의 좁은 의미로써 논리적 추론을 뜻한다. 몇 개의 조건 또는 상황을 주고 이에 알맞은

상태를 찾는 문제에서 주로 사용되는 전략으로 수학적 지식을 많이 필요로 하지 않는다.

■ 간접 증명법

일반적으로 어떤 정리를 증명할 때 가정에서 직접 결론을 증명하게 된다. 그러나 직접 정리를 증명하는 것이 곤란할 때 간접적으로 증명하게 되는데 귀류법, 전환법, 동일법 등이 사용된다. 귀류법은 결론을 부정하였을 때 부정된 결론으로부터 가정과 모순되는 사실을 유도함으로써 결론이 참이어야 함을 보이는 방법이다. 분할법은 가능한 경우를 여러 개로 나누어 그 일부가 모순이 됨을 보임으로써 그 외의 것이 참임을 보이는 방법이다. 분할법은 전환법이라고도 한다. 동일법은 어떤 조건을 만족하는 대상이 두 개 있다고 가정하고 그로부터 그 두 대상이 같게 됨을 보이는 방법이다.

2. 문제와 문제해결

1). 문제와 문제해결의 의미

수학에서 문제는 이미 학습한 계산 기능 또는 알고리즘의 구사 능력을 강화하기 위한 연습문제나 단순한 회상에 의해 해결될 수 있는 의문과 같은 것이 아니다. 문제에는 성취해야 할 목표가 있고, 그 목표에 도달하는데 장애물이 있으며, 적어도 문제를 해결하고자 하는 사람에게는 그것을 해결하는데 필요한 알고리즘이 없기 때문에 심사숙고를 요하는 상황을 말한다. 어느 정도의 어려움이 있어야 한다는 것은 문제의 본질에 속한다.

Krulik과 Rudnick(1982)은 문제 해결자에게 요구되는 바에 따라 질문, 연습문제, 문제의 개념을 구분하고 있다.

(1) 질문 : 과거에 학습한 내용을 단순히 기억하는 것만으로 해결될 수 있는 것으로서 회상하는 것과 관계가 깊다.

(2) 연습문제 : 이전에 학습한 기술 또는 알고리즘을 강화하기 위한 연습(drill)과 훈련(practice)을 위한 과정에서의 물음이다.

(3) 문제 : 학습 경험이 처음으로 이루어질 때, 그 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 정보의 수집과 해결 방법의 탐구가 이루어지며 깊은 사고가 요구된다.

한국 교육개발원(1993)은 문제란 그 해결에 이르는 알고리즘이 주어져 있지 않은 과제를 수행하도록 요구되는 상황을 말하며, 문제를 가지고 있다는 것은 문제를 분명히 인식하고 있지만 즉각적으로 달성할 수 없는 문제를 달성하기 위해 적절한 행동을 의식으로 찾고 있는 것을 뜻한다고 하였다.

이러한 문제는 종류에 따라 그 속에 있는 수학적 내용이 다르며, 특히

사용되는 전략이 다르기 때문에 문제해결 지도에 큰 영향을 준다. 따라서 효과적인 문제해결 지도를 위해서 문제의 유형을 구분해 주는 것이 필요하다.

한국교육개발원(1993)은 수학적 문제 해결 능력에 관한 연구에서 많은 수학자들의 분류를 종합하여 문제를 다음 세가지 유형으로 구분하였다.

(1) 정형 문제 : 이미 제시된 일반적인 알고리즘을 회상하고 그 변수에 특별한 수치를 대입하므로써 해결될 수 있는 문제 또는 이미 알려진 전형적인 보기 문제의 해법에 따라 해결할 수 있는 연습문제 등, 소위 교과서적인 문제를 말한다.

(2) 비정형 문제 : 문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르며 문제 해결 전략의 사용이나 공식화되지 않은 독창적인 해결 방법의 사용을 요구하는 진정한 의미의 문제를 말한다.

(3) 실생활 문제 : 취급되는 소재가 학생의 실생활에서 얻어지는 것으로서 수학적 지식과 문제해결 전략들을 실생활 주변에서 부딪치는 여러 가지 문제들을 해결하는 가운데 수학 학습의 의의를 깨닫고 수학 학습의 흥미를 유발시키는데 적절한 문제이다.

문제 해결은 바로 이러한 문제에 도전하는 과정으로서 문제를 형식화하고, 목표를 분명히 하여 해결 계획을 세우고 이를 수행한 다음 결과를 평가하는 일련의 과정이다. 문제 해결은 개인적인 활동이다. 어떤 사람에게 문제라고 할 수 있는 것이 어떤 사람에게는 문제가 되지 않을 수 있으며, 어떤 개인에게는 오늘의 문제가 내일에는 더 이상 문제가 아닐 수 도 있다. 특히 Polya는 문제의 중요한 성분은 “그것을 해결하려는 욕구, 의지, 결심”이라고 하면서, 문제를 해결하려는 욕구가 있을 때, 비로서 그것이 그 개인의 문제가 됨을 강조하고 있다. 문제를 해결하려는 욕구가 없다

면, 그런 상황은 문제로 여길 수 없다는 것이다. 이는 곧, 해결하겠다는 강한 욕구가 없으면 어려운 문제를 해결할 수 있는 가망이 없지만 그러한 욕구가 있으면 가능성이 있다는 것이다.

요컨대, 문제 해결력이라는 것은 학생과 기존 지식과 새로 배울 내용이라는 인지적 측면과 욕구, 의지, 결심이라는 정의적 측면까지 포함하는 보다 종합적인 개념이라 할 수 있다. 최근 메타인지에 관련된 연구에 의하면 메타인지의 개념은 자기 자신의 자동적 활동을 통제하는 것뿐만 아니라 의식하지 못 하는 행동까지도 포함하고 자신이나 다른 사람의 감정 및 동기들에 대한 심리적인 것도 포함한다. 즉, 문제 해결은 메타인지와도 연계된 복합적인 개념이다.

2). 문제 해결의 지도

문제 해결 능력을 기리기 위해서는 문제를 잘 이해하고, 적절한 전략을 사용할 수도 있어야 하며 해결한 결과를 반성하고 이와 유사하거나 관련된 문제에 응용할 수도 있어야 한다. 그러나 가장 중요한 것은 학생 자신이 문제를 해결하고자 하는 의지를 가지고 부단한 노력을 하지 않으면 안된다. Lester(1980)의 다음과 같은 말을 음미해 보아야 한다.

"발견전략이 몇 개이고, polya의 4단계의 지도가 어떻게 이루어지는가는 그리 중요하지 않다. 중요한 점은 문제 해결자들이 자신에게 물어 본 잘 조직된 발문을 만들고, 문제 해결의 도중에 문제 상황에 따라 그 발문을 자신에게 던지고, 이에 답하는 것이 습관이 되어야 한다"(신형성 외, 1999, p. 318)

Krulik과 Rudnick(1987)은 교사가 학생들에게 문제 해결을 잘 할 수 있도록 하기 위한 지도방법을 다음과 같이 제언하고 있다(박미영, 2000).

(1) 교실에서의 문제 해결 환경을 창조해라.

문제 해결은 과정뿐만 아니라 지도 방법이다. 탐구 태도는 교실에서의 모든 활동에서 있어야 한다. 도전적인 환경이 지속되어야 하며, 학생들이 문제에 관해서 생각하거나, 질문을 하는 것이 자유스럽게 느껴져야 하며, 또는 비판에 대한 두려움이 없이 그들이 적절하다고 생각되는 어떤 반응도 할 수 있는 그런 분위기가 되어야 한다. 이와 같은 반응들은 학습에서 모두 논의되어 질 수 있어야 하며, 이때 교사의 역할은 중재자로서 봉사하게 된다.

(2) 학생들이 문제를 해결하도록 격려해라.

학생들이 훌륭한 문제 해결자가 되도록 하기 위해서 문제 해결 활동에 끊임없이 참여하게 해야 한다. 학생들 자신이 문제를 풀어야 하며, 교사는 학생들이 흥미를 가질 문제를 찾도록 노력해야 한다.

(3) 학생들에게 문제를 읽는 방법을 가르쳐라.

학교에서 학생들에게 풀도록 요구하는 대부분의 문제들은 문장 형식으로 제시되기 때문에 적절하게 읽는 습관은 필수적이다. 학생들은 이해하면서 읽을 수 있어야 한다.

(4) 학생들에게 그들 자신의 문제를 창조하도록 요구해라.

학생들이 문제를 이해하는 방법으로 그들 자신이 문제를 만들어 보게 하는 방법보다 더 좋은 것은 없다. 문제를 창조하기 위해 학생들은 문제의 구조를 알지 않으면 안 된다.

(5) 학생들에게 소집단에서 함께 하도록 해라.

협동적인 학생들에 의해 제공된 상호작용은 다른 사람의 사고를 수정하거나 그들 자신의 아이디어를 명료화하는 것을 배우는 것을 돕는다. 그들은 명확한 언어, 특히 수학적 용어를 사용함으로써 그들의 사고를 더욱 분명하게 표현하는 것을 배우게 될 것이다. 학생들은 그룹의 구성원이 동

의할 수 있는 언어를 사용하지 않는 한 다른 사람과 의사소통하는 것이 어렵다는 것을 알게 될 것이다.

(6) 그림의 사용을 권장해라.

그림을 그리는 것은 문제에서 묘사된 행동을 지필로 모의 실험하는 것과 같다. 그림 표현은 학생 스스로가 장애를 제거하고, 사실을 인식하며, 문제에 내포된 관계를 이해할 수 있게 된다. 그 것은 또한 구체적 단계와 중간 단계를 타나낸다. 그림을 그릴 때 주의해야 할 점은 정확하게 표현하도록 하게 해야 한다는 점이다. 부적절한 그림은 부적당한 사고 과정과 잘 못 된 결론을 이끌 수 있기 때문이다.

(7) 문제 해결 과정의 순서도를 만들도록 해라.

문제 해결은 사고의 과정이다. 학생들은 문제를 해결하기 위한 그들 개인적 능력을 계발할 때 그들 자신의 사고를 분석할 수 있어야 하기 때문에 그들은 그들 자신의 문제 해결 과정의 요소들을 확인할 수 있어야 한다. 이를 위해 학생들에게 순서도를 구성하도록 하는 것이 필요하다.

(8) 현재의 접근 방법이 적절하지 않다고 판단될 때는 즉각 대안을 찾도록 해라.

선택적 전략이 답을 내는데 실패할 경우가 종종 있다. 이때 훌륭한 문제 해결자는 다른 접근 방법을 찾지만 그렇지 못 한 학생들은 동일한 방법을 반복한다. 이 것은 통상적으로 잘 못 된 결과를 초래한다. 이와 같은 현상을 고정된 효과(einstellung effect 또는 set effect)라고 일컫는다. 이 것은 어떤 종류의 가변적 행동을 방해함으로써 통상적으로 동일한 결과를 계속적으로 낳게 하는 사고방식 또는 경향을 나타내는 조건을 말한다. 따라서 교사는 학생들에게 가장 효과적인 길을 통해서 가도록 가르쳐주기 보다는 대안을 찾도록 안내하는 것이 필요하다.

(9) 창의적이고 구성적인 질문을 제기해라.

시간에 대한 압력 때문에 교사는 주어진 문제와 관련하여 발전적인 문제를 논의하지 못 하는 경우가 종종 있다. 교사는 학생들에게 폭 넓은 반응을 하도록 질문을 하는 것과 그들에게 질문에 반응하기 전에 생각할 수 있는 충분한 시간을 주는 것이 필요하다. 문제 해결은 복잡한 과정이므로 반성을 위한 시간을 허용해야 하며 절대로 질문에 대하여 조급하게 답하지 않도록 하는 것이 중요하다.

(10) 창의적인 사고와 상상을 강조해라.

위험이 따르지 않는 교실 분위기에서 학생들은 그들의 사고를 개방적으로 표현할 수 있어야 한다. 문제 해결은 아이디어와 사고를 창출하고, 개발하고 연결하는 것을 요구하기 때문이다.

이에 본 연구자는 위의 이론적 배경을 토대로 Polya의 문제 해결이 결과가 아닌 과정 즉, 문제를 해결하기 위해 문제 해결 과정에서 일어나는 학생의 사고 활동을 강조함에 치중하여, 수학적 문제 해결을 위해 Polya의 발견술에 따른 문제 해결전략을 도입하여 자료를 개발하고자 한다.

Ⅲ. Polya의 이론을 통한 '문자와 식' 분석

본 장에서는 Polya의 이론을 적용하여 제 7차 중학교 수학 중 '문자와 식'의 학습 자료 개발을 위해 '문자와 식'의 교과서 내용분석 및 교육과정을 분석하겠다. 이를 기초로 하여 '문자와 식'의 학습자료 구성과 개발 방향을 설정하고자 한다.

1. 중학교 수학 중 '문자와 식' 분석 방법

Polya의 문제 해결전략 이론과 제 7차 교육과정의 특성을 도입한 학습자료 개발을 위한 중학교 수학 중 '문자와 식'의 분석 절차는 다음과 같다.

1) 현행 중학교 수학 중 '문자와 식'의 교과서 내용과 교육과정을 분석하여 개발할 학습자료 구성의 기초를 마련한다.

2) '문자와 식'의 학습자료를 개발하기 위해 다음의 절차를 밟는다.

(1) '문자와 식'의 구성방향 설정
(2) 설정된 구성 방향에 맞는 학습자료의 개발 방향 및 목표 설정
(3) 학습자료의 구성 체계 설계
(4) 설정된 구성 체계에 맞는 학습자료의 초안 개발

2. 중학교 수학 중 '문자와 식' 분석

학습자료의 개발 방향과 단원을 설계하기 위해 교과서의 내용 분석 및 교육과정을 분석한다.

1) '문자와 식' 내용분석

국내 교과서는 모두 대단원·중단원·소단원으로 구성되어 있고 소단원에서 실제적인 학습내용이 전개되고 있다. 현행 교과서의 편찬 방향은 교육과정에 충실하고, 교육부의 집필상의 유의사항을 잘 반영하고 있다.

여기에서는 교과서의 전체적인 흐름을 살펴보고, 문제해결이 적용된 예제를 구체적으로 분석하고자 한다.

(1) 대단원 :

단원명, 동기유발을 위한 흥미 있는 수학 이야기 또는 문제와 해설, 단원의 학습목표, 학습계열을 제시하여 그 단원의 전체적인 내용을 감각적으로 느낄 수 있도록 구성하였다.

(2) 중단원:

이전에 학습했었던 내용으로 앞으로 학습할 내용에 꼭 필요한 것들을 제시하여 학습자의 이해를 돕도록 하였다.

'준비학습'에서는 진단, 보충, 심화의 평가를 하도록 하였고 '생활에서 알아보기'에서는 수학에 대한 흥미와 학습의욕을 높여주도록 하였다.

(3) 소단원 :

'무엇을 배울까? 어느 때 사용할까'와 같은 의문문의 형태로 학습 목표를 제시하였다. 내용 전개는 ➡로 그 내용과 내용의 핵심이 되는 문제를 제시하였다. 필요한 부분에 <예제>를 주고, <예제>와 그 풀이를 시범적

으로 준다. <주의>와 <참고>를 제시하여 학생들의 이해를 도와준다. 또한 <문제>는 내용의 이해를 깊게 하거나 다른 내용과 관련된 것을 연습할 때 주어지며 필요에 따라서 점진적으로 어려운 문제로 나열되어 있다.

(4) 연습문제 :

각 중단원 끝에 연습 문제를 제시한다. 학습한 내용에 대한 확인 학습이 가능하도록 학습 목표와 함께 다양한 문제, 실생활 문제, 활동 문제 등을 실었다.

(5)확인 학습 :

단원의 끝에 확인 과정을 주어 스스로 자기 평가하고 보충, 심화할 수 있게 하였다.

(6) 종합 문제:

단원의 끝에 종합 문제를 주어 단원의 내용을 복습하거나 다른 문제 상황에 대한 적응력을 높이도록 했다.

다음은 교과서에 있는 한 문제를 통해 구체적으로 분석하고자 한다.

알아보기 강당에 있는 긴 의자 하나에 4명씩 앉으면 빈자리가 없이 의자만 6개 남고, 3명씩 앉으면 학생이 10명 남는다.

● 의자는 모두 몇 개인가?

일차방정식을 활용하여 문제를 풀 때에는 다음과 같은 순서로 한다.

[1] 주어진 문제의 뜻을 파악하고, 구하려는 값을 x로 놓는다.

⇨ 여기서는 의자의 개수를 x로 놓는다.

[2] 문제의 뜻에 따라 방정식을 만든다.

⇨ 4명씩 앉으면 빈자리가 없이 의자가 6개 남으므로 학생수는 $4(x-6)$명이고, 3명씩 앉으면 학생이 10명 남으므로 학생 수는 $3x+10$명이다.

따라서, 문제의 뜻에 맞는 방정식은 $4(x-6)=3x+10$

[3] 이 방정식을 푼다.

⇨ $4(x-6)=3x+10$

$4x-24=3x+10$

$x=34$

[4] 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

⇨ 의자의 개수가 34개이면 $4\times(34-6)=112=3\times34+10$ 이므로 문제의 뜻에 맞는다.

방정식을 세워서 문제를 풀 때는 다음 순서로 한다.

문제 해결의 순서

1. 문제의 뜻을 파악하고, 구하려는 수량을 x로 놓는다.
2. 문제의 뜻에 따라 방정식을 만든다.
3. 방정식을 푼다.
4. 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

위의 예는 현행 교과서에 실린 내용이다. 위의 예는 실생활에서 일어날 수 있는 문제 상황을 문제 해결 4단계를 통해 문제를 해결할 수 있도록 하고 있다. 그러나 이 문제는 단지 문제해결 전략의 4단계의 형식만 적용한 것이기 때문에 실제 학생들이 문제를 해결하기에는 어렵다. 따라서 Polya의 이론을 구체적으로 이용하면 학생들이 더 문제를 쉽게 해결할 수있을 것이다.

2) '문자와 식' 교육과정

(1) 대수지도의 목표

우리나라 제 7차 교육과정에서 중학교 '문자와 식' 영역의 목표를 살펴보면 다음과 같다.

단계	목표
7-가 단계	문자를 사용하여 식을 간결하게 나타낼 수 있고, 일차방정식을 풀 수 있다.
8-가 단계	연립일차방정식과 일차부등식을 해를 구할 수 있고, 이를 활용할 수 있다.
9-가 단계	다항식의 곱셈과 인수분해를 할 수 있고, 이차방정식을 풀 수 있다.

(2) 내용체계

우리나라 제7차 교육과정에서 중학교 ‘문자와 식’ 영역의 내용을 살펴보면 다음과 같다.

단계	내용
7-가 단계	● 문자의 사용 ● 식의 값 ● 일차식의 계산 ● 등식의 성질 ● 일차방정식의 풀이와 활용
8-가 단계	● 다항식의 계산 ● 지수법칙 ● 간단한 등식의 변형 ● 미지수가 2개인 일차방정식과 연립일차방정식 ● 부등식과 그 성질 ● 일차부등식과 그 해 ● 연립일차 부등식 ● 부등식의 활용
9-가 단계	● 다항식의 곱셈 ● 곱셈공식 ● 인수분해 ● 이차방정식과 그 해 ● 이차방정식의 풀이와 활용

(3) 내용개요

초등학교에서 문자의 사용, 방정식은 직접 다루지 않지만, 문장제 문제가 다루어지고 거기서 문자식과 방정식의 기본개념에 학습되어진다. <7-가 단계>에서는 이를 바탕으로 문자를 처음 사용하게 되고, 방정식을 다루어 형식화, 알고리즘화한다. 또, 방정식의 활용 측면을 강조하여 실생활의 여러 가지 문제를 조식, 표현, 해결할 수 있도록 해 준다.

(4) 교육과정의 내용 분석

교육과정 상의 '문자와 식' 영역의 목표, 내용체계와 내용의 개요를 보면 학습자는 <9-가> 단계를 이수하면 문자에 대한 개념을 형식화·일반화하여 대수적인 사고력을 갖추고 이를 현실 상황에 잘 적응할 수 있어야 한다. 또한, 문제 해결력에 있어서 능동적이고 전략적인 태도로 접근하여 문제 해결력을 키워나갈 수 있어야 한다. 그러나 학생들의 '문자와 식'의 학습은 만족스럽게 이루어지지 못하고 있다. 그 이유에는 첫째, 구체적 조작기에서 형식적 조작기로 들어서는 과도기적인 학습자들에게 문자를 다루는 추상적인 내용으로 급속히 전환되어 인지적 장애를 유발할 수 있다는 것이다. 둘째, 실생활과 관련된 문제를 통한 문자에 대한 심상의 구현이 목표가 아닌 단지 학습자들의 계산적인 면만 강조하는 사회적 풍토와 목표를 들 수 있다. 셋째, 학습자들의 능동적인 활동이 보장되지 않는다는 것이다.

Ⅳ. Polya의 문제 해결 전략을 도입한 대수영역의 학습자료

-중학교 대수영역 중 '문자와 식을 중심으로-

1. 대수영역 구성과 학습자료

1) 대수영역의 구성방향

본 연구에서는 Polya의 이론을 통한 중학교 수학 중 '문자와 식'의 분석을 바탕으로 대수영역의 구성방향을 다음과 같이 설정한다.

(1) Polya의 이론을 참고하여 문제에 대한 적절한 발문과 일반적인 지침이나 권고 사항을 제시한다.

(2) 학생들로 하여금 문제를 접했을 때 어떻게 문제를 풀어야 하는가에 대한 막연한 두려움을 줄이고 스스로 문제를 해결해 가는 긍정적인 태도를 기른다.

(3) 언어적 표현이나 표, 대수적 식의 표현 등 다양한 표현방법으로 그 현상을 기술해 볼 기회를 제공한다.

(4) [표Ⅳ-1]을 참고하여 '문자와 식' 영역의 학습을 통해 수학적 사고력을 기른다.

2) 학습자료의 개발방향 및 목표

대수영역의 구성방향을 바탕으로 본 연구에서 개발할 학습자료 개발의 방향과 목표를 다음과 같이 설정한다.

(1) 학습 자료의 개발방향

① 현행 중학교 교육과정을 기초로 해서 개발자가 다양한 내용을 구성한다. 중학교 7단계에서는 문자의 개념을 이해하고 식을 계산하며 변형시킬 수 있다.

② 학생들이 문제해결 4단계를 쉽게 익히며 이를 이용하여 문제를 해결하는 경험을 가질 수 있도록 한다.

③ 문제에 적절한 발문과 일반적인 지침이나 권고 사항을 제시하여 학생들이 스스로 문제해결을 해나가도록 한다.

④ 수업을 학습자의 활동위주로 이끌어 간다. 또한 그 활동이 교사의 적절한 안내를 통해 이루어지도록 구성한다. 활동은 학생들의 현실 속에서 교사가 적절히 안내를 함으로써 잘 이루어 질 수 있다.

⑤ 반성 단계에서 학습한 내용을 바탕으로 문제를 변형해서 새로운 문제를 만들어 보는 활동을 통해 문제 해결력을 확실한 자기 것으로 만들 수 있도록 한다.

(2) 학습 자료의 목표

Polya의 문제해결 4단계를 통해 문자식을 잘 이해하고 일차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결 할 수 있도록 하는 것을 목표로 한다.

① 주어진 문제의 뜻을 이해할 수 있다.

② 문제에서 주어진 조건의 관계를 살펴본 다음 미지수를 정하여 방정식을 세울 수 있다.

③ 문제의 해를 구하고 검산을 하여 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지를 조사하는 태도를 기르게 한다.

④ 일차방정식을 활용하여 실생활의 문제를 해결 할 수 있도록 한다.

[표 VI-1] 문제 해결학습을 위한 안내 자료

어떻게 문제를 풀 것인가?	
해결단계	**구체적 활동**
문제에 대한 이해	●문제를 한 번 이상 반복해서 읽는다. ● 자신의 말로 문제를 설명하고 질문해 보아라. 즉, 문제에 대하여 스스로 진술해보아라 ● 문제의 주요부분(핵심부분)을 뽑아 내여라. 즉, 미지의 것은 무엇인가? 자료는 무엇인가? 조건은 무엇인가? ● 문제에서 구하고자 하는 것은 무엇인가? ● 문제의 주요 부분을 주의 깊게 반복하여 여러 측면에서 살펴보고 여러 부분으로 분석해보아라.
계획의 작성	● 문제의 핵심부분을 생각해보아라. 즉, 전 단계의 핵심부분들이 뚜렷하게 정리되고 분명하게 인식되었는가? ● 문제를 여러 각도에서 생각해보아라. 즉, 자료와 미지의 것 사이의 관계, 각 부분의 차이, 세세한 부분을 여러 가지로 조합, 분해해보아라. 또는 개개의 세세한 부분에서 새로운 의미를 찾아내고 전체를 새롭게 해석해보아라. ● 문제를 여러 측면에서 생각해보고 이전에 얻은 지식과 연결되는가 살펴보아라. ● 전에 그 문제를 본 일이 있는가? 또는 약간 다른 형태로 된 유사한 문제를 본 일이 있는가? ● (잘 되지 않는다면) 문제를 달리 진술할 수 있을까? ● 문제를 해결하기 위해 도움이 될만한 아이디어, 즉 구체적인 방법을 떠올려보아라. ● 문제를 해결하기 위해 필요한 수학적 지식은 무엇인가/. ● 주어진 조건·자료를 모두 사용했는가? 문제에 포함된 핵심적인 개념은 모두 고려했는가?
계획의 실행	● 풀이 계획을 실행하고, 매 단계를 점검하여라. ● 선택한 풀이 방법대로 바르게 수행하고 있는지 점검해보아라. ● 그 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가?
반성	● 풀이 절차가 정확하게 이루어졌는지 확인해보아라. ● 결과를 점검할 수 있는가? ● 결과를 다른 풀이 방법에 의해서 이끌어 낼 수 있는가? ● 결과나 해결방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있는가?

2. 학습자료 개발

1) 개발한 학습 자료의 특징

본 연구에서 개발한 학습 자료는 Polya의 문제 해결전략 4단계를 중점적으로 도입해 봄으로써 올바른 문자식의 표현을 통해 미지의 값을 구하고 방정식을 스스로 해결하는데 밑바탕이 된다. 또한 각 단계는 과정을 중시하며 그 과정에 따른 발문과 권고사항을 통한 문제 해결 과정과 그 과정에서 구체적인 발견 전략은 학생들 스스로 그 과정을 내면화함으로써 수학 문제를 접했을 때 보다 수학적 사고를 가지고 접근하게 하고 수학 문제의 해결에 대한 생각과 태도의 변화로 수학적 문제 해결력에 있어서 점진적인 변화와 향상을 가져올 수 있도록 하였다. 그리하여 수학의 내적·외적인 현상을 이해하고 조직할 수 있게 구체적으로 제시한다.

개발한 학습 자료에는 교과서에 나온 문제로 구성하였다. 교과서의 풀이 과정 중 부족한 부분을 Polya의 이론을 도입하여 풀이 과정을 재구성하였다. 학생들에게는 스스로 그 현상을 기술하고 해석하는 경험을 하게 하였다. 이를 통하여 문제 해결에 대한 직관적 생각을 형성하고 필요성을 인식할 수 있다. 또한 자기 점검표를 통해 문제를 풀이를 완성한 학생들에게는 사고 과정 중 빠진 부분이 있는지 확인하게 하고 문제 풀이 과정 중 풀이의 막힘이 있는 학생들에게는 문제해결에 도움을 받을 수 있도록 하였다. 마지막으로 학습한 내용을 다른 문제에 활용하거나 오래 기억하는데 도움을 주고 과제를 통해 학습한 이후 집에서 혹은 방과 후 스스로 문제를 풀기 위해 하는 시간을 만들어 준다.

2) 개발한 학습자료

제 7차 교육과정에서 중학교 1학년 일차방정식의 활용을 중심으로 Polya의 문제 해결 전략을 사용하여 학습지도 모형을 개발해 보고자 한다.

교과서 [5]

* 다음은 7세기경 중국의 책에 '부러진 대나무의 문제'로 널리 알려졌던 문제이다. 이 문제를 풀어 보아라.

"지면으로부터 높이가 8m인 대나무가 바람에 부러져서 그 끝이 지면으로부터 2m인 곳에 닿았다. 이 때, 대나무의 부러진 부분의 길이는 얼마인가?"

문장으로 주어진 문제를 해결하려면, 먼저 일상적인 말로 표현된 수량 사이의 관계를 방정식으로 나타내어야 한다. 방정식으로 나타낼 때에는, 같은 관계에 있는 두 수량을 각각 식으로 나타내고, 이들을 등호로 연결하면 된다.

위의 물음을 다음 순서에 따라 풀어 보자.

(1) 대나무의 부러진 부분의 길이를 x m라고 하면, 부러지지 않은 부분의 길이는 $(x+2)$m이다.

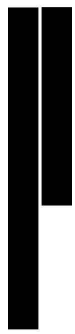
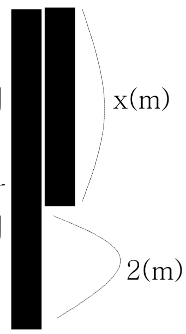
(2) 지면으로부터 대나무의 높이는 대나무의 부러지지 않은 부분의 길이와 부러진 부분의 길이의 합이므로, 방정식을 세우면 다음과 같다.

$(x+2)+x = 8$

(3) 위의 방정식을 풀면 $x=3$이다.

(4) 따라서, 대나무의 부러진 부분의 길이는 3m이다.

위의 교과서 문제 해결 과정을 보면 반성단계가 빠져 있음을 알 수 있다. 문제 해결 후 꼭 필요한 것이 검산하는 것이다. 검산을 하지 않으면 문제 해결 과정을 오래 기억할 수 없으며 문제 풀이 방법이 다양함을 생각하지 않게 되어 다양한 사고를 할 수 없다. 따라서 본 연구자는 Polya의 문제해결 전략을 도입하여 새롭게 구성해보았다.

지면으로부터 높이가 8m인 대나무가 바람에 부러져서 그 끝이 지면으로부터 높이 2m인 곳에 닿았다. 이 때, 대나무의 부러진 부분의 길이는 얼마인가?		
단계	**교사의 발문 및 교사 활동**	**학생의 예상 반응**
문제의 이해	○ 구하고자 하는 것은 무엇입니까? ○ 문제를 풀기 위해여 가르쳐 준 조건은 무엇입니까? ○ 문제를 이해할 수 있도록 충분한 시간을 준다 ○ 대나무 그림을 그리도록 하여 문제의 이해를 돕는다.	○ 대나무의 부러진 길이를 구하는 문제입니다. ○ 대나무의 높이 : 8m ○ 부러진 대나무의 끝이 지면위로 높이 2m인 곳에 있습니다. **대나무 그리기**------> 
계획의 작성	○ 어떻게 풀 것인지 계획을 한번 세워 보세요. ○ 모르겠으면 전에 비슷한 문제를 풀어본 일이 있는지 생각해 보세요. ○ 구하고자 하는 것을 x로 표시하도록 한다. ○ 대나무 그림에 각각의 길이를 표시하도록 한다.	○ 부러진 대나무의 길이: x(m) ○ 부러지지 않은 대나무의 길이를 구하자 ○ 부러진 대나무의 길이와 부러지지 않은 대나무의 길이의 합은 대나무의 높이와 같다. **대나무그리기**------> 
계획의 실행	○ 작성한 계획의 순서에 의하여 한번 계획을 실행해 봅시다. (문제를 풀어 보세요) ○ 같은 관계에 있는 두 수량을 각각 식으로 나타내고 이들을 등호로 연결하도록 한다.	○ 부러진 대나무의 길이(x)와 부러지지 않은 대나무의 길이($x+2$)의 합은 대나 무의 높이와 같으므로 : $x+(x+2)=8$ $\quad$ $x+x+2=8$ $2x+2=8$ $\quad$ $2x=6$ $x=3$ ∴대나무의 부러진 부분의 길이는 3m다.
반성	○ 식을 세우는 방법이 맞는지 확인해보세요. ○ 풀이 과정이 맞게 전개 되었는지 확인해보세요. ○ 또 다른 풀이 방법이 있는지 생각해 보세요(협동학습)	○ 대나무의 부러진 길이가 3(m)이므로 $3+(3+2)=8$이므로 문제의 뜻에 맞는다. ○ 친구들과의 협동으로 다양한 풀이 방법과 변형된 문제가 나올 수 있도록 한다.

교과서 [9]

* 강당에 있는 긴 의자 하나에 4명씩 앉으면 빈자리가 없이 의자만 6개 남고, 3명씩 앉으면 학생이 10명 남는다. 의자는 모두 몇 개인가? 일차 방정식을 활용하여 문제를 풀 때에는 다음과 같은 순서로 한다. (1) 주어진 문제의 뜻을 파악하고, 구하려는 값을 x로 놓는다. 여기서는 의자의 개수를 x로 놓는다. (2) 문제의 뜻에 따라 방정식을 만든다. 4명씩 앉으면 빈 자리가 없이 의자가 6개 남으므로 학생수는 $4(x-6)$명이고, 3명씩 앉으면 학생이 10명 남으므로 학생수는 $3x+10$명 이다. 따라서, 문제의 뜻에 맞는 방정식은 $4(x-6)=3x+10$ (3) 이 방정식을 푼다. $4(x-6)=3x+10$ $4x-24=3x+10$ $x=34$ (4) 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다. 의자의 개수가 34개이면 $4\times(34-6)=112=3\times34+10$ 이므로 문제의 뜻에 맞는다.

위의 교과서 예제를 보면 학생들이 어떻게 문제를 충분히 이해할 수 있는지에 대한 방법이 없다. 따라서 학생들은 문제를 이해하기 즉, 분석하는 방법을 아래의 Polya의 문제 해결 전략을 통해 알 수 있도록 하였다.

강당에 있는 긴 의자 하나에 4명씩 앉으면 빈 자리가 없이 의자만 6개 남고, 3명씩 앉으면 학생이 10명 남는다. 의자는 모두 몇 개인가?		
단계	**교사의 발문 및 교사 활동**	**학생의 예상 반응**
문제의 이해	○ 구하고자 하는 것은 무엇입니까? ○ 문제를 풀기 위해여 가르쳐 준 조건은 무엇입니까? ○ 문제를 이해할 수 있도록 충분한 시간을 준다	○ 강당에 있는 긴 의자의 개수를 구하는 문제입니다. ○ 의자에 4명씩 앉으면 빈자리가 없이 의자만 6개 남고 ○ 3명씩 앉으면 학생이 10명 남는다. ○ 강당 안에 있는 의자수와 학생수는 변함이 없다.
계획의 작성	○ 어떻게 풀 것인지 계획을 한번 세워 보세요. ○ 모르겠으면 전에 비슷한 문제를 풀어본 일이 있는지 생각해 보세요. ○ 구하고자 하는 것을 x로 표시하도록 한다.	○ 의자의 개수: x(개) ○ 4명씩 앉았을 때 학생수를 구하자 ○ 3명씩 앉았을 때 학생수를 구하자 ○ 강당에 있는 학생수는 일정하다.
계획의 실행	○ 작성한 계획의 순서에 의하여 한번 계획을 실행해 봅시다. (문제를 풀어보세요) ○ 같은 관계에 있는 두 수량을 각각 식으로 나타내고 이들을 등호로 연결하도록 한다.	○ 4명씩 앉으면 빈자리가 없이 의자가 6개 남는다. 이 때 학생수는:$4(x-6)$ (명) ○ 3명씩 앉으면 학생이 10명 남는다. 이 때 학생수는 :$3x+10$ (명) ○ 강당에 있는 학생수는 일정하므로 : $4(x-6)=3x+10$ $4x-24=3x+10$ $x=34$ ∴ 의자의 개수는 34개이다.
반성	○ 식을 세우는 방법이 맞는지 확인해보세요. ○ 풀이 과정이 맞게 전개 되었는지 확인해보세요. ○ 또 다른 풀이 방법이 있는지 생각해 보세요.(협동학습) ○다른 문제로 변형을 하게한다.	○ 의자의 개수가 34개이면 $4\times(34-6)=112=3\times34+10$이므로 문제의 뜻에 맞는다. ○ 친구들과의 협동으로 다양한 풀이 방법과 변형된 문제가 나올 수 있도록 한다.

교과서 [9]

* 집에서 3km 떨어진 역에 가는데, 처음에는 매분 100m의 속력으로 걷다가 열차 출발 시간에 늦을 것 같아서 도중에 매분 120m의 속력으로 걸어서 집에서 역까지 28분 걸렸다고 한다. 속력을 빠르게 해서 걸어간 것은 출발한지 몇 분 후인가?

(풀이)

집에서 x분 걸어서 다음 A지점에서 속력을 빠르게 했다고 하자.

집에서 A까지 간 거리 : $100\times x$(m)

A에서 역까지 간 거리 : $120\times(28-x)$(m)

거리의 합이 3km=3000m 이므로

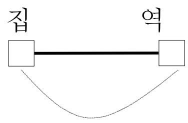
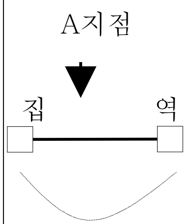
$$100x+120(28-x)=3000$$

이것을 풀면 $x=18$

(답) 18분 후

위의 교과서 예제는 교육부에서 제시한 문제 해결 단계가 적용조차 안 되어 있다. 다음은 Polya의 문제 해결 전략을 도입하여 다시 구성하였다. 특히 문제 이해 부분에 그림을 그리도록 하여 이해를 쉽게 하였다. 더 나아가서 스스로 문제를 변형해봄으로써 문제 해결 과정 및 방법에 대한 사고의 폭을 넓히도록 하였다.

집에서 3km 떨어진 역에 가는데, 처음에는 매분 100m의 속력으로 걷다가 열차 출발 시간에 늦을 것 같아서 도중에 매분 120m의 속력으로 걸어서 집에서 역까지 28분 걸렸다고 한다. 속력을 빠르게 해서 걸어간 것은 출발한지 몇 분 후인가?

단계	교사의 발문 및 교사 활동	학생의 예상 반응
문제의 이해	○ 구하고자 하는 것은 무엇입니까? ○ 문제를 풀기 위해여 가르쳐 준 조건은 무엇입니까? ○ 문제를 이해할 수 있도록 충분한 시간을 준다	○ 속력을 빠르게 해서 걸어간 것은 출발한지 몇 분 후인가? ○ 처음에는 매분 100m의 속력으로 걷는다 ○ 도중에 매분 120m의 속력으로 걸어서 집에서 역까지 28분 걸렸다.  3km=3000m
계획의 작성	○ 어떻게 풀 것인지 계획을 한 번 세워 보세요. ○ 모르겠으면 전에 비슷한 문제를 풀어본 일이 있는지 생각해보세요. ○ 구하고자 하는 것을 x로 표시하도록 한다. ○ (거리)=(속력)×(시간)	○집에서 x분 걸어서 다음 A지점에서 속력을 빠르게 했다고 하자. ○ 집에서 A까지 간 거리를 구하자. ○ A에서 역까지 간 거리를 구하자. ○ 집에서 A까지 간 거리와 A에서 역까지 간 거리는 3000(m)이다.  3km =3000m 걸린시간 : 28분
계획의 실행	○ 작성한 계획의 순서에 의하여 한번 계획을 실행해 봅시다. (문제를 풀어보세요) ○ 같은 관계에 있는 두 수량을 각각 식으로 나타내고 이들을 등호로 연결하도록 한다.	○집에서 A까지 걸린 시간을 x(분)이라 한다. 그러면 A에서 역까지 걸린 시간은 (28-x)분이다. ○ 집에서 A지점까지 간 거리 :100×x(m) A지점에서 역까지 간 거리:

		$120\times(28-x)$(m) ○ 거리의 합이3km=3000m이므로 $100x+120(28-x)=3000$ $100x+3360-120x=3000$ $-20x=-360$ $x=18$ ∴ 18분후
반성	○ 식을 세우는 방법이 맞는지 확인해보세요. ○ 풀이 과정이 맞게 전개 되었는지 확인해보세요. ○ 또 다른 풀이 방법이 있는지 생각해 보세요. ○ 다른 문제로 변형을 하게 한다.	○ 18분 후부터 소력이 빨라졌으면 $100\times18+120\times(28-18)=1800+1200$ $=3000$이므로 문제의 뜻에 맞는다. ○ 거리와 걸린 시간에 대한 조건을 주고 속력을 묻는 문제로 변형가능 ○ 거리와 속력에 대한 조건을 주고 속력을 묻는 문제로 변형가능

교과서 [9]

* 농도가 5%인 소금물 240g이 있다. 여기에 물을 더 부어서 3%의 소금물을 만들려고 한다. 몇 g의 물을 더 넣어야 되는지 구하여라.

(풀이) 더 넣을 물의 양을 xg이라고 하자.

물을 넣기 전의 소금의 양은 전의 소금의 양은 $240\times\frac{5}{100}$(g)

물을 넣은 후의 소금의 양은 $(240+x)\times\frac{3}{100}$ (g)

소금의 양은 같으므로

$$240\times\frac{5}{100}=(240+x)\times\frac{3}{100}$$

$$240\times5=(240+x)\times3$$

$3x=480$ $x=160$ 답 : 160g

위의 교과서 문제 해결 과정을 보면 반성단계가 빠져 있음을 알 수 있다. 문제 해결 후 꼭 필요한 것이 검산하는 것이다. 검산을 하지 않으면 문제 해결 과정을 오래 기억할 수 없으며 문제 풀이 방법이 다양함을 생각하지 않게 되어 다양한 사고를 할 수 없다. 따라서 본 연구자는 Polya의 문제해결 전략을 도입하여 새롭게 구성해보았다.

<table>
<tr><td colspan="3">농도가 5%인 소금물 240g이 있다. 여기에 물을 더 부어서 3%의 소금물을 만들려고 한다. 몇 g의 물을 더 넣어야 되는지 구하여라.</td></tr>
<tr><th>단계</th><th>교사의 발문 및 교사 활동</th><th>학생의 예상 반응</th></tr>
<tr><td>문제의 이해</td><td>○ 구하고자 하는 것은 무엇입니까?
○ 문제를 풀기 위해여 가르쳐준 조건은 무엇입니까?
○ 그림을 그릴 수 있습니까?
○ 문제를 이해할 수 있도록 충분한 시간을 준다.</td><td>○ 몇 g의 물을 넣으면 3%의 소금물이 되겠는가?
○ 농도가 5%인 소금물 240g이 있다.
○ 소금의 양은 변함이 없고 물을 더 부어서 농도가 3%인 소금물을 만들려고 한다.
물x(g)↓
소금물240g/농도 5% ⇒ 농도 3%</td></tr>
<tr><td>계획의 작성</td><td>○ 어떻게 풀 것인지 계획을 한 번 세워 보세요.
○ 모르겠으면 전에 비슷한 문제를 풀어본 일이 있는지 생각해 보세요.
○ 구하고자 하는 것을 x로 표시한다.
○ 용어를 설명해 준다.
-소금물의 양에 대한 녹아있는 소금의 양의 비율을 소금물의 농도라고 한다.
소금의양=(소금물의 양)$\times\frac{농도}{100}$</td><td>○ 3%의 소금물을 만들기 위하여 x(g)의 물을 넣는다고 하자.
○ 5%의 소금물 240(g)에 물x(g)을 더 넣어 3%의 소금물을 만든다.
○ 이전의 소금의 양 =이후의 소금의 양
○ 소금의 양= (소금물의 양)$\times\frac{농도}{100}$
○ 소금의 양은 변함이 없다.</td></tr>
<tr><td>계획의 실행</td><td>○ 작성한 계획의 순서에 의하여 한번 계획을 실행해 봅시다.
(문제를 풀어보세요)</td><td>○물을 넣기 전의 소금의 양: $240\times\frac{5}{100}$(g)
○물을 넣은 후 소금의 양 :$(240+x)\times\frac{3}{100}$</td></tr>
</table>

	○ 같은 관계에 있는 두 수량을 각각 식으로 나타내고 이들을 등호로 연결하도록 한다.	(g) ○ 소금의 양은 같으므로 : $240\times\frac{5}{100}=(240+x)\times\frac{3}{100}$ $240\times5=(240+x)\times3$ $3x=480$ $x=160$ $\therefore 160(g)$
반성	○ 식을 세우는 방법이 맞는지 확인해보세요. ○ 풀이 과정이 맞게 전개 되었는지 확인해보세요. -과제- ○ 또 다른 풀이 방법이 있는지 생각해 보세요. ○ 다른 문제로 변형을 하게 한다.	○ 물 160(g)을e더 넣으면 $240\times\frac{5}{100}=12$ $(240+160)\times\frac{3}{100}$ 농도=(12/400)×100=3% ○ 물을 더 넣는 것이 아니라 덜어내는 문제로 변형 ○ 소금과 소금물의 양에 대한 조건을 주고 소금물의 양을 구하는 문제로 변형 ○ 친구들과의 협동으로 다양한 풀이 방법과 변형된 문제가 나올 수 있도록 한다.

교과서 [2]

* 올해 아버지는 45세이고 나는 13세이다. 아버지의 나이가 내 나이의 3배가 되는 것은 몇 년 후인가?

(풀이) ① x년 후에 아버지의 나이가 내 나이의 3배가 된다고 하면

② (아버지의 나이)= 3×(내 나이)이므로

③ 구하는 식은 $45 + x = 3(13 + x)$이다.

이 방정식을 풀면

$45 + x = 39 + 3x$, $\quad x - 3x = 39 - 45$

$-2x = -6$, $\quad x = 3$

④ 3년 후에 아버지는 48세, 나는 16세가 되어 조건에 알맞다.

답 : 3 년후

위의 예제를 보면 문제 이해 및 풀이 때 이해를 돕는 과정이 나와 있지 않다. 그리고 ② (아버지의 나이)= 3×(내 나이)에서 학생들이 오해할 수 있으므로 사소한 것이라도 다음과 같이 정확히 명시해야 할 것이다. (x년 후 아버지의 나이) = 3×(x년 후 내 나이). 다음은 Polya의 문제 해결 전략 중 문제 이해 단계에서는 문제를 자신의 말로 설명해 봄으로써 문제 이해를 도우며, 계획의 작성 단계에서는 표 만들기를 이용하여 식을 세우는데 도움을 주고, 반성 단계에서는 다른 풀이 방법과 스스로 문제를 만들어 봄으로써 사고를 다양하게 할 수 있도록 다시 구성하였다.

<table>
<tr><td colspan="3">올해 아버지는 45세이고 나는 13세이다. 아버지의 나이가 내 나이의 3배가 되는 것은 몇 년 후인가?</td></tr>
<tr><th>단계</th><th>교사의 발문 및 교사 활동</th><th>학생의 예상 반응</th></tr>
<tr><td>문제의 이해</td><td>○ 구하고자 하는 것은 무엇입까?
○ 문제를 풀기 위해여 가르쳐 준 조건은 무엇입니까?
○ 그림을 그릴 수 있습니까?
○ 문제를 이해할 수 있도록 충분한 시간을 준다</td><td>○ 몇 년 후에 아버지의 나이가 내 나이의 3배가 되는냐?
○ 아버지의 나이는 45세이다.
○ 내 나이는 13세이다.</td></tr>
<tr><td>계획의 작성</td><td>○ 어떻게 풀 것인지 계획을 한 번 세워 보세요.
○ 모르겠으면 전에 비슷한 문제를 풀어본 일이 있는지 생각해 보세요.
○ 구하고자 하는 것을 x로 표시하도록 한다.
○ 표를 그려 이해를 쉽게 하도록 한다.</td><td>○ x년 후에 아버지의 나이가 내 나이의 3배가 된다.<table><tr><th></th><th>현재</th><th>x년 후</th></tr><tr><td>아버지의 나이</td><td>45</td><td>x + 45</td></tr><tr><td>내 나이</td><td>13</td><td>x + 13</td></tr></table>○ (x년 후 아버지의 나이)
= 3×(x년 후 내 나이)</td></tr>
<tr><td>계획의 실행</td><td>○ 작성한 계획의 순서에 의하여 한번 계획을 실행해 봅시다.
(문제를 풀어보세요)
○ 같은 관계에 있는 두 수량을 각각 식으로 나타내고 이들을 등호</td><td>○ (x년 후 아버지의 나이)
= 3×(x년 후 내 나이)
$45 + x = 3(13 + x)$
$45+x=39+3x$</td></tr>
</table>

	로 연결하도록 한다.	x-3x = 39 -45 -2x = -6 x=3 ∴ 3년 후
반성	○ 식을 세우는 방법이 맞는지 확인해보세요. ○ 풀이 과정이 맞게 전개 되었는지 확인해보세요. -과제- ○ 또 다른 풀이 방법이 있는지 생각해 보세요. ○ 다른 문제로 변형을 하게 한다.	○ 3년 후 아버지의 나이는 48세이고 내 나이는 16살이 되므로 문제의 조 건이 알맞다. ○ 아버지의 나이와 아들의 나이를 변형하고 몇 년 전에 아버지의 나이가 아들의 나이 4배였는가? 등으로 변형할 수 있다. ○ 과제는 친구들과의 협동으로 다양한 풀이 방법과 변형된 문제가 나올 수 있도록 한다.

교과서 [5]

사슴이 한 걸음에 2m씩 뛸 때, 노루는 한 걸음에 3m씩 뛴다고 한다. 만일, 사슴이 노루보다 45m 앞에서 출발하여 둘이 동시에 뛴다고 하면, 노루는 몇 걸음 후에 사슴을 만나게 되겠는가?

(풀이)

노루가 x걸음 후에 사슴을 만난다고 하자.

노루가 x걸음 뛴 거리는 3xm이고, 사슴이 x걸음 뛴 거리는 2xm이다.

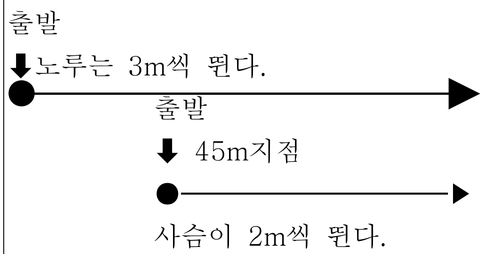
사슴이 노루보다 45m 앞에서 출발하였으므로 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$3x = 2x + 45$

$x = 45$

따라서 45걸음 후에 만난다. 답 : 45 걸음 후

위의 교과서 문제 해결 과정을 보면 반성단계가 빠져 있음을 알 수 있다. 문제 해결 후 꼭 필요한 것이 검산하는 것이다. 검산을 하지 않으면 문제 해결 과정을 오래 기억할 수 없으며 문제 풀이 방법이 다양함을 생각하지 않게 되어 다양한 사고를 할 수 없다. 따라서 본 연구자는 Polya의 문제해결 전략을 도입하여 새롭게 구성해보았다.

<table>
<tr><td colspan="3">사슴이 한 걸음에 2m씩 뛸 때, 노루는 한 걸음에 3m씩 뛴다고 한다. 만일, 사슴이 노루보다 45m 앞에서 출발하여 둘이 동시에 뛴다고 하면, 노루는 몇 걸음 후에 사슴을 만나게 되겠는가?</td></tr>
<tr><th>단계</th><th>교사의 발문 및 교사 활동</th><th>학생의 예상 반응</th></tr>
<tr><td>문제의 이해</td><td>○ 구하고자 하는 것은 무엇입니까?
○ 문제를 풀기 위해여 가르쳐 준 조건은 무엇입니까?
○ 그림을 그릴 수 있습니까?
○ 문제를 이해할 수 있도록 충분한 시간을 준다</td><td>○ 노루는 출발 후 몇 걸음 후 사슴과 만나게 되는가
○ 사슴은 한 걸음에 2m씩 뛸 때, 노루는 한 걸음에 3m씩 뛴다.
○ 사슴이 노루보다 45m 앞에서 출발한다.

</td></tr>
<tr><td>계획의 작성</td><td>○ 어떻게 풀 것인지 계획을 한 번 세워 보세요.
○ 모르겠으면 전에 비슷한 문제를 풀어본 일이 있는지 생각해 보세요.
○ 구하고자 하는 것을 x로 표시하도록 한다.
○ 표를 그려 이해를 쉽게 하도록 한다.</td><td>○ 표를 만들어 본다.
<table>
<tr><td></td><td>노루</td><td>사슴</td></tr>
<tr><td>x걸음 후</td><td>$3x$(m)</td><td>$2x$(m)</td></tr>
<tr><td>출발 후 x걸음 뛴 후 총거리</td><td>$3x$(m)</td><td>$(2x+45)$(m)</td></tr>
</table>
○ 출발 후 x걸음 후에 노루와 사슴이 만나므로 각각 출발 후 x걸음 뛴 후 총거리는 같다.</td></tr>
</table>

계획의 실행	○ 작성한 계획의 순서에 의하여 한번 계획을 실행해 봅시다. (문제를 풀어보세요) ○ 같은 관계에 있는 두 수량을 각각 식으로 나타내고 이들을 등호로 연결하도록 한다.	○ $3x = 2x + 45$ $x = 45$ ∴ 45걸음 후
반성	○ 식을 세우는 방법이 맞는지 확인해보세요. ○ 풀이 과정이 맞게 전개 되었는지 확인해보세요. -과제- ○ 또 다른 풀이 방법이 있는지 생각해 보세요. ○ 다른 문제로 변형을 하게 한다.	○ 45걸음 후 노루가 간 거리는 3×45=135(m) 45걸음 후 사슴이 간 거리는 (2×45)+45=135(m)이므로 문제의 조건에 잘 맞는다. ○ 노루와 사슴이 30걸음에 만났다고 하면 사슴은 노루보다 몇m 앞에서 출발 하였는가? ○ 과제는 친구들과의 협동으로 다양한 풀이 방법과 변형된 문제가 나올 수 있도록 한다.

[표 Ⅵ-2] 학생들의 문제해결 과정 점검표 (학생자체 평가지)

	항목	점검표
문제 이해	1) 문제를 여러번 반복하여 읽기	
	2) 문제를 자신의 말로 설명해보기	
	3) 문제에서 구하고자 하는 것 생각하기	
	4) 문제에 주어진 조건 찾기	
	5) 문제의 주요부분을 세분하여 분석하기	
계획의 작성	6) 유사한 문제를 풀어본 경험 떠올려보기	
	7) 문제의 분석한 내용을 기호나 문자 등을 사용하여 나타내기	
	8) 문제해결에 도움이 될 만한 아이디어, 즉 구체적 발견술을 생각하기	
	9) 알고 있는 수학적 지식을 생각하기	
	10) 주어진 조건·자료를 충분히 활용했는지 확인하기	
계획의 실행	11) 각 단계에서 오류를 범하지 않았는지 검토하기	
	12) 문제를 풀면서 단계별 자신의 활동을 점검해보기	
	13) 선택한 발견술을 정확하게 수행하며 문제를 푸는지 확인하기	
	14) 선택한 발견술을 정확하게 수행하며 문제를 푸는지 확인하기	
	15) 인내심을 가지고 문제를 끝까지 해결하기	
반성	16) 풀이절차가 정확하게 이루어졌는지 확인하기	
	17) 처음부터 다시 자신의 해결과정을 점검하기	
	18) 문제를 해결할 수 있는 다른 발견술을 생각하기	
	19) 자기 자신에게 "~라면 어떤가"형태의 질문을 해보기	
	20) 결과를 활용할 수 있는 다른 문제를 생각하기	

[표 Ⅵ-2]는 Polya의 이론 중 각 단계에서 구체적으로 학생들이 문제를 풀 때 필요한 항목들이다. 이 점검표는 학생들에게 문제를 풀 때 Polya의 문제해결 전략을 습관화하기 위해서이며, 학생 스스로 점검하여 자체 평가를 하도록 한다.

[표 Ⅵ-3] 평가 기준 (교사)

요소 / 영역	채 점 요 소	배 점
문제이해	1) 미지의 수를 x를 사용하여 나타내기	
해결과정	2) 방정식 세우기	
	3) 방정식 풀기	
	4) 답 구하기	
	5) 결과를 활용하여 다른 문제를 만들기	
총 점		

[표 Ⅵ-3]는 교사가 학생들의 과제 및 수행 평가시 기준에 대한 표이다. 각 단계별로 평가하여 학생들이 어느 한 단계라고 지나치지 않도록 하며 또한, 학생들이 어느 부분에 취약한지 파악할 수 있도록 하였다.

3. 학습 자료에 대한 호응도 분석

본 연구에서 개발한 방정식의 활용 영역의 학습 자료에 대한 호응도 검사에 대해 논의하고자 한다. 개발한 학습 자료를 이해하고 조언을 해 줄 수 있다고 판단되는 서울·경기도내 중학교 5곳을 선정하여 현직 수학교사 20명을 설문대상으로 한다. 설문기간은 2004년 9월부터 2004년 10월까지이고 자료설명 후 설문지 작성을 하게 하였다. 학습 자료에 대한 반응을 분석한 후 개발한 학습 자료를 수정·보완하고자 한다.

1) 검사도구의 제작

본 연구의 호응도 검사 도구는 개발한 학습 자료에 대한 활용도와 그 이유에 대해 연구자가 직접 작성하여 <부록1>와 같이 검사도구로 확정한다.

2) 자료의 분석

교사의 호응도 검사에서 백분율로 분석한 결과는 다음과 같다. 분석 결과를 보면 '개발한 학습 자료가 일차방정식 활용의 교수 학습 자료로 효과적이라고 생각합니까?'라는 질문에 대한 응답은 [표 Ⅵ-4]와 같이 '매우 효과적이다'가 10%, '대체로 효과적이다'가 65%로 설문 대상자의 75%가 효과적이라고 응답하였다.

응답내용	응답자수	%
매우 효과적	2	10
대체로 효과적	13	65
보통임	5	25
별로 효과적이지 못함	0	0
전혀 효과적이지 못함	0	0
합계	20	100

[표 Ⅵ-4]. 개발한 학습 자료의 효율성

그 이유로는 [표 Ⅵ-5]와 같이 ‘학습에 흥미를 유발하기 때문에’가 5%, ‘학습 내용이 상세하고 알기 쉽기 때문에’가 10%, ‘결론을 제시하기 보다는 학생들 스스로 문제를 이해하고 문제를 풀려고 시도해보기 때문에’가 60%, ‘문제 해결 4단계를 통해 스스로 문제를 해결할 수 있는 능력을 신장시킬 수 있기 때문에’가 25%의 응답이 있었다.

응답내용	응답자수	%
학습에 흥미를 유발하므로	1	5
학습 내용이 상세하고 알기 쉽기 때문에	2	10
결론을 제시하기 보다는 학생들 스스로 문제를 이해하고 문제를 풀려고 시도해보기 때문에	12	60
문제 해결 4단계를 통해 스스로 문제를 해결할 수 있는 능력을 신장시킬 수 있기 때문에	5	25
합계	20	100

[표 Ⅵ-5]. 개발한 학습 자료가 효율적인 이유

개발한 수업모형의 마지막 단계로 평가지에 대한 의견은 다음과 같다. ‘본 자료의 평가지에 대해 어떻게 생각하십니까?’라는 질문에 대한 응답은 [표 VI-6]와 같이 ‘매우 효과적이다’가 15%, ‘대체로 효과적이다’가 55%로 설문 대상자의 70%가 효과적이라고 응답하였다.

응답내용	응답자수	%
매우 효과적	3	15
대체로 효과적	11	55
보통임	6	30
별로 효과적이지 못함	0	0
전혀 효과적이지 못함	0	0
합계	20	100

[표 VI-6] 본 자료의 평가지의 효율성

그 이유로는 ‘학생 자체 평가지’부분에서는 특히 ‘2) 문제를 자신의 말로 설명해보기, 5) 문제의 주요부분을 세분하여 분석하기, 9) 알고 있는 수학적 지식을 생각하기, 10) 주어진 조건·자료를 충분히 활용했는지 확인하기, 19) 자기 자신에게 “~라면 어떤가”형태의 질문을 해보기, 20) 결과를 활용할 수 있는 다른 문제를 생각하기’ 등의 항목이 학생들의 문제 해결에 많은 도움이 된다고 하였다. ‘교사의 수행평가 기준’부분에서는 평가를 세분한 것과 특히 ‘5) 결과를 활용하여 다른 문제를 만들기’ 항목은 학생들이 수업한 내용이 수학적 사고로 확장되었는지 알 수 있다는 점이 마음에 든다고 하였다.

‘개발된 자료 중 가장 마음에 드시는 부분은 어는 부분입니까?’ 라는 질문에 대부분이 ‘문제 이해 단계’와 ‘학생들의 문제해결 과정 점검표’가 마음에 든다고 응답하였으며 그 이유로는 문제의 이해 부분 중 학생 스스로

자신의 표현으로 문제를 해석해 볼 수 있기 때문에 흥미도 높아지며 문제를 명확히 인식할 수 있으며 학생들의 문제해결 과정 점검표를 통해 스스로 문제를 해결하는 능력을 신장시킬 수 있고 올바른 문제 풀이의 습관을 기를 수 있다는 점이 마음에 든다고 하였다.

'본 학습자료를 수업시간에 활용할 생각이 있는가'의 질문에 [표 Ⅵ-7]과 같이 75%가 '부분적으로 활용하겠다'라고 응답하였고 '생각해 보겠다'가 20%로 나타났다.

응답내용	응답자수	%
있다	1	5
부분적으로 활용 하겠다	15	75
생가해보겠다	4	20
없다	0	0
합계	20	100

[표 Ⅵ-7]. 학습 자료의 활용 여부

개발한 학습 자료의 개선점을 참고하여 수정·보완 방향을 정리하면 [표 Ⅵ-8]과 같다.

개선점	수정·보완 방향
조금 더 구체적인 상황이 학습 자료에 제공되었으면 한다.	교사가 학생들의 수준과 성향에 맞춰서 자료를 활용한다.
학생들이 새로운 문제 해결 전략을 따르지 않고 기존의 습관대로 풀 수 있다.	학생 자체 평가지를 교사가 관리하여 문제 해결 전략을 익히도록 도와준다.
기초 학습이 부족한 학생에 대한 대안제시 미비	기초 학습이 미비한 학생에게는 고사의 안내를 통해 자료의 내용에 선수 학습에 대한 언급을 하고 단계별 피드백을 안내하여 따라올 수 있도록 도와준다.

[표 Ⅵ-8]. 개발한 학습자료의 개선점과 수정·보완 방향

분석한 결과를 보면 본 연구에서 개발한 학습 자료는 대체로 효과적이라는 긍정적인 응답을 얻을 수 있었으며 그 중에서 ‘문제 이해 단계’와 ‘학생들의 문제해결 과정 점검표’등에 많은 관심을 나타냈다. 그러나 조금 더 구체적인 상황이 학습 자료에 제공을 요구하였고, 학생들이 기존 문제해결 습관에서 새로운 문제 해결 전략으로 바꿔어야 하는 필요성을 인식하지 못할 경우 대처 방법이 미비하고, 학생의 개인차를 충분히 반영하지 못하는 등 취약한 점이 있다고 지적하였다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 Polya의 문제 해결전략을 활용하여 학생들로 하여금 문장제의 활용문제에 대한 두려움을 없애고, 수업 중 교사의 설명을 피동적으로 받아들이던 이제까지의 수학학습 습관에서 탈피하여 수학학습에 능동적으로 참여하도록 유도하고자 한다. 또한 Polya의 문제 해결전략을 활용하여 학생들의 문제풀이 지도에 조금이나마 도움을 주어 학생들의 흥미를 유발시켜 학습효과를 향상시키고, 창의력과 문제 해결력을 신장시켜 활용문제에 대한 학습태도의 변화를 기대하고자 한다.

이러한 연구 목적을 달성하기 위해 Ⅱ장에서는 문헌 검토를 통하여 Polya의 이론을 살펴보았다. Polya는 문제의 이해, 계획의 작성, 계획의 실행, 반성의 4단계 문제 해결 과정을 제안하고 있으며 표 만들기. 그림 그리기, 식 세우기 등의 발견술을 제시하고 있다. Ⅲ장에서는 Polya의 이론을 적용하여 제 7차 중학교 수학 중 '문자와 식'의 학습 자료 개발을 위해 '문자와 식'의 교과서 내용분석 및 교육과정을 분석하고, 이를 기초로 하여 '문자와 식'의 학습자료 구성과 개발 방향에 대한 시사점을 얻었다. Ⅳ장에서는 이런 Polya의 이론을 배경으로 현 중학교 1학년 교과서에서 다루고 있는 '일차 방정식의 활용'부분의 수업 모형을 개발하였다.

본 연구에서 개발한 학습 자료에 대한 교사의 호응도를 조사한 결과 '개발한 학습 자료가 일차 방정식 활용의 교수 학습 자료로 효과적이라고 생각합니까?'라는 질문에 '매우 효과적이다'가 10%, '대체로 효과적이다'가 65%로 설문 대상자의 75%가 효과적이라고 응답하였다. 따라서 본 연구에서 개발한 학습 자료는 대체로 효과적이라는 긍정적인 응답을 얻을 수 있었으며 그 중에서 '문제 이해 단계'와 '학생들의 문제해결 과정 점검표'

등에 많은 관심을 나타냈다. 그러나 조금 더 구체적인 상황이 학습 자료에 제공을 요구하였고, 학생들이 기존 문제 해결 습관에서 새로운 문제 해결 전략으로 바뀌어야 하는 필요성을 인식하지 못할 경우 대처 방법이 미비하고, 학생의 개인차를 충분히 반영하지 못하는 등 취약한 점이 있다고 지적하였다.

이와 같은 미비점을 보완하기 위해 아래와 같이 몇 가지 제안하고자 한다.

본 연구는 문제 해결 교육에서 Polya의 이론의 일부를 다룬 것이며, 중학교 1학년 수학교과 내용에 제한되어 있다. 따라서 Polya가 제시한 다른 문제 해결 전략에 대한 연구와 문제 해결력을 신장시킬 수 있는 다양한 수업모형에 대한 연구가 필요하다. 본 논문의 지도모형과 같은 수업을 활용할 수 있도록 교사연수가 필요하다. 마지막으로, 개발한 학습 자료를 기초로 하여 학습자의 학업 성취나 태도의 효과를 검증하는 후속 연구가 필요하다.

참고문헌

[1] 교육부, 중학교 교육과정 해설(Ⅲ)- 수학, 과학, 기술 · 가정, 대한교과서 주식회사, 1997.

[2] 금종해 외 3인, 수학 7-가, (주) 고려출판, 2002.

[3] 박미영, (2000). 수학 문제해결전략 분석 연구-중학교 수학과 문제유형 중심으로-. 경희대학교 교육대학원 석사학위 논문.

[4] 신성균, 강문봉, 황혜정. (1993). 수학과 문제해결력 신장을 위한 교수-학습 자료 개발 연구- 중학교를 중심으로-(연구보고 RR 93-13). 한국교육개발원.

[5] 신항균, 수학 7-가, 형설출판사, 2002

[6] 신형성, 김경희. (1997). 수학적 문제해결. 서울: 경문사.

[7] 우정호, 정은실. (1995). Polya의 수학적 발견술 연구. 대한수학교육학회 논문집 5권 1호, 99-177.

[8] 이현아, (2003). Polya의 발견술에 따른 수학적 문제해결력 신장에 관한 사례연구. 고려대학교 교육대학원

[9] 전평국 외 4인, 수학 7-가, 교학연구사, 2002.

[10] 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재혼, 서동엽. (2003). 수학교육학 신론. 서울 : 문음사.

[11] Krulik & J. A. Rudnick. (1982). Teaching Problem Solving to Pre-Service Teachers. The Arithmetic Teacher, Vol. 29, No. 6, Feb.

[12] Lester, F. K. (1980). Research in Mathematical Problem solving. In: Richard Shumway(ed), Research in

Mathematics Education, Reston, V.G.: NCTM, Inc., pp. 286-323.
[13] Polya, G. (1957). How To Solve It. 우정호 역(2002). 어떻게 문제를 풀 것인가. 교우사

ABSTRACT

The development of learning materials into introducing G. Polya theory

-Focusing on "the letter and formula" of the category of Algebra for Middle school-

Kim, Young Sook
Major in Mathematics Education
Graduate school of Education
Sungshin Women's University
Supervised by professor In, Byung Sik Ph.D.

The purpose of this study is how to develop learning materials about "the letter and formula" in the category of Algebra based on the G. Polya theory.

This research focussed on revising the residual problems and improving them, give teachers advanced learning materials method.

Problem in mathematics is defined the situation in which we cannot get solution at sight. There is not a readily accessible procedure that guarantees or completely determines the solution. The procedure is

more important than the result in the problem solving.

There are several cases based on G. Polya's four step strategy to approch solutions. The G. Polya's four step strategy is consist of understanding the problem, devising a plan, carrying out the plan and looking back.

These learning materials were studied on the authority of G. Polya theory. Furthermore, the courses and the aim for the letter teaching have been established by the analysing about the 7th education process.

According to the teachers survey, learning materials were regulated and improved.

<부록 1> 호응도 조사 설문지

제목 : Polya의 이론을 적용한 학습자료 개발

-중학교 수학 중 '일차방정식의 활용'을 중심으로-

에 대한 호응도 조사 설문지

안녕하십니까? 저의 설문에 응해 주셔서 감사드립니다. 이 설문지는 중학교 대수 영역에 'Polya의 문제해결 전략을 도입한 학습자료 개발'이라는 연구를 위해 개발된 학습자료에 대한 의견을 반영하고자 제작되었습니다. 조사결과는 위의 목적 이외에는 일제 사용되지 않을 것을 약속드립니다. 솔직한 생각과 의견을 적어 주시면 감사드리겠습니다.

성신여자대학교 교육대학원 수학교육 전공 김 영 숙.

<질문에 해당하는 부분을 ∨로 기입해 주십시오>

1. 개발한 학습 자료가 일차방정식 활용의 교수 학습 자료로 효과적이라고 생각합니까?
① 매우 효과적이다.
② 대체로 효과적이다.
③ 보통이다.
④ 별로 효과적이지 않다.
⑤ 전혀 효과적이지 않다.

아래의 2, 3번은 2번에서 ①②③을 선택하신 분만 답해 주십시오.

2. 개발한 학습 자료가 효과적이라 생각하시는 이유는 무엇입니까?
① 학습에 흥미를 유발할 수 있기 때문에
② 학습 내용이 상세하고 알기 쉽기 때문에
③ 결론을 제시하기 보다는 학생들 스스로 문제를 이해하고 문제를 풀려고 시도해보기 때문에
④ 문제 해결4단계를 통해 스스로 문제를 해결할 수 있는 능력을 신장시킬 수 있기 때문에
⑤ 기타(   )

3. 개발된 자료 중 가장 마음에 드시는 부분은 어느 부분입니까? 그리고 그 이유는 무엇입니까?

아래의 4,5번은 2번에서 ④⑤을 선택하신 분만 답해 주십시오.

4. 개발한 학습 자료가 효과적이지 못하다고 생각하시는 이유는 무

엇입니까? (모두 고르시오.)
① 수준별 학습이 가능하지 않기 때문에
② 문제를 풀기전 기본 개념에 대한 이해가 있어야만 하기 때문에
③ 주관식 문제라 학생들에게 어렵게 느끼기 때문에
④ 문제 풀이 전략이 생소하기 때문에
⑤ 기타(   )

5. 개발된 자료 중 가장 마음에 드시지 않는 부분은 어떤 부분입니까?

6. 본 자료의 평가지에 대해 어떻게 생각하십니까?
① 매우 효과적이다.
② 대체로 효과적이다.
③ 보통이다.
④ 별로 효과적이지 않다.
⑤ 전혀 효과적이지 않다.

아래의 7번은 6번에서 ①②③을 선택하신 분만 답해 주십시오.

7. 평가 기준이 효과적이라 생각하시는 이유는 무엇입니까?

a. 학생 자체 평가지부분 (효과적이라 생각하시는 항목의 번호를 적고 이유를 간단히 설명해 주십시오)

b. 교사의 수행평가기준 부분

아래의 8번은 7번에서 ④⑤을 선택하신 분만 답해 주십시오.

8. 평가 기준이 효과적이지 못하다고 생각하시는 이유는 무엇입니까?

a. 학생 자체 평가지부분 (효과적이지 못하다고 생각하시는 항목의 번호를 적고 이유를 간단히 설명해 주십시오)

b. 교사의 수행평가기준 부분

9. 본 학습 자료를 수학수업 시간에 활용할 생각이 있으십니까?
① 있다.
② 부분적으로 활용하겠다.
③ 생각해 보겠다.
④ 없다.

10. 개발한 학습 자료에 개선해야 할 점이나 더 추가하고 싶은 내용이 있다면 구체적으로 적어 주십시오.

< 설문 조사에 참여해 주셔서 감사드립니다.>