沈 聖 娥 教授指導
碩士學位 請求論文

Mathematica를 활용한 효과적인 학습 지도

2005

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學敎育專攻

이 세 연

Mathematica를 활용한 효과적인 학습 지도

沈 聖 娥 敎授指導

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

2005年 5月

誠信女子大學校 敎育大學院

敎育學科 數學敎育專攻

이 세 연

認 准 書

이 세 연의 碩士學位 論文을 認准함

審查委員 ______________ 印

審查委員 ______________ 印

審查委員 ______________ 印

2005年

誠信女子大學校 敎育大學院

목　　차

논문 개요

컴퓨터를 적용한 학습은 학생들로 하여금 전에는 경험할 수 없었던 추측, 실험, 탐구, 문제해결을 직접 경험하게 함으로써 효과 있는 교육 현장으로서의 실현이 가능하게 하였다. 특히 수학교육에서 함수의 변환이나 도형의 입체적인 개념 학습에 있어 컴퓨터를 활용한 수학적 개념들의 시각화를 통해 교수-학습에 긍정적인 효과를 줄 수 있음이 연구되어 왔다.

이에 본 논문은 수학교육에서 컴퓨터 소프트웨어가 어떻게 활용될 수 있는지 알아보고 수학용 소프트웨어 Mathematica를 이용하여 구분구적법과 이차함수의 그래프에 대한 사례를 제시하고자 한다.

Ⅰ장에서는 수학교육의 경향과 수학교육과 컴퓨터에 대해 알아보고 수학교육에 활용되는 컴퓨터 프로그램들을 설명하였다. Ⅱ장에서는 Mathematica를 선택한 이유와 그 기능에 대하여 고찰하였고 이를 바탕으로 중・고등학교 교과 과정 중에서 구분구적법과 이차함수를 선택하여 Mathematica를 적용한 교수 방법과 그에 따른 수업지도안을 제시하였다.

따라서 본 논문은 수학교육에 이용하는 여러 가지 컴퓨터 프로그램을 소개하고 이를 이용해 개발된 자료를 수업에 활용하거나 학생들이 자료를 가지고 직접 연습하게 함으로써 학습효과를 높이는데 목적이 있으며 여러 가지 영역의 내용들을 컴퓨터 프로그램에서 구현하는 방법을 제시함으로써 더 좋은 자료가 개발되는데 도움이 되고자 한다.

Ⅰ. 서론

1. 수학 교육과 컴퓨터

1) 수학교육의 경향

21세기를 맞은 우리는 최첨단 컴퓨터와 정보화의 시대를 걷고 있다. 이 시점에서 자연과학과 공학의 발전을 위해서 수학교육은 밑바탕이 되어 꼭 필요하게 되었다. 현시대의 사람들이 생활하는 모든 분야에서 수학의 필요성이 나타나고 있으며 이에 잘 적응하기 위해서 수학교육은 중요한 부분 중 하나가 되었다.

수학은 자체의 체계 안에서 외부의 도움 없이 모순 없는 조화와 그 정합이 완성되는 것을 원한다. 이러한 목적을 달성하기 위하여 수학은 오랜 기간 많은 변화를 가져왔다. 그 중 20세기 초 영국의 페리(Perry, J. 1850～1920)가 1901년 The Teaching of Mathematics에서 시작한 수학 교육 개선 운동은 유클리드의 고전 기하학에만 집착한 교육 형태를 개선하는 계기가 되었고 이후 세계적인 운동으로 발전되어 페리의 실용성 강조, 독일 클라인(Klein, F. 1849～1925)의 함수 개념의 중시는 오늘날의 수학 교육의 기초가 되었다.

현대 수학은 우리가 살고 있는 세계를 이해하는데 필요한 강력한 도구를 제공한다. 과학 기술의 성장, 응용의 확대, 컴퓨터의 영향, 수학 자체의 확장 등 몇 가지 요인이 결합해서 지난 사반세기 동안 수리과학의 범위와 응용 영역을 대단히 넓혀 놓았다. 아울러 이들은 수학의 본질과 역할에

혁명을 일으키는 힘이 되었다. 우리 학생들이 내일의 세계를 잘 준비하려면 이러한 변화가 학교에 잘 반영되어야 한다. 동떨어진 과거의 수학을 반영하는 교육은 더 이상 현재의 요구에 적합하지 않다.

발달된 과학 기술적 환경은 수학교육에 있어서도 새로운 도전을 가하고 있다. 이러한 도전이 날로 커지고 있는 이 시기에 수학교육 방법에 있어서도 새로운 변화를 적극적으로 수용하고, 창의적인 사고력을 키우고, 보다 효율적으로 수학을 가르칠 수 있는 방법과 도구를 능동적으로 개발하여야 한다. 수학의 새로운 이론과 방법이 개발되고 실용화되면 그것은 다시 새로운 분야의 연구와 더욱 다양한 응용 가능성을 열게 된다. 최근 급속도로 진보하고 있는 수학교육 이론과 컴퓨터 기술의 발달은 이론적으로나 실제적으로 해결 가능한 문제의 범위를 크게 확대 시켰으며, 수학교육에 있어서도 새로운 수학적 연구 결과와 관련한 근본적으로 새로운 교육방식이 요구된다. 컴퓨터는 수학적 개념과 원리의 이해를 도와주므로 사고력과 문제 해결력을 향상시키기 위한 다양한 방법으로 수학교육에서 컴퓨터를 유용하게 활용할 수 있도록 해야 한다.

우리나라에서는 모든 교과를 효과적으로 교수-학습 할 수 있도록 초・중・고의 일반 교실에 펜티엄급 컴퓨터, 대형 TV, 실물화상기, 또는 컴퓨터 전용 모니터 등의 기자재를 갖춘 멀티미디어 교육 환경을 조성하고자 하는 사업을 계속 추진하고 있으며 또한 현시점의 수학은 새로운 요구에 따르기 위해 끊임없이 창조되고 응용되고 있다. 서로 다른 전문 영역 사이의 빈번한 상호작용은 이들의 깊은 관련성과 잠재적 통일성을 드러내면서 서로 다른 수리과학의 영역들이 과학의 여러 면에 불과하다는 것을 강하게 암시하고 있다.

2) 수학교육과 컴퓨터

밀레니엄 시대인 지금은 한 가정에 한 PC를 가지고 있으며 컴퓨터의 존재는 정보의 획득, 조직, 활용에 필요할 뿐만 아니라 컴퓨터를 이용하지 못하면 현대 사회에 적응할 수 없을 정도로 우리 사회에 깊이 관여하고 있다. 따라서 교육 분야에서도 그 어느 때보다 컴퓨터의 활용을 강조하고 있다.

컴퓨터는 이제 더 이상 연구자나 학자 또는 과학자의 전유물이 아니라, 모든 사람이 손쉽게 다루고 적극적으로 활용해야 되는 일상적인 도구인 것이다. 이런 변화는 학교 교육 과정에 컴퓨터가 가장 중요한 매체로 떠오르게 된 연유이다. 특히 수학은 컴퓨터에 의해서 보다 빠른 계산이 가능하고, 추상적 사고를 요하는 사항을 시각적으로 형상화 할 수 있을 뿐만 아니라 번거로운 계산을 위해 투자하는 많은 시간과 노력을 절약하여 효율적이고 효과적인 학습이 되도록 하며, 논리적으로 사고하고, 문제 해결 과정을 설정하고, 상호 관계를 이해하는 등에 향상된 학습을 수행할 수 있게 한다.

수학 교육에 있어서 컴퓨터의 활용은 학생들의 흥미를 진작시키고, 수학적 개념과 원리를 예시화하며 명확히 해준다. 또한 이것은 문제 해결에 따르는 학생의 반응을 분석, 판단하여 개인에게 자신의 피드백을 가능하게 해주며 학생들의 능력에 따르는 적절한 보충, 심화 자료를 제공함으로써 학습을 개별화시킬 수 있다. 수학교육의 강의 중심적인 점, 획일적인 교과서의 사용, 문제 해결을 제공하는 자료의 빈약성과 고정된 속도, 그리고 지나치게 언어적이며 제한적인 점 등을 문제점으로 지적한다면 이들을 해결할 수 있는 가장 좋은 도구가 바로 컴퓨터인 것이다. 그러므로 컴퓨터는 수학 교육에서의 우선순위를 재고하게 만든다. 스프레드시트, 수치분

석 패키지, 기호조작 컴퓨터, 정교한 컴퓨터 그래픽 등은 산업에서 강력한 수학 도구가 되었다. 수학자조차도 실험, 추측, 증명을 위해 컴퓨터를 사용한다.

현재 일선 교육현장인 학교에서는 다양한 학습 매체-Video, OHP, TV, VTR, 와이드 비전, 컴퓨터, 실물 화상기 등-을 이용하여 종래의 교육방식을 탈피한 정보화 시대의 부응하는 교육 방법 및 교육 과정을 수행하고 있다. 여기서 컴퓨터는 수학이 낳은 창조물이며, 수학이 컴퓨터를 만들고 향상시킨 반면, 컴퓨터는 수학 발전에 커다란 기여를 하고 있다. 따라서 수학교육에 컴퓨터를 더욱 효과적으로 활용할 수 있는 방안을 모색할 필요가 있는 것이다.

3) 연구의 필요성 및 목적

21세기로 들어서면서 학교교육에서도 컴퓨터의 도입 및 활용방안이 중요한 문제로 거론되고 있다. 여기에 발맞추어 수학교육에 있어서도 컴퓨터의 활용은 중요하고도 큰 문제이다. 뿐만 아니라 많은 학생들이 고학년이 될 수록 수학교과에 대한 흥미를 잃어 가는 것이 현실이다.

컴퓨터를 활용한 수학교육의 개선을 위한 여러 가지 집중적인 노력에도 불구하고 수학교육 측면에서 간과되고 있는 한 가지 중요한 사항은 수학교육과정을 설계하는데 컴퓨터의 영향을 어떻게 반영할 것인가 하는 문제이다. 우리나라에서는 1985년에 개편된 제 5차 교육 과정에서부터 컴퓨터가 학교교육에 도입되고 있으며 컴퓨터 교육은 그 성격상 어떤 다른 과목보다도 수학과 밀접한 관련이 있다.

수학교과과정에서 컴퓨터를 도입해야 하는 가장 큰 이유는 시각화라 볼 수 있다. 시각화는 수학적 행동의 모든 측면에서 도움을 줄 수 있다. 수학

의 시각화가 수학교과과정에 도움을 줄 수 있는 요인은 다음과 같다.

첫째, 수학적 지식의 의미를 눈으로 확인시킬 수 있다.

둘째, 컴퓨터 그래픽을 사용하면 학생들에게 수학적 개념을 보다 근본적으로 이해시킬 수 있다.

셋째, 지식의 생성 배경을 이해시킬 수 있음으로써 훨씬 설득력 있는 수업이 가능하다.

넷째, 시각적인 자료를 전체적으로, 경우에 따라서는 많은 내용을 연결된 상태로 담을 수 있어 보다 의미 있는 여러 지식을 한 번에 파악하기 쉽다.

다섯째, 문제 해결이나 증명에 도움이 된다.

여섯째, 공간 추론 능력을 신장시킬 수 있다.

시각화가 수학교과과정에 도움을 줄 수 있는 요인들을 살펴보았다. 그러나 그 동안 시각화는 수학교육에서 소홀히 다루어져 왔다. 그 이유는 적절한 시각화의 수단이 없었음을 들 수 있다. 판서로 교과내용을 전달하는 것이나 교과를 보충 설명하는 여러 도구들은 학생들로 하여금 다양한 장면에서 역동적인 기회를 제공하기 힘들다. 이들이 구현할 수 있는 상황은 매우 제한적이며 특히 판서수업은 '정적'일 수밖에 없다는 점에서 학생들의 흥미를 끌기는 부족하다. 컴퓨터의 출현은 이러한 방법론상의 한계를 없앨 수 있게 해준다. 미국을 비롯한 선진국에서는 학교의 수학 교육에서 컴퓨터를 도입하고 있다. 외국의 여러 나라들은 이미 LOGO등을 초·중등학교에서 활용하고 있으며, 우리나라의 대학들도 미적분학을 컴퓨터 소프트웨어를 이용하여 지도하는 사례들이 늘어나고 있다. 이와 같이 컴퓨터는 수학적 개념의 이해, 수학적 사고력, 문제해결력, 창의적 사고를 기르기 위해 사용될 수 있으나, 교육적 효과를 극대화하기 위해서는 적절한 시기에 수학의 기초 기능을 저해하지 않는 범위에서 조심스럽게 도입

되어야 한다.

제 7차 수학과 교육과정에서는 다양한 학습 지도 방법이 필수적이며, 토론, 프로젝트 수행, 탐구 활동, 소집단 활동 등을 적극적으로 도입할 수 있으며, 능력별 이동식 수업, 열린 수업, 개별화된 다양한 교수-학습방법과 계산기, 컴퓨터, 영상 매체 등 적절한 과학기술을 활용하도록 강조하고 있다.

수학교과에서 활용할 수 있는 컴퓨터 프로그램은 여러 가지가 있고 지금도 많은 새로운 프로그램들이 개발되어지고 있다. 그 중에서도 본 논문에서는 Mathematica를 활용하였다.

수학교육에서 활용할 수 있는 컴퓨터 프로그램이 많으나 Mathematica를 본 논문에서 선택한 이유는 다음과 같다. Mathematica의 여러 기능 중에서도 Mathematica 프로그램은 그래프와 수학식의 계산 과정을 시각화하는데 아주 효과적이고 반복적인 계산 기능을 잘 수행한다.

본 논문은 학생들에게 새로운 프로그램을 소개하고 언어를 가르치는 것이 목적이 아니라 교사가 Mathematica의 기능을 수업에 잘 적용하여 학생들이 수학 개념을 잘 이해하도록 돕는 것이 목적이다.

2. 수학교육에 활용되는 컴퓨터 프로그램

1) LOGO

LOGO는 1960년대 초 MIT의 인공지능 실험실과 교육 연구 학습 분야에서 Papert와 Feurzig에 의해서 만들어진 프로그래밍 언어이다. LOGO란 이름은 원래 라틴어의 logos에서 유래된 것으로, word와 thought를 뜻한

다. LOGO는 모든 연령의 아동들이 능력에 관계없이 수학 학습에 사용할 수 있도록 고안된 언어로서 피아제의 반성적 사고 및 조작적 사고에 대한 심리적인 근거를 가지고 있다.

컴퓨터를 활용하여 수학 교육을 개선하려는 많은 움직임 중에서 LOGO는 독특한 영역을 차지하고 있다. 기본적으로 수학 학습을 위해 개발된 컴퓨터 언어이고 추상적인 수학적 개념을 구체적인 활동을 통해 이해시킬 수 있으며 그 활동의 결과는 나중의 추상적인 수학 학습을 위한 모태가 된다는 아이디어에서 개발되었다.

LOGO의 특징인 거북 그래픽(Turtle Graphics)-거북이라고 불리는 물체의 움직임에 따라 그래픽이 그려지는 것-은 도형 학습을 보다 효과적으로, 보다 깊이 이해하고 탐구하게 한다.

LOGO는 많은 특징을 가지고 있지만 수학 교육에서 이용 가능한 특징은 다음과 같다.

첫째, 도형 개념을 지도하는데 있어서 좀 더 직관적인 방법을 택할 수 있다. LOGO의 그래픽 기능은 도형과 도형의 변환과 관련된 학습 내용을 전체적인 시각을 통해 파악하도록 하며 도형을 마음대로 조작할 수 있도록 한다.

둘째, 적절한 정리를 발견하고 형식화하며 가설을 설정하는 능력은 증명하는 능력만큼 중요하다. 컴퓨터의 그래픽 기능과 계산 처리 능력은 도형의 관계를 탐구하고 추정하는 실험의 기회를 제공한다.

셋째, LOGO를 이용한 프로그래밍 자체가 논리적 추론 과정이므로 프로그래밍 활동은 논리적 추론 능력이나 문제 해결력을 향상 시킨다.

넷째, 학생들에게 종래와는 다른 기하 교육 환경을 제공한다. 학생들은 거북 그래픽을 이용하여 초등학교 저학년에서부터 도형을 그리는 훈련을 함으로써 기하학의 중요 원리를 조기에 익힐 수 있다.

2) MOTIONS

학생들이 실험적 과정을 통해서 수학적 개념들을 학습하게 하는 컴퓨터 패키지의 대표적인 예는 Thmopson의 MOTIONS이다.

MOTIONS는 평면의 동등변환(Isometric Transformation)을 위한 Microworld이다. MOTIONS는 이동기하를 수학체계로서 이해하고 학생들로 하여금 다변수변환의 개념, 변화시 불변인 동작의 합성들을 발견하도록 고안되어 있다.

MOTIONS는 직교 좌표축상의 작은 깃발이 그 대상이 되는데, 깃발은 위치(positions), 머리(heading), 방향(orientation)이라는 세 가지 특성을 갖고 있다. 위치는 깃봉이 지면에 닿고 있는 점이고, 머리는 깃봉이 이루는 각이고, 돌리고자 하는 쪽이 방향이 된다.

3) SPREADSHEET

Spreadsheet는 컴퓨터 응용 소프트웨어의 일종으로 Dan Bricklin이 최초로 개발한 수량적 데이터를 처리하는 회계 관리용 프로그램인 VisCalc가 그 시초이다. 그 후 MagiCalc, PractiCalc, KilCalc 및 SuperCalc 등이 계속적으로 개발 되었으며, 여러 가지 다양한 기능들과 통합된 프로그램으로써 Lotus 1-2-3, Symphony, Excel 등이 개발되어 현재까지도 유용하게 사용되고 있다.

이 Spreadsheet는 컴퓨터의 신속하고도 정확한 계산처리 능력을 이용하여 산술적 계산이나 그 밖의 데이터 조작을 효율적으로 수행할 수 있도록 설계되어 있다. 컴퓨터의 응용 소프트웨어의 일종인 Spreadsheet는 과거의 연필과 종이와 계산기를 가지고 수많은 시간을 들여서 수행하던 방대

한 데이터의 기록, 계획 또는 추정 등의 전자적 표현이라 할 수 있다.

이러한 전자 Spreadsheet는 수량적 데이터를 처리하는 회계 관리용 프로그램이로서 행과 열이 교차된 지점에 사각형으로 만들어지는 전자계산서를 의미하며, 입력 데이터에 대한 수치 계산 기능과 처리 기능, 문서 작성 기능, 그래픽 작성 기능 등을 갖는 소프트웨어이다.

Wilson(1985)에 의하면 교육적 도구로서의 Spreadsheet는 계수들과 공식들을 조직화하여, 프로그램 내에서 일련의 계수들을 변화시킴으로써 자동적이고 즉각적으로 계산해서 그 결과를 보여주는 사용자가 눈으로 볼 수 있는 패턴을 도출할 수 있도록 해준다.

따라서 Spreadsheet를 활용하는 수업은 일반 수업의 소극적 주입식 학습에 비해 능동적, 발견적 학습을 중심으로 실시될 수 있으므로 컴퓨터를 학습자 자신의 다양한 기능의 전자계산기와 같이 활용하여 수업에 보다 적극적, 생산적으로 임하도록 도와준다.

그러므로 학생들의 발견적 학습을 도모하고 문제해결 능력과 정보 활용 능력을 함양시킬 수 있는 컴퓨터 학습 환경으로서 Spreadsheet의 활용과 같은 컴퓨터의 도구적 접근이 이루어져야 하겠다,

Spreadsheet는 문제 해결이나 일반화 작업, 예측, 의사 결정 또는 가설화 작업 등의 기술을 개발하고 강화함으로써 과학이나 수학, 사회과학 등의 분야에서 매우 중요한 교수-학습 도구로 인식되고 있다. 과학에서의 여러 형상이나 이론, 가설에 대한 수치적 검증이 가능하고 사회과학에서도 여러 인구통계학적 예측에 사용되어 질 수 있다. 수학에서는 사칙연산이나 수리 개념의 이해를 돕는 효율적 도구로 사용 가능하다.

4) 그래프마법사

그래프마법사는 교육 분야의 멀티미디어 콘텐츠를 연구-개발하는 교육 소프트연구소에서 개발하였고, 1999년 9월 version 2.0으로 기능을 향상시켜 보급하고 있는 국산 소프트웨어이다. 그래프마법사의 최소 사용 환경은 시스템사양 486 IBM PC 이상의 호환기종, 운영체계 Windows 95이상, RAM 16Mb 이상이면 사용 가능하다.

그래프마법사의 특징은 다음과 같다.

첫째, 편리하고 간단한 사용법에 있다. 한글을 사용하여 누구나 부담 없이 쉽게 배워 사용할 수 있다. 또한 윈도우를 사용하는 사람이라면 누구나 부담 없이 쓰고 있는 탐색기와 같은 형식으로 함수를 입력하고, 관리하도록 되어 있기 때문에, 소프트웨어의 사용법에 대한 별도의 학습이 거의 필요하지 않다.

둘째, 다양한 형태의 그래프를 그릴 수 있다. 지금까지의 교육용 그래프 소프트웨어에서는 대부분 직교좌표 형식의 그래프 기능만 제공하는데 비해서, 그래프마법사에서는 매개변수나 극좌표, 그리고 구간별 그래프 기능까지도 제공한다. 또한 사용자가 입력한 함수식에 대한 그래프만 그려주는 것이 아니라, '수치조작 테이블'이라는 기능을 제공하여, 사용자가 직접 데이터를 입력하여 하나의 테이블을 만들고, 이 테이블에 입력한 데이터를 사용해서 그래프를 그려낼 수도 있다. 이와 같은 '수치조작 테이블'을 사용하면 사용자가 직접 데이터를 입력하지 않고 함수패널에 있는 함수식에 대한 데이터를 직접 읽어서 원하는 형식으로 수정하여 그 결과를 다시 그래프로 나타낼 수도 있다.

셋째, 애니메이션 및 슬라이드쇼 기능이 있다. 그래프마법사에서는 사용자가 입력한 여러 개의 그래프를 하나의 좌표 위에 동시에 나타내는 것뿐

만 아니라, 이들 각각의 그래프를 애니매이션이나 슬라이드쇼 형식으로 화면에 나타낼 수가 있다. 이와 같은 기능은 $y=af(bx+c)+d$와 같은 함수에서 a,b,c,d의 값을 바꿀 때 그래프의 모양이 어떻게 되는지 등의 내용을 가르칠 때 아주 효과적으로 활용할 수가 있다.

넷째, 편리한 줌 기능이 있다. 그래프마법사에서는 마우스를 사용해서 그래프의 특정 영역을 지정해 주기만하면 그 영역만을 확대해서 그려주는 편리한 줌 기능을 가지고 있다. 게다가 다른 종류의 프로그램과는 달리 확대 그래프를 보여주는 창이 별도로 마련되어 있기 때문에 원래의 그래프와 부분 확대한 그래프를 동시에 볼 수 있으며, 줌 이전의 그래프를 다시 그리느라고 그래프의 범위 값을 일일이 다시 지정할 필요가 없다. 다만 확대한 부분의 그래프 일부분을 계속해서 더 연속적으로 확대해 주는 기능이 없어서 세밀한 관찰이 어렵다.

다섯째, 그래프의 선택적 표시기능이 있다. 경우에 따라서는 여러 개의 그래프에 대한 수식을 미리 입력해 둔 다음에 그 중에서 몇 개는 지금 당장 화면에 나타내고 나머지는 화면에 나타내지 않고자 할 때도 있다. 그렇다고 지금 화면에 나타내지 않는 그래프를 삭제해버리자니 다음번에 이들 함수들을 다시 사용하고자 할 때도 있기에 망설이게 되는데, 그래프마법사에서 제공하는 선택적 표시기능을 사용하면 이미 입력된 함수들 중에서 현재 화면에 나타내지 않고자 하는 함수에 대해서만 일시적으로 기능중지를 시킬 수가 있다. 여러 교실에서 같은 수업을 진행할 때 매우 편리한 기능이다.

여섯째, 좌표값 추적 기능이 있다. 그래프에 대한 수업을 하다보면 그래프의 모양뿐만 아니라 그래프의 각 지점에 대한 구체적인 좌표값을 알아야할 필요가 있는데 이와 같은 경우를 위해서 그래프마법사에서는 좌표값 추적기능을 제공한다. 이 기능을 사용하면 그래프의 각 지점을 따라가면

서 그 지점에 대한 좌표 값을 화면으로 확인할 수가 있다.

일곱째, 함수 저장 기능이다. 그래프마법사에서 사용자가 입력한 함수나, 사용자 정의 기능을 사용해서 만든 함수들은 모두 파일 형식으로 저장할 수가 있기 때문에, 일단 한 번만 준비를 해 두면 언제 어디서나 반복해서 사용할 수가 있다. 이렇게 해서 한 번만 수업 준비를 하면 그 내용을 그대로 반복해서 사용할 수가 있으며, 학생들의 과제물을 이와 같은 파일 형식으로 제출 받을 수도 있다.

그 밖의 기능으로는 입력된 함수를 그래프로 나타내주는 것뿐만 아니라 이 그래프를 대상으로 여러 가지 계산 기능을 수행할 수가 있다. 평균변화율과 미분계수를 구해 주며, 접선의 그래프, 법선의 그래프, 도함수의 그래프, 부정적분의 그래프를 그려주고 사용자가 지정한 범위에 대한 정적분 값까지도 계산해준다. 또한 함수의 최대, 최소값과 두 그래프의 교점의 좌표도 구해준다.

이상 위에서 열거한 여러 특징을 이용하면 함수에 대하여 정확한 개념과 원리를 시각화함으로써 학생들의 함수 학습이 매우 수월하게 이루어질 수 있으며, 교과서에서 다루는 간단한 유형의 문제풀이와 실생활에서 접하는 복잡한 유형의 문제, 여러 실용문제도 다룰 수 있게 된다. 함수의 그래프를 이용한 대수문제의 다양한 풀이도 가능해져서 학생들에게 문제 풀이의 다양한 방법을 알 수 있게 해준다.

5) Advanced Grapher

Advanced Grapher의 기능을 살펴보면 그래프마법사가 구현하는 대부분을 가능하게 한다. 따라서 그래프마법사와 비슷한 기능들은 설명하지 않고 Advanced Grapher의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 부등식의 영역을 표시해준다. 이 기능을 이용함으로써 부등식 응용문제 해결에 손쉬운 접근이 가능하고, 복잡한 최적화 문제 해결에 도움을 줄 수 있다.

둘째, 그래프마법사의 기능에 포함되어 있는 애니매이션 기능과 슬라이드쇼 기능은 없지만 그래프의 특정부분을 연속적으로 확대해 나갈 수 있는 확대 기능이 있다. 이 기능을 이용함으로써 수업시간에 특정영역에서 잘 이해되지 않고 설명하기 어려웠던 부분을 시각화함으로써 큰 도움을 주게 된다. 예를 들면, 함수의 그래프, 함수의 극한, 미분법, 적분법의 수업시간에 정확한 그래프를 이용한 지도를 할 수 있다.

셋째, 되살리기 기능이 있다. 이 기능은 이용 상의 실수로 인하여 처음부터 다시 작업을 하게 되는 실수를 방지해 준다.

넷째, Value Table 기능이 있다. 예를 들어 삼차함수 $y=x^3$의 그래프를 그릴 때 Value Table에서 변수 x의 값에 대응하는 함수 값 y의 대응표를 만들어 저장한 후에 함수 메뉴의 Add Graph에서 불러내어 점 또는 선으로 그래프를 그릴 수 있다. Value Table기능은 함수의 그래프가 그려지는 원리를 쉽게 이해할 수 있게 해준다.

6) Geometer's Sketchpad

Geometer's Sketchpad(이하 GSP)는 1995년 Nicholas Jackiw에 의해 개발된 프로그램으로 도구상자에 있는 점, 선, 원을 이용하여 여러 평면기하의 기본성질 및 함수의 그래프의 특징을 쉽고 명확하게 이해할 수 있도록 작도해 주는 프로그램이다.

GSP는 앞에서 언급한 그래프마법사나 Advanced Grapher와는 다른 독특한 기능을 갖고 있다.

첫째, 기하학적 도형을 쉽게 작도할 수 있을 뿐만 아니라 작도를 하고 난 후에 도형의 일부를 마우스를 이용하여 끌기를 하면 도형이 움직이는 모습을 보면서 쉽게 변형도 할 수 있다. 예를 들어 삼각형을 작도한 후 무게중심을 나타냈을 때 마우스로 한 꼭지점을 잡아끌면서 삼각형의 모양을 변형시키면 무게중심도 함께 변하는 모습을 역동적으로 관찰할 수 있다. 이러한 장점 때문에 전국 수학교사들의 모임인 수학사랑에서 한글화 한 후 적극적으로 보급하고 있으며 중학교 기하단원에서 움직이는 기하라는 이름으로 널리 활용되고 있다.

둘째, 각의 이등분선, 선분의 중점, 평행선 그리기, 수직선 그리기 등 기본적인 작도 기능을 한 번에 수행할 수 있다. 또한 평행이동, 대칭이동, 회전이동의 변환도 한꺼번에 가능하다.

셋째, 함수의 그래프를 그린 후 도구상자의 선택도구-이동, 회전, 확대, 축소 변환-을 이용하여 그래프를 변화시킬 때 계수의 값이 동시에 같이 변하는 모습을 볼 수 있다. 이는 계수의 값이 그래프를 어떻게 변화시키는가를 쉽게 이해 할 수 있도록 도와준다.

넷째, 메뉴상자에 있는 측정과 그래프를 사용하면 도형의 여러 가지 성질이 직교좌표나 극좌표에서 해석기하로 설명 가능하다.

다섯째, 애니메이션이 쉽게 구현되어 도형의 자취나 궤적을 그려낼 수 있다.

여섯째, Script를 이용하여 그림 그리는 과정을 기록할 수도 있고, 그 기록을 다시 재생 할 수도 있다. 또, Script에는 반복 기능이 있어서 Fractal 그림도 그릴 수 있다.

이상과 같은 GSP의 특징을 수업에 활용하면 학생들의 흥미를 자극해서 학습 욕구를 유발시키고 실험을 하듯 많은 도형을 그 정의에 의하여 구현해 봄으로써 확실한 개념을 얻고, 그로부터 파생되는 도형의 성질에 자연

스럽게 접근할 수 있다.

7) Mathematica

Mathematica는 1988년 미국의 이론 물리학자 Stephen Wolfram이 이공계에서 일을 하는 사람들이 어려운 수학문제를 컴퓨터를 이용하여 쉽게 풀 수 있도록 강력한 기능을 갖춘 소프트웨어로 개발하였다. 1988년에 처음 발표된 이후 2003년 Mathematica version 5가 발표되었다. 고등학교 수준의 수학은 대부분 해결 할 수 있는 소프트웨어이기에 앞에서 알아본 프로그램이 갖추지 못한 기능 위주로 알아보겠다.

첫째, 수치연산 뿐만 아니라 문자 및 기호 연산 능력을 갖고 있다. 고등학교 수학교과에 나오는 다항식의 연산, 방정식 및 부등식의 풀이, 미적분 등 모든 분야에서 계수에 문자가 포함된 수식도 연산을 할 수 있다. 이때 수식을 입력하는 방법은 간단하여 워드프로세서에서 수식을 입력하는 방법과 비슷하다. 계산 결과의 표준 출력 형식은 수학적 수식 표현을 기본으로 한다. 이점은 휴대용 계산기나 다른 수학용 소프트웨어에서 구현하기 힘든 기능이며 일반적으로 수학에서 답을 표현하는 방법과 같다. 특히 수치연산의 결과를 정수의 경우 완전한 정확도로 자릿수에 관계없이 표시해 준다.

둘째, 그래픽 표현에 있어서 사용자가 입력한 수식을 2차원 또는 3차원 그래픽으로 표현해 준다. 또한 동영상 기능이 있어서 그동안 지필수업에서는 제대로 설명하지 못하였던 많은 부분의 내용을 쉽게 설명해 학생들이 빠른 이해를 할 수 있고 수학에 대한 시각을 더욱 친숙하게 할 수 있다.

셋째, 프로그래밍에 대한 충분한 지식만 습득하면 어떤 수학문제도 해

결할 수 있는 탁월한 프로그래밍 기능을 갖고 있다.

Ⅱ. 본론

1. Mathematica 선택 이유

학생들이 수학을 어렵고 딱딱한 과목으로 느끼는 것은 수학자체가 가지고 있는 논리성 및 형식성과 함께 정적인 언어 중심으로 구성되어 있는 현행의 교과과정에서 원인을 찾을 수 있다. 그리고 학습현장에서도 정확한 개념의 이해와 인식보다는 기계적인 풀이방법에 의존하여 해답을 구하는데 주력함으로써 학생들의 흥미를 끌지 못하고 있다. 또한 교사자체도 수학교과내용을 지도함에 있어서 교구를 사용하여 학생들의 흥미를 유발시키고 수업에 함께 동참하도록 하는 방법을 기피하는 경향이 있다.

이러한 수학교육의 문제점을 개선시키기 위한 여러 가지 방법 중의 하나가 시각화이다. 시각화는 학생들의 직관에 와 닿을 수 있는 시각적인 자료를 탐구하게 함으로써 이해를 보다 쉽게 하고 흥미 있고 의미 있는 교육환경을 제공하는 것이다. 기호로 된 수학적 지식을 형식 논리적으로 지도하는 것과는 달리 시각적 자료를 통한 학습으로 학생들 스스로 직접 눈으로 확인하게 함으로써 더욱 효과적이며 의미 있는 학습을 가능하게 한다. 이러한 효과를 발휘할 수 있는 프로그램으로는 Mathematica가 적당하다고 본다.

본 연구에 관심을 갖고자 하는 중·고등학교 학생들이 교과서에 나온 복잡한 식들을 Mathematica를 사용하여 그려봄으로써 학습 내용에 대한 이해를 더 깊이 할 수 있을 것이며, 각각의 식에 변수의 변화가 전체에 어떤 영향을 주는 지도 쉽게 이해 할 수 있을 것이다. 더구나

Mathematica의 그래픽 처리 능력은 매우 막강하며 다양하기 때문에 2차원 또는 3차원 공간에서의 함수의 그래프와 도형의 표현에 매우 효과적이고 유용한 도움을 줄 수 있을 것이다. 컴퓨터 화면에 표현을 함에 있어서는 중・고등학교 교과 내용의 거의 모든 영역이 활용 가능하다고 볼 수 있으나 수학 교육목표 등을 고려한다면 학습 과정(주로 계산결과물을 얻는 것)을 Mathematica에만 의존하게 되는 것은 바람직하지 못하다. 따라서 다음과 같은 방법으로 활용한다면 더욱 바람직하고 효과적인 학습이 될 것이며 수학과 목표를 이루는데 도움을 줄 수 있을 것으로 예상한다.

예를 들어서 기본적인 계산을 학습하게 될 때 하나의 식을 배우고 문제해결에 적용함에 있어서 다양하게 데이터를 변화시켜 가면서 문제를 풀어나감으로써 배운 식을 적용하는 과정에서 Mathematica가 빠른 시간에 답의 정오여부를 개인별로 알려 줄 수 있도록 한다거나 많은 데이터를 다루거나 복잡한 소수나 아주 큰 값을 대입해서 결과를 얻는 통계단원인 경우에 Mathematica를 활용하여 주어진 데이터들의 관계를 편리하게 적절한 그래프로 수치화 시켜봄으로써 다양한 학습 경험이 가능하도록 해 주는 것 등이 그것이다.

2. Mathematica의 기능

1) 계산 기능

Mathematica는 기본적으로 기호연산을 하는 소프트웨어이지만, 수치계산 능력 또한 강력하다. 계산기와 같은 산술계산이 가능하며, 함수 N을 이용하면 근사값 계산도 가능하여 수학적인 대상에 대하여 수치적인 방법

(Numerical Method)를 적용할 수 있다. 계산기와는 달리 실수 뿐 아니라 복소수를 대상으로 하는 계산도 가능하며, 영역별로 함수 package를 가지고 있어서, 미적분학의 기초인 극한을 계산할 수 있고, 적분에서는 정적분 뿐만이 아니라 부정적분까지도 계산 할 수 있다. 이 밖에도 Zeta 함수, Bessel 함수 등 표준 수학함수 모두를 계산 할 수 있다. 또한 Mathematica에서는 여러 계산을 { }로 묶어서 한 번에 처리하고 그 결과도 한 번에 보여준다. 분수의 계산은 그 결과를 분수로 나타내어 준다.

2) 기호 및 대수 연산 기능

일반적으로 수학책에서와는 달리 컴퓨터 프로그램에서만 통용되는 수식의 표현이 있는데, 예를 들면 $x^3-\frac{1}{3}x+\frac{1}{x}$ 을 x^3-(1/3)x-1/x로 나타내는 것 등이다. Mathematica는 이렇게 후자와 같이 입력한 수식을 $x^3-\frac{1}{3}x+\frac{1}{x}$와 같이 수학 책에서 볼 수 있는 표준적인 형태로 나타내 준다.

Mathematica는 수의 계산뿐만 아니라 문자가 들어간 식도 자유자재로 다룰 수 있다. 구체적인 예로서 다항식의 전개나 인수분해, 유리식의 통분, 유리식을 약분하거나 간략한 형태로 만들 수 있고, 대입에 의한 식의 계산, 식의 정리, 다항식에서 주어진 문자의 계수를 찾아내기도 하며, 유리식을 부분분수로 만든다. 또한, 다항 방정식이나 미분방정식의 해를 내장된 함수를 이용하여 구해 내기도 한다.

예를 들면 우리는 이차 방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$의 근이 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$임을 잘 알고 있다. 그런데 컴퓨터로 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$를 수치 해석적인 방법으로 풀 경우 a, b, c가 구체적인 숫자가 아

닌 경우는 풀지도 못할뿐더러 가령 $x^2-2=0$을 수치적으로 푼다면 $x=1.4142136$을 답으로 낼 것이다. 이는 실제 해인 $x=\pm\sqrt{2}$와 비슷하지만 틀린 답이다. 그러나 Mathematica는 $x^2-2=0$에 대해 $x=\pm\sqrt{2}$을 답으로 내주며, 심지어 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$에 대해서도 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$을 답으로 나타낸다.

```
In[1]:= Solve[x^2 - 2 == 0]
```

$$\text{Out[1]= } \{\{x\to -\sqrt{2}\},\{x\to\sqrt{2}\}\}$$

```
In[2]:= Solve[a*x^2 + b*x + c == 0, x]
```

$$\text{Out[2]= } \left\{\left\{x\to\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\},\left\{x\to\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\right\}$$

이 때 처음 이차함수를 배우는 학생들에게 Mathematica를 이용하여 바로 해를 구하는 것은 좋은 교수-학습 방법이 아니다.

3) Graphic과 Sound 기능

Mathematica에서 제공되는 기능 중에서 가장 시각적이며, 사용자를 감탄하게 만드는 부분이 그래픽기능이다. 이 기능을 이용하여 수학을 가르치는데 있어서 함수의 식을 그래프로 시각화할 수 있는 유용한 기능이며 본 논문에서도 가장 많이 사용한 기능중 하나이다. Mathematica에는 다양한 수학, 물리 함수가 내장되어 있으며, 사용자가 자유롭게 자신의 함수를 정의할 수 있고 그래프의 형식도 2차원 그래프, 3차원 그래프, 매개변수 그래프 등으로 다양하게 지원하므로 원하는 형태의 그래프를 원하는 관점에서 그려볼 수 있다. 그리고 좌표축이나 함수값의 범위 등을 알아서 적당히 조절해 주는 기능이 있으므로 신경 쓸 필요가 없다.

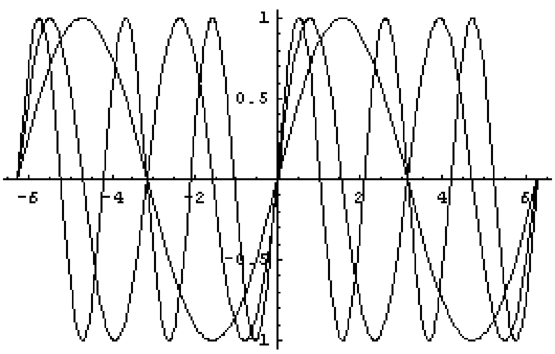
Mathematica에서 그려진 그래프들과 입력내용 및 결과는 클립보드에 옮겨질 수 있으므로 리포트나 연구논문 작성 시 그래프나 계산결과를 아주 편리하게 삽입시킬 수 있다. 또한 한글윈도우즈나 영문윈도우즈의 환경 하에서 사용하면 그래프에 자유자재로 한글을 사용할 수 있다. 즉, 그래프의 제목이나 설명, 축의 이름을 한글로 달 수 있다는 뜻이다.

극좌표나 직교좌표, 또는 매개변수로 표현된 식의 그래프를 한꺼번에 같은 좌표평면에 그릴 수 있으며, 독립변수가 두 개인 경우에 3차원의 그래프를 그릴 수도 있고 관점이나 음영을 옵션으로 달리 조정함으로써 여러 각도에서 바라 본 그래프를 동화상으로 보여 줄 수도 있다. 그 밖에 등위곡선이나 Density Plot도 그릴 수 있는데 기본적인 기능을 제외하고 graphic 패키지에 실어서 작동시키게 된다. 또한 두 개 이상의 그래프를 한 평면에 그릴 수 있다.

또 $f(x)=\sin x$와 같은 파형함수(Wave form)을 입력했을 때 그 함수가 나타내는 파(wave)의 주파수와 파고에 해당하는 음을 나타내는 Sound 기능이 있다.

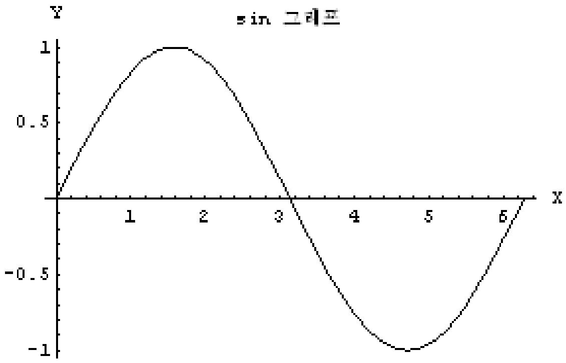
다음의 예는 $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$를 한 좌표평면에 그래프로 나타낸 것이다. 각 그래프를 구별하기 위하여 색을 다르게 할 수도 있다. 또한, GraphicsArray를 이용하여 그래프의 배열도 자유자재로 할 수 있다.

```
Plot[{Sin[x], Sin[2 x], Sin[3 x]}, {x, -2 π, 2 π}];
```



이번에는 sin$x$의 그래프를 그려보고 그래프에 제목과 각축의 이름을 붙인 예이다.

```
In[5]:= Plot[Sin[x], {x, 0, 2π}, PlotLabel -> "sin 그래프",
         AxesLabel → {"X", "Y"}];
```



4) List 기능

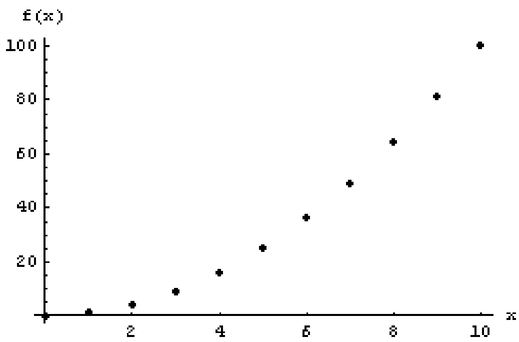
Mathematica는 수값의 List를 출력하기도 하고, 길이나 차원 등 List의 구조를 규명하기도 한다. 또 어떤 원소가 List에 포함되어 있는 지의 여부 등을 판단하기도 하며, List의 특정 번째의 원소를 찾아내기도 한다. 여러 개의 List들을 통합하거나 재배열할 수 있으며 원소들을 분할하기도 한다. 벡터나 행렬을 List로 나타내어 여러 가지 연산을 할 수 있으며, List에서 배열순서를 무시하면 집합으로 취급할 수도 있다.

다음의 예는 Table 기능과 List 기능을 이용하여 이차함수 $f(x)=x^2$을 x의 값을 0부터 10까지 1씩 증가한 값을 좌표평면에 나타낸 것이다.

```
In[6]:= data1 = Table[{x, x^2}, {x, 0, 10, 1}]

Out[6]= {{0, 0}, {1, 1}, {2, 4}, {3, 9}, {4, 16}, {5, 25},
        {6, 36}, {7, 49}, {8, 64}, {9, 81}, {10, 100}}

In[7]:= ListPlot[data1, PlotStyle → PointSize[0.02],
          AxesLabel → {"x", "f(x)"}];
```



5) Notebook 기능

Mathematica는 어떤 컴퓨터 대수체계 보다도 Notebook으로서의 뛰어난 기능을 가지며 이것은 우리가 메모로 남기고 싶은 것을 Notebook에 기록하여 필요시 참고로 하는 것과 같은 것이다. Mathematica에서 실행한 계산, 수식 혹은 그래프 등의 결과는 일단 Mathematica의 실행이 끝났을 때 컴퓨터의 기억장치에서 모두 지워져 버리므로 재사용 할 수가 없다. 그래서 재사용해야 하는 수학 모형들을 파일에 저장해 두었다가 필요할 때마다 다시 쓸 수 있다.

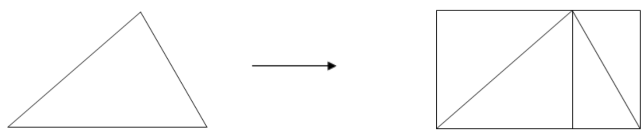
3. Mathematica의 활용의 예

1) 구분구적법

(1) 구분구적법이란 무엇인가

① 넓이

넓이는 직사각형에서 출발한다. 직사각형의 넓이는 (가로)×(세로)로 정의한다. 다른 모든 도형의 넓이는 여기서 유도된다. 아래 그림에서 삼각형은 직사각형의 절반임을 알 수 있다. 즉 삼각형은 (밑면)×(높이)÷2임을 알 수 있다. 모든 다각형의 넓이는 삼각형으로 쪼개서 계산할 수 있다.



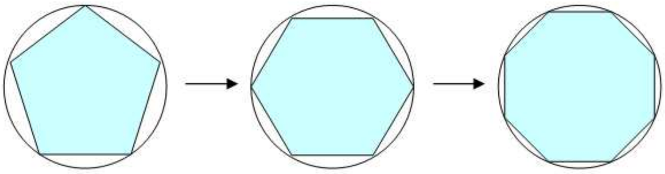
② 원의 넓이 구하기

원의 넓이 공식은 πr^2이다. 여기서 이 공식을 증명해보자. 원은 삼각형으로 쪼개지지 않는다. 발상의 전환이 필요하다. 다음과 같이 하자.

a. 먼저 원에 내접한 정 n각형으로 근사값을 구한다.

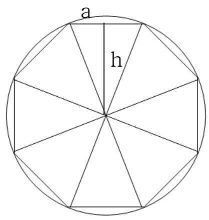
b. n을 ∞로 보낸다.

다음의 그림을 보면 n이 커짐에 따라 다각형이 원에 접근함을 알 수 있다. 즉 위의 두 과정을 거치고 나면 실제 원의 넓이가 나온다.



a. 자, 그림 원에 내접한 정 n각형의 넓이를 구하자.

오른쪽 그림과 같이 쪼갠다. n개의 삼각형으로 쪼개졌다.



삼각형 1개의 넓이는 $\frac{1}{2}ah$

따라서 정 n각형의 넓이는 $S_n = \frac{1}{2}ah \times n = \frac{1}{2} \times na \times h$

이것이 바로 원의 넓이의 근사값이다.

b. 이제 n을 ∞로 보내면 된다. 그러면 실제 원의 넓이가 된다.

$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (\frac{1}{2} \times na \times h)$

여기서 $n \to \infty$일 때, h는 반지름 r로 접근한다.

또, na는 다각형의 둘레이다. 따라서 $n \to \infty$일 때, na는 원의 둘레 $2\pi r$로 접근한다.

$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (\frac{1}{2} \times na \times h) = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$

③ 구분구적법이란 무엇인가?

원 넓이의 계산은 다음 두 단계를 거쳤다.

a. 근사값 S_n을 구한다. b. $\lim_{n \to \infty} S_n$을 구한다.

이 두 단계를 통해 실제넓이를 구하는 것이 바로 구분구적법이다.

(2) Mathematica를 활용한 구분구적법 수업의 실제

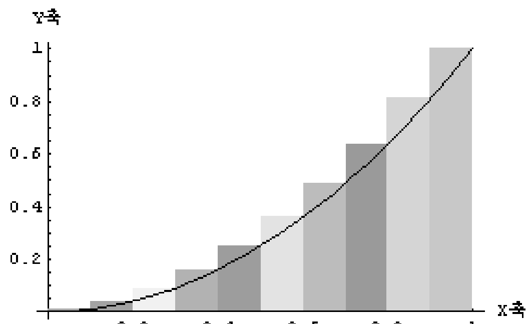
곡선 $y = x^2$과 x축 및 직선 $x = a\ (a > 0)$으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자. 구간 $[0, a]$를 n등분 하여 n개의 직사각형을 만들고, 이들 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하자. 여기서 n을 한없이 크게 하면 S_n은 S에 충분히 가까워진다. 앞에서 설명하였듯이, n개의 충분히 작은 도형의 넓이 또는 부피의 합으로 근사값을 구하고, 이 근사값의 극한으로 도형의 넓이나 부피를 구하는 방법을 구분구적법이라고 한다.

이 장에서는 Mathematica를 사용하여 구분구적법을 설명할 때, n등분한 직사각형들의 합을 윗쪽합과 아랫쪽합을 이용하여 구현해 볼 것이다. 여기서 윗쪽합을 S_n이라 하고 아랫쪽합을 S_n'이라 하겠다.

[예제] 곡선 $y = x^2$과 x축 및 직선 $x = 1$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법에 의해서 구하여라.

(Method 1) 윗쪽합 이용하기

▶ 곡선 $y = x^2$에서 구간 [0, 1]을 10등분하기



▶ 10등분한 직사각형 넓이와 실제넓이 비교

함수 $f(x) = x^2$에서 구간 [0, 1]을 10등분하여 그 분점의 좌표를 차례로 $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3$, $\cdots$, $x_n = 1$이라 하고 $\triangle x = \dfrac{1-0}{10} = 0.1$이라 할 때, 10개의 직사각형 넓이의 합 S_{10}을 계산하면

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} f(x_k) \triangle x$$

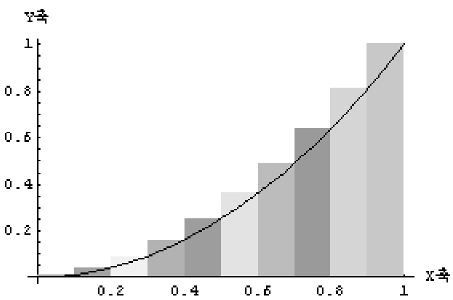
$$= f(0.1)0.1 + f(0.2)0.1 + f(0.3)0.1 + \ldots + f(1)0.1 = 0.385$$ 이다.

(여기서 x_k는 구간 $[x_{k-1}, x_k]$에서 오른쪽 값을 말한다.)

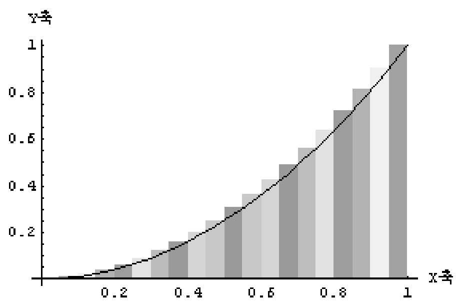
그리고 실제 넓이는 $\int_0^1 x^2 dx = [\frac{1}{3}x^3] = \frac{1}{3} ≒ 0.33333$으로 S_{10}과 실제 넓이와의 오차가 약 0.051667이다.

이제 주어진 구간을 보다 세분화하면 어떠한 점을 발견할 수 있는지 다음 실험을 통해 알아보자.

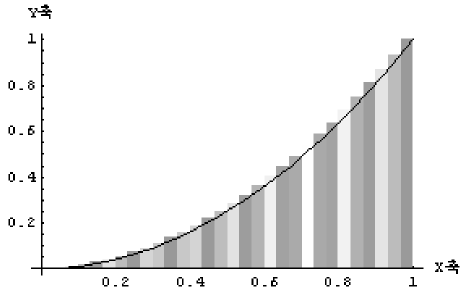
▶ 주어진 구간을 세분화할수록 윗쪽합이 실제넓이와 근접해짐을 확인



분할 = 10
윗쪽합 = 0.385
실제넓이 ≒ 0.333333
오차 = 0.051667



분할 = 20
윗쪽합 = 0.35875
실제넓이 ≒ 0.333333
오차 = 0.025417

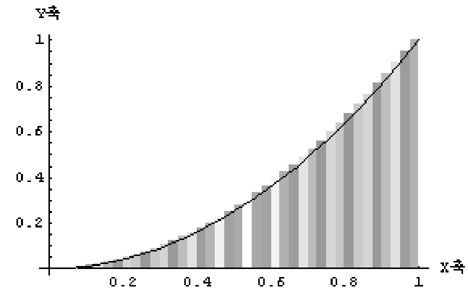


분할 = 30

왼쪽합 = 0. 350185

실제넓이 ≒ 0.333333

오차 = 0.016852

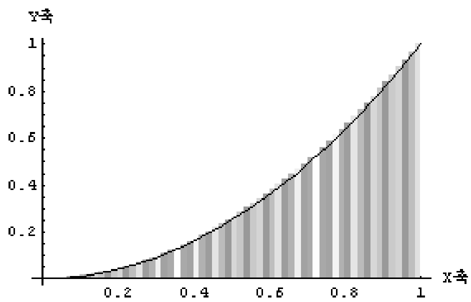


분할 = 40

왼쪽합 = 0.345938

실제넓이 ≒ 0.333333

오차 = 0.012605

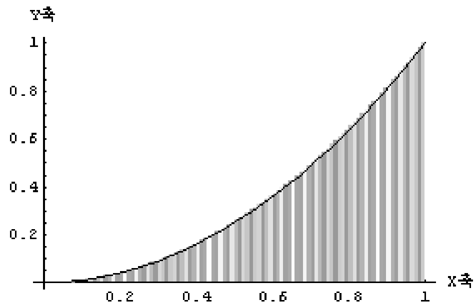


분할 = 60

왼쪽합 = 0.341713

실제넓이 ≒ 0.333333

오차 = 0.00838

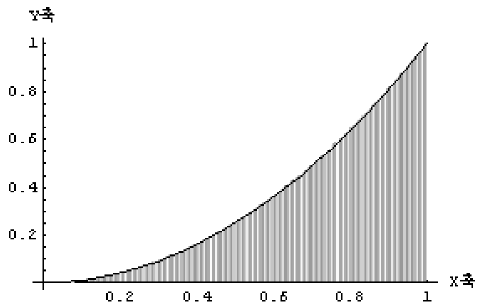


분할 = 100

왼쪽합 = 0.33835

실제넓이 ≒ 0.333333

오차 = 0.005017

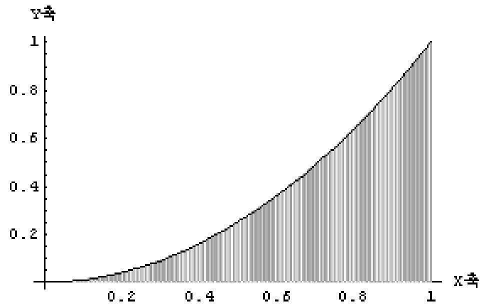


분할 = 200

왼쪽합 = 0.335838

실제넓이 ≒ 0.333333

오차 = 0.002505



분할 = 1000

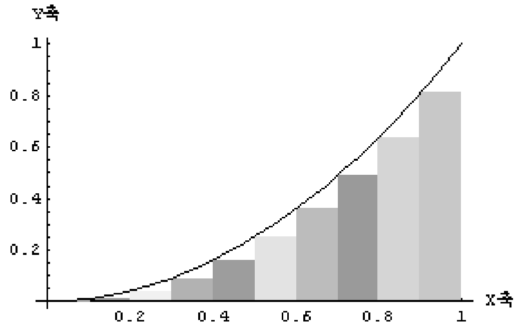
왼쪽합 = 0.333833

실제넓이 ≒ 0.333333

오차 = 0.0005

(Method 2) 아랫쪽합 이용하기.

▶ 곡선 $y = x^2$에서 구간 [0, 1]을 10등분하기



▶ 10등분한 직사각형 넓이와 실제넓이 비교

함수 $f(x) = x^2$에서 구간 [0, 1]을 10등분하여 그 분점의 좌표를 차례로 $x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3$, $\cdots$, $x_n = 1$이라 하고 $\triangle x = \dfrac{1-0}{10} = 0.1$이라 할 때, 10개의 직사각형 넓이의 합 S_{10}'을 계산하면

$$S_{10}' = \sum_{k=0}^{9} f(x_k) \triangle x$$

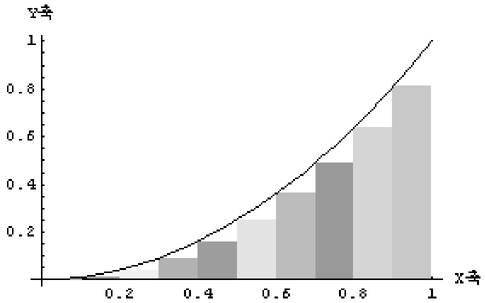
$$= f(0)\,0.1 + f(0.1)\,0.1 + f(0.2)\,0.1 + \ldots + f(0.9)\,0.1 = 0.285$$ 이다.

(여기서 x_k는 구간 $[x_k,\ x_{k+1}]$에서 오른쪽 값을 말한다.)

그리고 실제 넓이는 $\int_0^1 x^2 dx = [\frac{1}{3}x^3] = \frac{1}{3} \fallingdotseq 0.33333$으로 S_{10}'과 실제 넓이와의 오차가 약 -0.04833이다.

이제 주어진 구간을 보다 세분화하면 어떠한 점을 발견할 수 있는지 다음 실험을 통해 알아보자.

▶ 주어진 구간을 세분화할수록 아랫쪽합이 실제넓이와 근접해짐을 확인

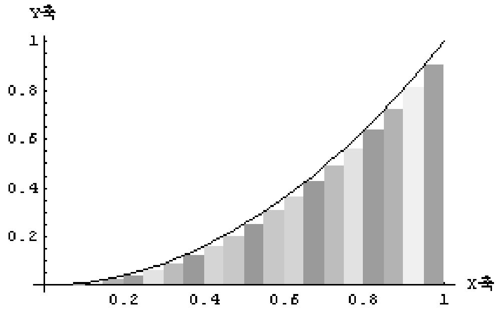


분할 = 10

아랫쪽합 = 0.285

실제넓이 ≒ 0.333333

오차 = −0.04833

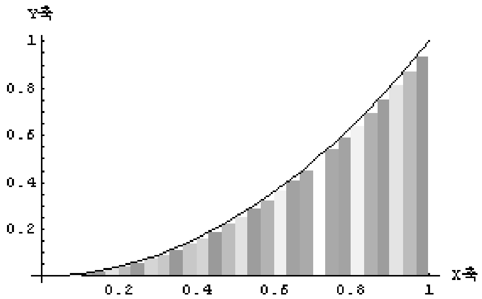


분할 = 20

아랫쪽합 = 0.30875

실제넓이 ≒ 0.333333

오차 = −0.02458

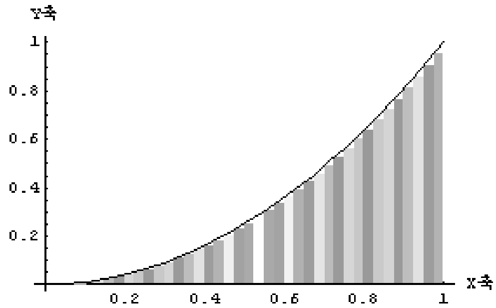


분할 = 30

아랫쪽합 = 0.316852

실제넓이 ≒ 0.333333

오차 = −0.01648

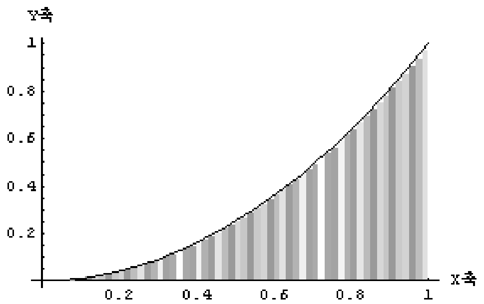


분할 = 40

아랫쪽합 = 0.320938

실제넓이 ≒ 0.333333

오차 = −0.0124

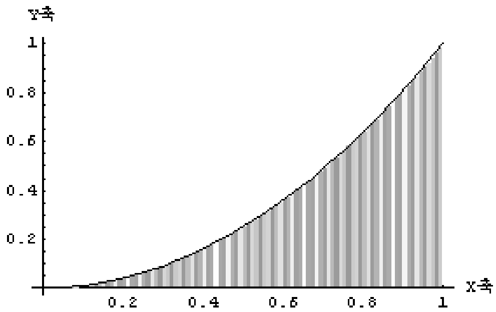


분할 = 60

아랫쪽합 = 0.325046

실제넓이 ≒ 0.333333

오차 = −0.00829

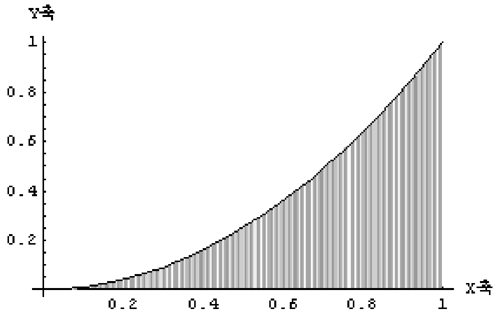


분할 = 100

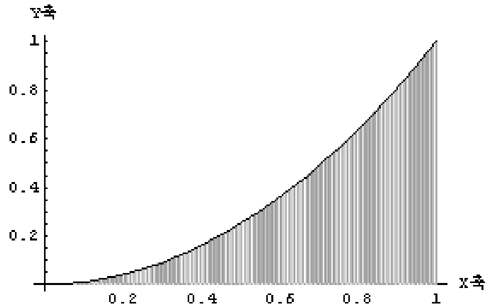
아랫쪽합 = 0.32835

실제넓이 ≒ 0.333333

오차 = −0.00498



분할 = 200
아랫쪽합 = 0.330838
실제넓이 ≒ 0.333333
오차 = -0.0025



분할 = 1000
아랫쪽합 = 0.332833
실제넓이 ≒ 0.333333
오차 = -0.0005

이제 Mathematica 활용을 바탕으로 극한개념을 도입하여 $n \to \infty$일수록 $S_n \to S$ (즉, $\lim_{n \to \infty} S_n = S$)임을 지도하면 이전의 판서와 설명식 위주의 수업보다 학생들의 구분구적법에 대한 이해도는 더욱 높을 것이다.

▶ 윗쪽합 S_n과 아랫쪽합 S_n'의 극한으로 실제넓이 구하기

(Method 1)

$f(x) = x^2,\ \ x_0 = \frac{0}{n},\ \ x_1 = \frac{1}{n},\ \ x_2 = \frac{2}{n},\ \ x_3 = \frac{3}{n},\ \cdots,\ x_n = \frac{n}{n},$

$\triangle x = \frac{1}{n}$에 대하여,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \triangle x = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \cdots + n^2) = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면 $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}$

(Method 2)

$f(x)=x^2$, $x_0=\frac{0}{n}$, $x_1=\frac{1}{n}$, $x_2=\frac{2}{n}$, $x_3=\frac{3}{n}$, $\cdots$, $x_{n-1}=\frac{n-1}{n}$,

$x_n=\frac{n}{n}$, $\triangle x=\frac{1}{n}$에 대하여,

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\triangle x=\frac{1}{n}\left(\frac{0}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+\cdots+(n-1)^2)=\frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면 $S=\lim_{n\to\infty} S_n'=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{3}$

(3) Mathematica를 활용한 구분구적법 수업의 수업 지도안

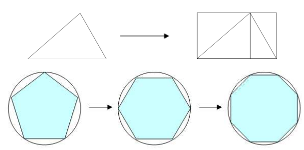
<table>
<tr><td>대단원</td><td>7. 정적분
7 - 1 정적분</td><td>소단원</td><td>1.구분구적법</td><td>쪽수</td><td>135~137</td><td>차시</td><td>9/20</td></tr>
<tr><td>본시
학습
목표</td><td colspan="7">① 정적분의 뜻과 미분・적분의 기본 정리를 복습하고 정적분을 구할 수 있다.
② Mathematica를 활용하여 구분구적법을 이해할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>자료</td><td colspan="7">금성교과서. 컴퓨터. Mathematica 프로그램, 빔프로젝트</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">지도
단계</td><td rowspan="2">학습내용</td><td colspan="2">교수학습활동</td><td rowspan="2">시간
(분)</td></tr>
<tr><td>교사</td><td>학생</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>인사
전시학습
확인

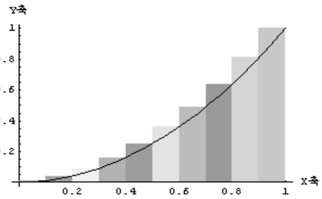
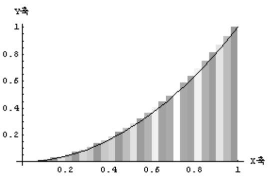
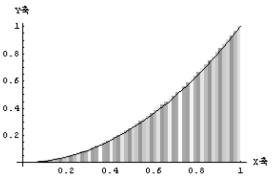
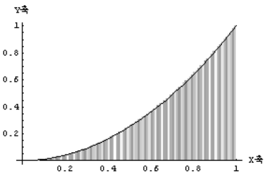
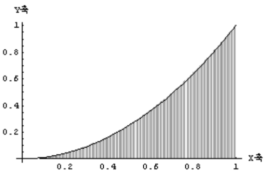
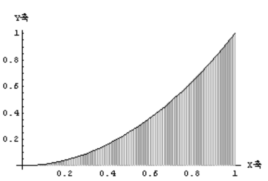
학습목표
제시
Mathematica
소개</td><td>・안녕하세요.
・지난 시간에 배운 부정적분에서 부분적분법에 대해 간략히 설명하고 부분적분법의 문제를 풀어본다.

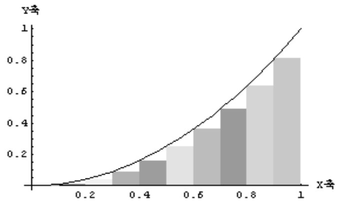
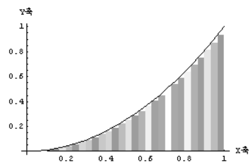
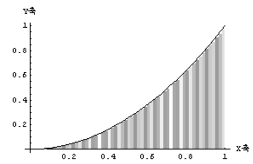
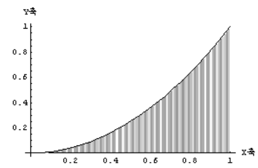
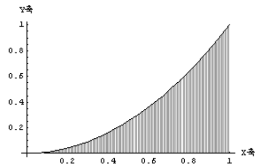
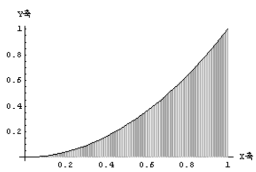
・정적분의 구분구적법

・Mathematica에 대하여 간략히 설명.
▶주요 기능들 예를 들어 설명.
▶위에서 풀이한 부정적분문제를 Mathematica를 이용하여 풀어본다.</td><td>・안녕하세요.

・어렵고 복잡한 과정을 통해 풀었던 문제를 컴퓨터를 통해 간단히 풀고 그 오답을 확인할 수 있게 해 학생들의 흥미를 유발한다.</td><td>5분</td></tr>
<tr><td>전개</td><td>본시학습
내용
개념설명
구분구적법
정의</td><td>・구분구적법의 뜻을 삼각형과 원을 예로 들며 설명한다.

・[예제] 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법에 의해서 구하여라.

・예제 문제를 Mathematica를 이용하여 그래프를 단계적으로 보여주면서 구분구적법을 설명한다.</td><td>・구분구적법의 정의에 대하여 학습한다.</td><td>10분</td></tr>
</table>

지도 단계	학습내용	교수학습활동		시간 (분)
		교사	학생	
전개	본시학습 내용 개념설명 (윗쪽합)	· 방법1) 예제를 윗쪽합 이용해 구하자. ▶ 구간 10등분하기  분할 = 10 윗쪽합 = 0.385 실제넓이 ≒ 0.333333 오차 = 0.051667 ▶ 구간 세분화하기  분할 = 30 윗쪽합 = 0. 350185 실제넓이 ≒ 0.333333 오차 = 0.016852  분할 = 60 윗쪽합 = 0.341713 실제넓이 ≒ 0.333333 오차 = 0.00838  분할 = 100 윗쪽합 = 0.33835 실제넓이 ≒ 0.333333 오차 = 0.005017  분할 = 200 윗쪽합 = 0.335838 실제넓이 ≒ 0.333333 오차 = 0.002505  분할 = 1000 윗쪽합 = 0.333833 실제넓이 ≒ 0.333333 오차 = 0.0005	· 윗쪽합에 대한 그래프를 확인하고 구간을 10등분했을 때의 넓이와 실제 넓이와의 차이를 살핀다. · 윗쪽합에 대한 그래프를 관찰하면서 주어진 구간을 세분화 할수록 실제 넓이와 가까워짐을 깨닫는다.(구간을 세분화하면 결과가 어떻게 되는지 궁금증을 유발한다.)	10분

지도 단계	학습내용	교수학습활동		시간 (분)
		교사	학생	
전개	본시학습 내용 개념설명 (아랫쪽합)	· 방법1) 예제를 아래쪽합 이용해 구하자. ▶ 구간 10등분하기  분할 = 10 아랫쪽합 = 0.285 실제넓이 ≒ 0.333333 오차 = -0.04833	· 아랫쪽합에 대한 그래프를 확인하고 구간을 10등분했을 때의 넓이와 실제넓이와의 차이를 살핀다.	10분
		▶ 구간 세분화하기  분할 = 30 아랫쪽합 = 0.316852 실제넓이 ≒ 0.333333 오차 = -0.01648  분할 = 60 아랫쪽합 = 0.325046 실제넓이 ≒ 0.333333 오차 = -0.00829  분할 = 100 아랫쪽합 = 0.32835 실제넓이 ≒ 0.333333 오차 = -0.00498  분할 = 200 아랫쪽합 = 0.330838 실제넓이 ≒ 0.333333 오차 = -0.0025  분할 = 1000 아랫쪽합 = 0.332833 실제넓이 ≒ 0.333333 오차 = -0.0005	· 아랫쪽합에 대한 그래프를 관찰하면서 주어진 구간을 세분화 할수록 실제넓이와 가까워짐을 깨닫는다. (윗쪽합과 아래쪽합을 이용한 그래프를 각각 보여주면서 윗쪽합을 이용했을 때와의 차이점을 설명한다.)	

<table>
<tr><th rowspan="2">지도
단계</th><th rowspan="2">학습내용</th><th colspan="2">교수학습활동</th><th rowspan="2">시간
(분)</th></tr>
<tr><th>교사</th><th>학생</th></tr>
<tr><td>정리</td><td>· 내용정리

· 형성평가

· 차시예고
· 과제제시</td><td>· 윗쪽합과 아랫쪽합 각각에 대하여 그래프와 함께 판서로 넓이를 구한다..

· 다음 두 문제를 제시하고 학생들의 풀이를 확인한다.

▶[문제1] 곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=1$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법에 의해서 구하여라.

▶[문제2] $\int_1^4 (x^2+2)dx$의 값을 구하여라.

· 다음차시를 예고하며 예습을 과제로 제시한다.</td><td>· 그래프와 교사의 설명을 통해 구분구적법을 이해한다.

· 문제를 각자 풀이하고 학생 중 몇 명이 발표한다.

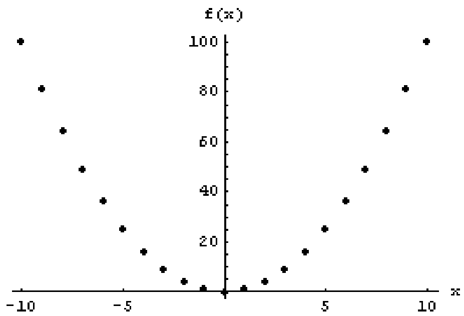
· 학생들의 풀이가 끝난 후 학생들의 이해를 돕기 위해 Mathematica로 그래프와 세부적인 계산들을 보여주며 보충설명한다.</td><td>10분</td></tr>
</table>

2) 이차함수의 그래프

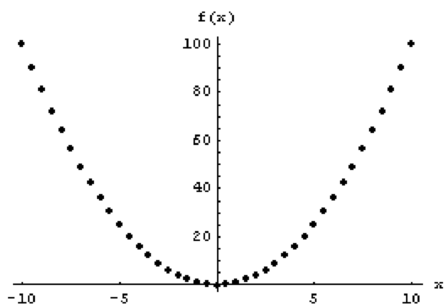
(1) $y=x^2$의 그래프

이차함수 $y=x^2$의 그래프가 모든 이차함수 그래프의 기본이므로 $y=x^2$의 형태를 먼저 살펴보자. 그러기 위해서는 아래와 같이 Mathematica의 Table, List, Graphic 기능을 이용하여 다음과 같이 학생들을 안내할 수 있다.

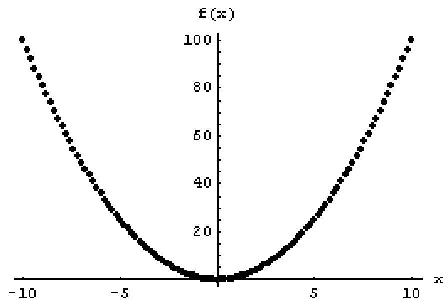
▶ x값이 1씩 증가할 때 $f(x)=x^2$의 그래프



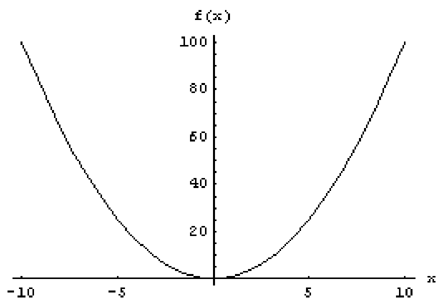
▶ x값이 0.5씩 증가할 때 $f(x)=x^2$의 그래프



▶ x값이 0.2씩 증가할 때 $f(x)=x^2$의 그래프

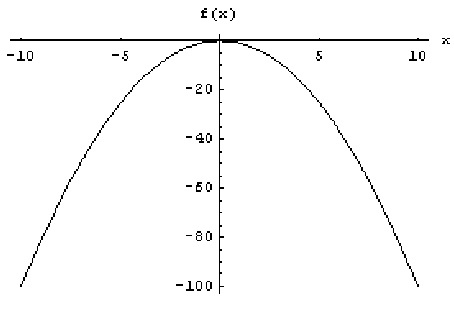


▶ $f(x)=x^2$의 그래프



이상과 비슷한 절차를 이용하여 $y=-x^2$의 그래프도 제시할 수 있다.

▶ $f(x)=-x^2$의 그래프

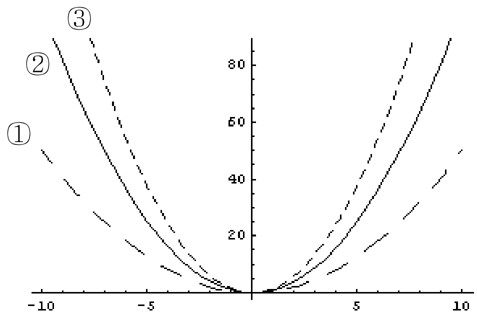


(2) $y=ax^2\ (a\neq 0)$의 그래프

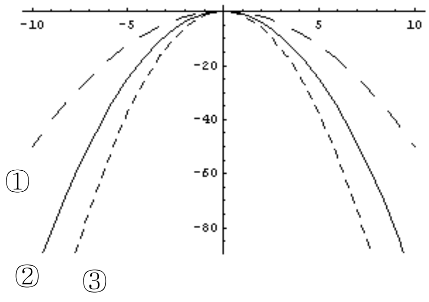
다음은 $y=ax^2\ (a\neq 0)$의 그래프에 대하여 알아보자. Mathematica를 활용하여 학습자들이 a의 값의 변화에 따른 $y=ax^2\ (a\neq 0)$의 그래프 변화를 스스로 알아내도록 안내하자. 또한 왜 그렇게 변화하는지에 대하여도 생각하고 그것을 학급 내에서 발표하도록 안내하자. 학습자들은 a에 여러 수를 대입해 봄으로써 많은 그래프를 그려볼 수 있다 그런 후 a의 값과 그래프를 서로 비교함으로써 학생 스스로 $y=ax^2\ (a\neq 0)$의 그래프에 대한 지식을 구성할 수 있다. 그런 후 상호 의사교환을 통하여 $a>0$일 때는 아래로 볼록한 포물선이 되며, $a<0$일 때는 위로 볼록한 포물선이 되며 a의 절대값이 클수록 폭이 좁아지고 작을수록 그래프의 폭이 넓어지며 $y=ax^2$과 $y=-ax^2$의 그래프는 x축에 대하여 서로 대칭이 된다는 합의에 이를 수 있다.

예를 들어 $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=x^2$, $y=\frac{3}{2}x^2$ 과 $y=-\frac{1}{2}x^2$, $y=-x^2$, $y=-\frac{3}{2}x^2$ 의 그래프를 각각 색을 달리하여 비교해봄으로써 알아볼 수 있다.

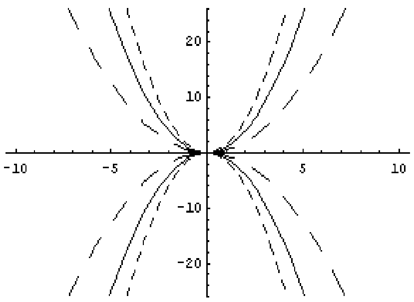
▶① $y=\frac{1}{2}x^2$, ② $y=x^2$, ③ $y=\frac{3}{2}x^2$ 의 그래프



▶ ① $y=-\frac{1}{2}x^2$, ② $y=-x^2$, ③ $y=-\frac{3}{2}x^2$ 의 그래프



▶$y=-\frac{1}{2}x^2$, $y=-x^2$, $y=-\frac{3}{2}x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$, $y=-x^2$, $y=-\frac{3}{2}x^2$ 의 그래프



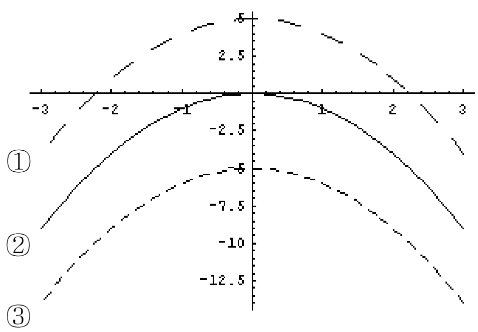
(3) $y=ax^2+q(a\neq 0)$의 그래프

$y=ax^2+q(a\neq 0)$에서 계수 a가 고정되고 q가 변함에 따라서 그래프가 어떻게 변하는지 알아볼 수 있다.

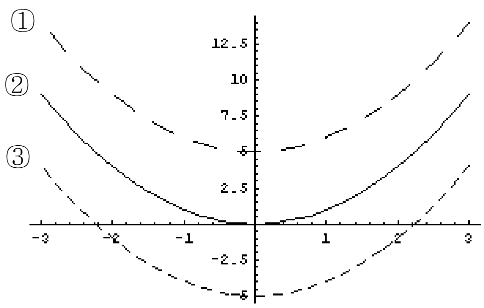
예를 들어 $y=x^2+5$, $y=x^2$, $y=x^2-5$와 $y=-x^2+5$, $y=-x^2$, $y=-x^2-5$의 각각의 그래프를 빨강, 녹색, 파랑으로 색을 달리하여 비교

해봄으로써 계수 q의 변화에 따른 그래프의 변화를 짐작할 수 있다. 즉 $y=x^2+5$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 y축 양의 방향으로 5만큼 평행 이동 하면 되고, $y=x^2-5$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 y축 음의 방향으로 5만큼 평행이동 하면 된다는 합의에 이를 수 있다. 또한 학습자들은 a의 값이 같은 그래프끼리는 포물선의 폭이 서로 같다는 것을 알 수 있다. 이와 같은 과정을 통하여 학습자들은 상수항 q가 첨가되었을 때의 이차함수의 그래프의 변화를 짐작할 수 있다.

▶ ① $y=x^2+5$, ② $y=x^2$, ③ $y=x^2-5$ 의 그래프



▶ ① $y=-x^2+5$, ② $y=-x^2$, ③ $y=-x^2-5$ 의 그래프

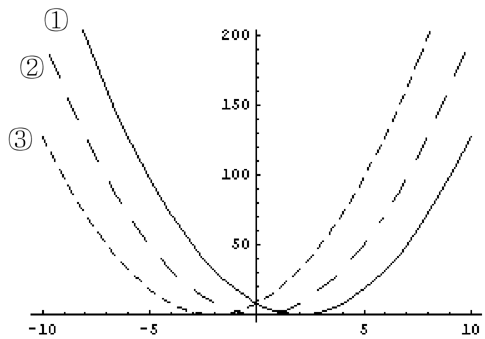


(4) $y=a(x-p)^2$ $(a \neq 0)$의 그래프

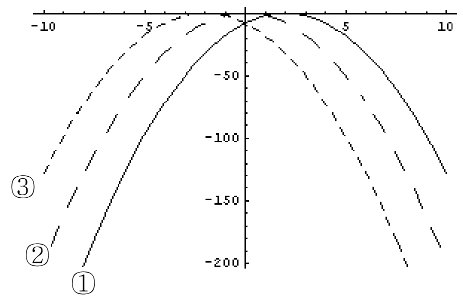
$y=a(x-p)^2$ $(a \neq 0)$에서 계수 a가 고정되고 p가 변함에 따라서 그래프가 어떻게 변하는지 알아볼 수 있다.

예를 들어 $y=2x^2$, $y=2(x-2)^2$, $y=2(x+2)^2$ 와 $y=-2x^2$, $y=-2(x-2)^2$, $y=-2(x+2)^2$ 의 각각의 그래프를 빨강, 녹색, 파랑으로 색을 달리하여 비교해봄으로써 계수 p의 변화에 따른 그래프의 변화를 짐작할 수 있다. 즉 $y=2(x-2)^2$의 그래프는 $y=2x^2$의 그래프를 x축 양의 방향으로 2큼 평행이동 하면 되고, $y=2(x+2)^2$의 그래프는 $y=2x^2$의 그래프를 x축 음의 방향으로 2만큼 평행이동 하면 된다는 합의에 이를 수 있다. 또한 학습자들은 a의 값이 같은 그래프끼리는 포물선의 폭이 서로 같다는 것을 알 수 있다. 이와 같은 과정을 통하여 학습자들은 상수항 p가 첨가되었을 때의 이차함수의 그래프의 변화를 짐작할 수 있다.

▶ ① $y=2(x-2)^2$, ② $y=2x^2$, ③ $y=2(x+2)^2$ 의 그래프



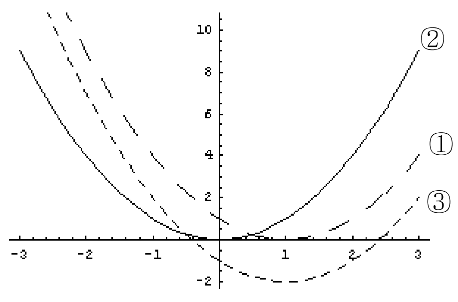
▶ ① $y=-2(x-2)^2$, ② $y=-2x^2$, ③ $y=-2(x+2)^2$ 의 그래프



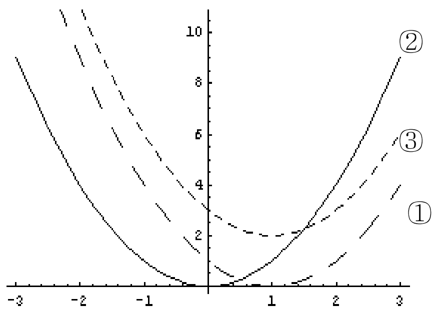
(5) $y=a(x-p)^2+q \quad (a \neq 0)$의 그래프

$y=x^2$의 그래프와 $y=(x-1)^2+2$, $y=(x-1)^2$, $y=(x-1)^2-2$의 그래프를 비교해보자. $y=(x-1)^2+2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축 양의 방향으로 1만큼, y축 양의 방향으로 2만큼 평행 이동한 것임을 알 수 있다. $y=(x-1)^2-2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축 양의 방향으로 1만큼, y축 음의 방향으로 2만큼 평행 이동한 것임을 알 수 있다. 학습자들로 하여금 p, q에 여러 가지 값을 대입하여 그래프를 그려보게 함으로써 위의 사실을 알 수 있도록 안내할 수 있다.

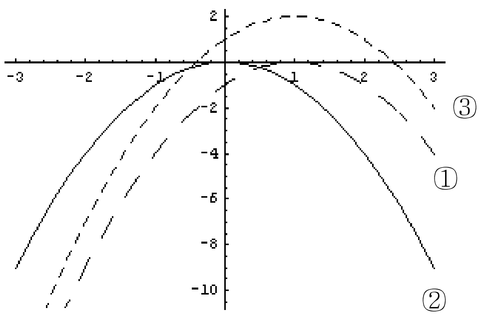
▶ ① $y=(x-1)^2$, ② $y=x^2$, ③ $y=(x-1)^2-2$ 의 그래프



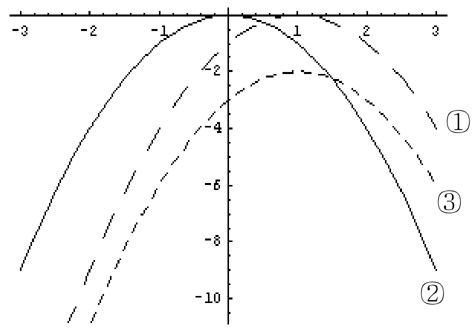
▶ ① $y=(x-1)^2$, ② $y=x^2$, ③ $y=(x-1)^2+2$의 그래프



▶ ① $y=-(x-1)^2$, ② $y=-x^2$, ③ $y=-(x-1)^2+2$의 그래프



▶ ① $y=-(x-1)^2$, ② $y=-x^2$, ③ $y=-(x-1)^2-2$ 의 그래프

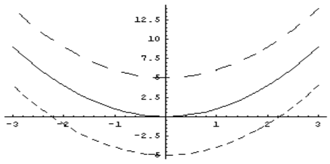
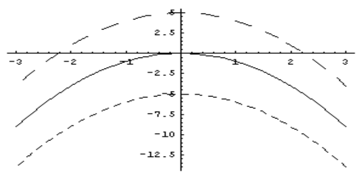


(6) Mathematica를 활용한 이차함수 그래프 수업의 수업 지도안

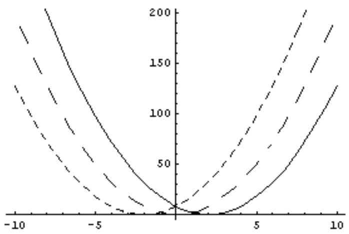
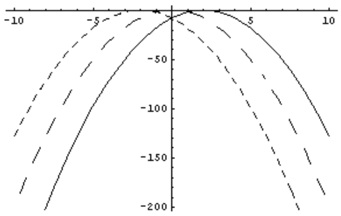
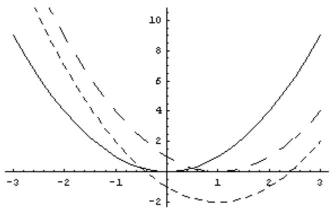
<table>
<tr><td>**대단원**</td><td>**4. 이차함수**</td><td>**소단원**</td><td>**4 - 1 이차함수와 그 그래프**</td><td>**쪽수**</td><td>106~115</td><td>**차시**</td><td>2/6</td></tr>
<tr><td>**본시 학습 목표**</td><td colspan="7">① 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.
② 이차함수 $y=a(x-p)^2$, $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.
③ 이차함수 그래프의 평행이동을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>**자료**</td><td colspan="7">두산교과서. 컴퓨터. Mathematica 프로그램</td></tr>
</table>

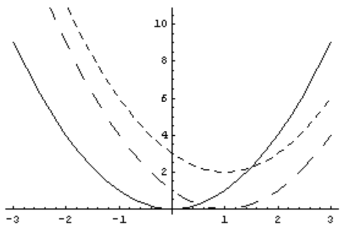
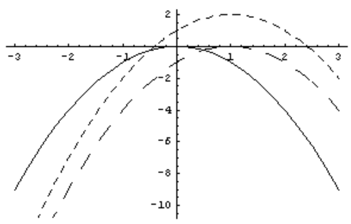
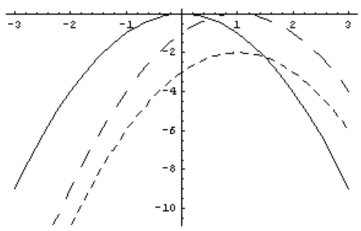
<table>
<tr><th rowspan="2">지도 단계</th><th rowspan="2">학습내용</th><th colspan="2">교수학습활동</th><th rowspan="2">시간 (분)</th></tr>
<tr><th>교사</th><th>학생</th></tr>
<tr><td>도입</td><td>인사
전시학습
확인

학습목표
Mathematica
소개</td><td>· 안녕하세요.
· 지난 시간에 배운 이차함수 대해 간략히 설명하고 이차함수의 예를 몇 가지 적어본다.
· 이차함수의 평행이동
· Mathematica에 대하여 간략히 설명.
▶Plot ,PlotStyle, Dashing, Thickness 에 대해 설명한다.
▶지난 시간에 배운 $y=ax^2$ 그래프를 Mathematica를 이용해 그려본다.</td><td>· 안녕하세요.

· 간단한 명령어 몇 가지로 그래프를 그릴 수 있으므로 학생들이 직접 실습하도록 한다.</td><td>10분</td></tr>
<tr><td>전개</td><td>$y=ax^2+q$
그래프</td><td>· $y=x^2+5$, $y=x^2$, $y=x^2-5$의 그래프를 그려보자.

▶ $y=x^2+5$는 $y=x^2$을 y축 양의 방향으로 5만큼 평행이동하면 되고, $y=x^2-5$는 $y=x^2$을 y축 음의 방향으로 5만큼 평행이동하면 된다는 사실을 유추해내도록 하자.
· $y=-x^2+5$, $y=-x^2$, $y=-x^2-5$의 그래프를 그려보자.

▶ $y=-x^2+5$는 $y=-x^2$을 y축 양의 방향으로 5만큼 평행이동하면 되고, $y=-x^2-5$는 $y=-x^2$을 y축 음의 방향으로 5만큼 평행이동하면 된다는 사실을 유추해내도록 하자.</td><td>· 학생들이 그래프를 그려 보고 $y=x^2+5$와 $y=x^2-5$의 그래프는 $y=x^2$을 얼마만큼 이동해야 그려지는지 질문한다.

· 학생들이 그래프를 그려보고 $y=-x^2+5$와 $y=-x^2-5$의 그래프는 $y=-x^2$을 얼마만큼 이동해야 그려지는지 질문한다.</td><td>7분</td></tr>
</table>

지도 단계	학습내용	교수학습활동		시간 (분)
		교사	학생	
전개	$y=a(x-p)^2$ 그래프	· $y=2x^2$, $y=2(x-2)^2$, $y=2(x+2)^2$ 의 그래프를 그려보자.  ▶ $y=2(x-2)^2$는 $y=2x^2$을 x축 양의 방향으로 2만큼 평행이동하면 되고, $y=2(x+2)^2$는 $y=2x^2$을 x축 음의 방향으로 2만큼 평행이동하면 된다는 사실을 유추해내도록 하자.	· 학생들이 그래프를 그려보고 $y=2(x-2)^2$와 $y=2(x+2)^2$의 그래프는 $y=2x^2$을 얼마만큼 이동해야 그려지는지 질문한다.	10분
		· $y=-2x^2$, $y=-2(x-2)^2$, $y=-2(x+2)^2$의 그래프를 그려보자.  ▶ $y=-2(x-2)^2$는 $y=-2x^2$을 x축 양의 방향으로 2만큼 평행이동하면 되고, $y=-2(x+2)^2$는 $y=-2x^2$을 x축 음의 방향으로 2만큼 평행이동하면 된다는 사실을 유추해내도록 하자.	· 학생들이 그래프를 그려보고 $y=-2(x-2)^2$와 $y=-2(x+2)^2$의 그래프는 $y=-2x^2$을 얼마만큼 이동해야 그려지는지 질문한다.	
	$y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프	· $y=(x-1)^2$, $y=x^2$, $y=(x-1)^2-2$ 의 그래프를 그려보자.  ▶ $y=(x-1)^2-2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축 양의 방향으로 1만큼 y축 음의 방향으로 2만큼 평행이동 한 것임을 유추해내도록 하자.	· 학생들이 그래프를 그려보고 $y=(x-1)^2-2$의 그래프는 $y=x^2$을 얼마만큼 이동해야 그려지는지 질문한다.	

지도 단계	학습내용	교수학습활동		시간 (분)
		교사	학생	
전개	$y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프	· $y=(x-1)^2$, $y=x^2$, $y=(x-1)^2+2$ 의 그래프를 그려보자.  ▶ $y=(x-1)^2+2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축 양의 방향으로 1만큼 y축 양의 방향으로 2만큼 평행이동 한 것임을 유추해내도록 하자.	· 학생들이 그래프를 그려보고 $y=(x-1)^2+2$ 의 그래프는 $y=x^2$을 얼마만큼 이동해야 그려지는지 질문한다.	10분
		· $y=-(x-1)^2$, $y=-x^2$, $y=-(x-1)^2+2$의 그래프를 그려보자.  ▶ $y=-(x-1)^2+2$의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프를 x축 양의 방향으로 1만큼 y축 양의 방향으로 2만큼 평행이동 한 것임을 유추해내도록 하자.	· 학생들이 그래프를 그려보고 $y=-(x-1)^2+2$ 의 그래프는 $y=-x^2$을 얼마만큼 이동해야 그려지는지 질문한다.	
		· $y=-(x-1)^2$, $y=-x^2$, $y=-(x-1)^2-2$의 그래프를 그려보자.  ▶ $y=-(x-1)^2-2$의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프를 x축 양의 방향으로 1만큼 y축 음의 방향으로 2만큼 평행이동 한 것임을 유추해내도록 하자.	· 학생들이 그래프를 그려보고 $y=-(x-1)^2-2$ 의 그래프는 $y=-x^2$을 얼마만큼 이동해야 그려지는지 질문한다.	

지도 단계	학습내용	교수학습활동		시간 (분)
		교사	학생	
정리	· 내용정리 · 형성평가 · 차시예고 · 과제제시	· 이차함수 $y=a(x-p)^2$과 $y=a(x-p)^2+q$ 의의 그래프를 $y=ax^2$의 그래프의 평행이동으로 설명한다. · 다음 두 문제를 제시하고 학생들의 풀이를 확인한다. · [문제1] 이차함수 $y=5(2x-5)^2+7$ 과 $y=x^2$의 관계를 설명하여라. · [문제2]이차함수 $y=-5(x+4)^2-2$ 과 $y=x^2$의 관계를 설명하여라. · 다음차시를 예고하며 예습을 과제로 제시한다.	· 그래프와 교사의 설명을 통해 이차함수의 평행이동을 이해한다. · 문제를 각자 풀이하고 학생 중 몇 명이 발표한다. · 학생들의 풀이가 끝난 후 학생들의 이해를 돕기 위해 Mathematica로 그래프와 세부적인 계산들을 보여주며 보충 설명한다.	10분

Ⅲ. 결론

1980년대 개인용 컴퓨터의 보급과 NCTM(National Council of Teachers of Mathematics)에서 수학교육에서의 컴퓨터 도입을 제시한 이래 컴퓨터를 활용한 수업에 대한 많은 연구가 진행되어왔으며 컴퓨터를 이용한 교육에 대한 많은 시도들이 긍정적인 학습효과를 가져왔다. 하지만 이러한 시도들이 항상 긍정적인 결과를 가져오는 것은 아니었다. 오히려 학습효과가 전통적인 학습방법에서 보다 더 떨어지는 경우도 볼 수 있다.

그 이유로서 다음의 세 가지 원인을 들 수 있다.

1) 소프트웨어의 미숙한 구성
2) 교사의 잘못된 사용
3) 아동이 수학적 개념을 획득하지 못한 상태에서의 컴퓨터 활용

이러한 곤란한 점을 극복하는 방법 중 하나가 컴퓨터를 수학교육에 도입하는데 학생들 스스로 자기에게 맞는 학습방법에 따라서 학습하게 하는 것이다. 그러나 현실적으로 사회가 학교에 요구하는 면이 학생들의 성적만을 올려주기를 원한다면 교사는 수업에서 훈련, 연습만을 되풀이하여야 할 것이다. 수학교육의 목적은 수학적 사고의 육성이다. 그러나 오늘날 학교 수학은 이미 생성된 산물로서의 지식을 전달하는 것에 만족하므로 모든 수학적 대상을 생성 발전하는 유기체로 보지 못하고, 그 속에 내재된 의미를 발견하는 창의적인 학습 지도가 부족하다고 생각된다.

수학적 사고의 지도는 규칙성의 관찰을 통해 직관적으로 발전될 수 있다. 우리의 일상생활 주변에서 일어나는 모든 형상을 피상적으로 볼 것이

아니라 그 속에 내재해 있는 갖가지 형태의 유기적 관계를 보고, 자연현상을 수학적 모델로 바꾸어 어떤 법칙과 원리, 형식을 발견하여 구조화시키고 추상화시키고 통합하여 엄밀한 논리적인 수학 체계를 세우는 것을 목표로 해야 한다. 이러한 사고를 통해 사물의 인과 관계를 파악하게 되고 귀납적 방법으로 문제를 해결하는 태도를 길러야 할 것이다.

본 논문에서는 수학에 관계되는 다양한 분야에 유용하게 적용될 수 있는 Mathematica라는 컴퓨터 소프트웨어를 선택하여 Mathematica의 장점인 그래픽 기능을 이용하여 구분구적법과 이차함수 단원을 선택하여 접근방법에 대하여 고찰해 보았다.

Mathematica를 이용하면 학생들의 흥미를 유발하고 공간적 개념의 성립에 도움이 된다. 하지만 Mathematica는 학생들이 수학의 기본적인 원리와 개념들을 충분히 갖춘 상태에서 수업에 도입해야 할 것이다. 그리고 동기를 유발하고 학습을 심화시키며 창의력을 제공하는 도구로서 컴퓨터의 활용이 극대화된다고 해도 컴퓨터가 수학 전체 프로그램을 다 소화해 낼 것이라 보는 견해는 위험스럽다.

Mathematica는 개념이나 원리의 실연에 이용될 수 있으며 계산 기능 외에 시각적 기능이 뛰어나므로 의미 있는 수학으로 수업을 변화시킬 수 있다. 또 간단한 프로그램을 통해 알고리즘의 습득도 가능해 지며 문제해결의 상황을 실생활에 가깝게 함으로써 수학의 활용에도 기여 할 수 있게 된다.

수학교과에서 컴퓨터를 포함한 공학의 활용은 앞으로 점점 더 그 필요성이 강조되겠지만 어떤 소프트웨어를 어느 시점에서 어떤 관점에서 적절히 사용할 것인가의 문제는 수학의 새로운 교수-학습 방법에 관해 관심이 있는 수학 관계자들의 어렵지만 필연적인 과제라 하겠다.

수학과 컴퓨터는 서로 상호 작용을 하며 발전을 기해야 한다. 단순히

컴퓨터의 조작에만 능숙한 것이 아닌 수학적 개념을 가진 상태에서 컴퓨터를 발전시키고 이를 수학교육에 활용할 수 있어야 한다. 교사는 컴퓨터가 만능이 아니라는 사실을 염두에 두고 컴퓨터를 도입한 수업에서 흔히 나타나는 일시적인 학습자의 반응을 냉철히 분석, 판단해야 하며, 가장 최대의 효과를 얻을 수 있는 내용과 수학 교육방법 적용에 대해 부단한 노력과 연구를 해야 할 것이다.

수학 지도에 있어서 시각적인 교수-학습 방법의 도입은 학생들에게 추가적인 예를 탐구하도록 하고, 독립적인 학습, 수준별 학습, 소그룹 학습 및 프로젝트 학습을 가능하게 할 것이며, 나아가 수학의 다른 영역에서도 수학적 구조를 시각화시키는 다양한 교수-학습 방안이 연구되어야 할 것이다.

결국 가장 중요한 것은 수학을 경험해보고, 사용해보고, 의식하게 되면서 수학의 심상이 구성되고, 이것이 다시 대상화되어 경험되고, 명명하고, 형식적인 표기로 나타내 보는 과정인데 이 과정이 수학 학습의 가장 자연스러운 경로일 것이다. 심상을 다루는 것이 개념을 분명하게 하기 때문이다.

사회는 컴퓨터 및 공학의 영향, 사회 구조의 변화로 현재의 학문, 장차 가르쳐야 할 학문의 내용과 이에 따르는 교수-학습 방법이 시시각각으로 변화하고 있다. 그러므로 교육의 현장에서 컴퓨터와 컴퓨터 관련 공학을 교육과정에 연결한 다양한 접근방식 활용의 구체적인 제기 및 선행연구가 절실한 때이며 이것은 수학뿐만 아니라 다른 교과에서도 이루어져야 할 것이다. 하지만 이제 앞서 교육 관련자들이 교육 개혁의 추진 과정에서 간과하여서는 안될 점이 있다. 이는 컴퓨터가 만능이 아니며 대체교사 또한 아니고 이는 교사와 학습자의 이해를 돕는 교수-학습의 협력 도구로 사용되어야 한다.

또한 ‘교단 선진화’를 위해 수학용 소프트웨어의 보급과 교사의 재교육이 이루어져야 할 것이며 교사는 수학용 소프트웨어를 익숙하게 다루어 지도할 수 있도록 해야 할 것이다. 학습자는 수학적 개념과 원리를 학습한 후 컴퓨터의 활용을 통해 문제해결력을 증진시켜야 할 것이다.

교사가 교수-학습방법의 과정에서 어떻게 역할, 대처하는가에 따라 학습자의 문제해결력 개발에 유의미한 차이가 나타날 것이다. 교사의 역할은 교육에 있어 컴퓨터 활용 성공여부의 결정적인 요소이다. 정보화시대를 이끌어 가는 교육자로서 미래 사회를 주도할 우리들의 학습자들이 의미 있게 활용되어지는 공학을 경험하며 어떻게 학문을 스스로 배워가는 것인지에 관해 배우기를 진정으로 기대한다면 학습자의 생각을 스스로 반영하며, 옳고 그른지 그들의 생각을 판단할 수 있는 능력을 길러 줄 수 있는 지식을 겸비한 교사 양성을 위한 재교육이 요구된다. 그러므로 21세기의 정보화 사회의 끊임없이 변화하는 역동적인 현실에서 새로운 교육패러다임에 의한 교수-학습의 변화가 요구되는 이때, 교사의 의미 있고 효율적인 재교육 뿐 아니라 교사 스스로 현재에 머무르지 않고 보다 좋은 교수-학습 방법을 위해 부단한 노력과 연구를 해야 할 것이다.

참고문헌

[1] 강성주 (2000), 수학과 컴퓨터, 경문사

[2] 교육소프트연구소 (1999), 그래프 마법사 매뉴얼

[3] 구광조, 오병승, 류희찬 (1992), 수학교육 과정과 평가의 새로운 방향, 경문사

[4] 김안현, 김향숙, 류재칠, 신준용, 이강래, 표용수 (2000), 수학에서의 Mathematica 활용, 경문사

[5] 김영익, 이규봉 (1999), 아름다운 수학 Mathematica와 함께, 교우사

[6] 김향숙, 김현구 (2001), 아하! Mathematica, 교우사

[7] 성종기 (2000), 이차함수의 그래프에 대한 오류분석에 관한 연구, 한국교원대학교 석사학위 논문

[8] 신동선, 류희찬 (1998), 수학교육과 컴퓨터, 경문사

[9] 신창언, 한혁 (2003), Mathematica와 수학, 경문사

[10] 우정호 (1998), 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부

[11] 이종영 (1000), 컴퓨터 환경에서의 수학 교수-학습 방법에 관한 교수학적 분석, 서울대학교 박사학위 논문

[12] 장미숙 (1995), 수학교육에 있어서 컴퓨터의 활용방안에 대한 고찰, 건국대학교 교육대학원 석사학위 논문

[13] 황혜정 (2000), 수학교육학신론, 문음사

ABSTRACT

Effective Teaching and Learning via Mathematica

Se Yeon, Lee
Major in Mathematics Education
Graduate School of Education
Sungshin Women's University
Supervised by Dr. Shim Seong-A

In these days, with the development of computers, a lot of efforts have been made to introduce electric calculators and computers into mathematics education. Though the sixth educational curriculum of Korea encourages mathematics teachers to use computers in class, and most teachers are well-aware of the necessity of using them, only a few teachers use them in their classes. The seventh educational curriculum exhorts teachers to promote students' interest and curiosity in mathematics by using computers and not to waste time doing complicated calculations.

The aims of this thesis are to show that Mathematica can be successfully used in computer program which can be applied to mathematics educations, various professional works and finding out

the efficient ways to teach the whole range of subjects of mathematics that most students have difficult in middle and high schools .

The world in which we live is called the age of information. Thus communication and computers are doing the central role in it. When a teacher studies the mathematical problem, in mathematics classes, if a teacher uses tools such as computers, calculators and technology provided to each of all students, then students are actively engaged in reasoning, communicating, problem solving, and making connections with mathematics and even between mathematics and other disciplines.

Form this point of a view we show that, in this paper, new development of these kinds of teaching-learning methods can simulate student's curiosity and interest about mathematics. Therefore these models will allow teachers active teaching and also give students successful learning opportunities to obtain the concepts understand in mathematics.