심성아 교수지도

석사학위청구논문

GSP를 이용한 효율적 증명지도에 관한연구

-중학교 3학년 원의 성질 단원을 중심으로-

2010

성신여자대학교 교육대학원

교육학과 수학교육전공

박 근 애

GSP를 이용한 효율적 증명지도에 관한연구

-중학교 3학년 원의 성질 단원을 중심으로-

심성아 교수지도

이 논문을 석사학위논문으로 제출함

2009년11월

성신여자대학교 교육대학원

교육학과 수학교육전공

박 근 애

인 준 서

박근애의 석사학위 논문으로 인준함.

심사위원 ____________________(인)

심사위원 ____________________(인)

심사위원 ____________________(인)

성신여자대학교 교육대학원

논 문 개 요

본 연구는 교사 중심의 정적인 설명식 증명 수업이었던 지금까지의 교육을 탐구형 소프트웨어를 가지고 직관적으로 도형의 성질을 관찰, 이해하고 도형의 성질을 발견해낸 후 이것을 엄밀한 증명까지 연결해보기 위해 The Geometer's Sketchpad(GSP)를 이용한 학습 자료를 연구하였다.

1. 학생들이 특히 어려워하는 중학교 3학년의 '원'의 지도를 위한 자료를 GSP를 이용하여 개발하였다.

2. 직관적 관찰에만 머무르지 않고 학생 스스로 도형의 성질을 발견할 수 있는 발문을 넣어 관찰을 통해 도형의 성질을 발견하도록 하였다.

3. 직관적 관찰, 도형의 성질의 발견을 가지고 엄밀한 증명을 할 수 있도록 하는 단계를 추가하였다.

본 연구에서 연구한 교육 자료를 가지고 직접 적용해 볼 기회를 가지지 못해 현장 교육에 적용했을 때의 좋은 점과 미비한 점 등은 기술하지 못하였으나, 후속 연구를 통해 실제 교육현장에 적용, 수정 및 보완을 하고자 한다.

목　　차

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학교육은 학생들의 수학적 사고 능력을 개발하는 데에 목적이 있다. 수학적 사고의 근원이 되는 것이 바로 추론이며, 여러 가지 추론 방식 중에서도 연역적 추론을 논리적 사고와 비판적 사고 함양에 크게 기여한다. 학교 수학에서 증명은 이러한 연역적 추론 능력을 개발하고 수학적 이해를 증진시킴으로써 수학적으로 사고하는 힘을 양성하는 데에 많은 도움을 준다(김남희 외5인, 2006).

특히 기하는 이러한 수학적 힘을 양성하는데 많은 기여를 한다. 기하는 평면이나 공간에서 도형에 관한 기본적인 성질의 이해는 자연, 예술, 건축, 그래픽, 공간 탐험, 지도 읽기 등 실생활 상황의 문제를 해결하는데 기초가 되며, 도형의 성질에 대한 증명은 고대 그리스 이래로 연역적 추론의 전형으로 인식되어 왔다. 또한 여러 가지 도형의 개념과 성질은 수학의 다른 여러 분야의 개념과 밀접하게 관련되어 있다.

기하 문제는 해결 방법이 다양하기 때문에 문제해결 능력과 수학적 창의성을 신장시킬 수 있는 좋은 소재이다. 특히 도형에 관한 명제는 그에 대한 일반화나 유추, 조건의 변형 등을 통해 새로운 문제를 만들 수 있는 경험을 제공할 수 있어 학생의 문제 만들기 능력을 신장시킬 수 있는 좋은 소재이기도 하다.

중학교 기하 영역에서는 자연 현상이나 실생활의 상황을 통해 평면과 공간 및 평면도형과 입체도형의 개념을 직관적으로 이해하고, 여러 가지 도형의 성질을 학생의 수준에 따라 직관적으로 혹은 연역적 추론을 통해 이해하고

탐구하며, 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결하는 학습 활동을 한다(교육과학기술부, 2006).

그러나 오늘날의 학교 수업으로서의 기하는 수학적 사고 방법으로서의 의미를 살리지 못하고 있는데 이는 전통적인 증명지도에서는 연역적이고 형식적인 증명을 강조해 왔으며 증명지도의 문제점은 이로부터 비롯되었다고 할 수 있다.

또한 실제 증명 수업에서는 교사가 해당 수업의 주제가 되는 명제의 증명을 학생들에게 설명하면, 학생들은 이 증명을 모방하여 다시 공책에 스스로 재생한다.

이러한 증명의 수업에 의해 학습을 한 학생은 새로운 명제에 대한 증명 방법을 전혀 탐색하지 못하고, 학생들은 증명 방법을 자신의 사고로는 감히 찾아낼 수 없는 것으로 인식하였으며, 증명은 교사가 제시한 증명과정을 암기하는 것이라고 생각했다(류희영, 2006).

고은경의 연구를 보면 도형의 증명에 대한 난이도를 묻는 문항에서 대다수의 학생들이 도형의 증명이 어렵다고 생각하였으며, 도형의 증명이 어려운 원인에 대한 질문에 대해서는 증명을 공부함에 있어 어떤 조건을 적용해야 하는지 모르기 때문에 증명이 어렵다고 응답하였고, 다음으로는 무엇을 증명해야 하는지 정확히 파악이 되지 않는다고 응답한 학생이 많았다. 또한 증명문제를 어떻게 공부하느냐는 질문에 대해서는 대다수의 학생이 기존에 제시된 증명방법을 이해하거나, 어느 정도 이해하고 암기한다고 응답하였다.

피타고라스의 정리, 원 단원을 배운 소감에 대해서는 학생들이 어렵다는 부정적인 반응을 보였고, 그 중 원의 성질이 피타고라스의 정리보다 더욱 어려웠다는 대답이 대다수였다(고은경, 2008).

학생들은 구체적 모델, 그림, 탐구형 기하 소프트웨어와 같은 공학적 도구를 활용하여 기하와 관련된 활동에 능동적으로 참여할 수 있으며, 기존에 학생

들이 느꼈던 기하에 대한 어려움을 해결할 수 있다.

본 연구는 이러한 기하증명수업의 문제점 해결하기 위한 방법으로 탐구형 기하 소프트웨어를 이용하여 학생들이 쉽게 도형의 성질을 이해할 수 있게 한다. 이런 동적기하를 구현하는 소프트웨어의 적절한 활용은 학생들에게 개개인의 특성과 상황에 맞는 교육을 받을 수 있는 기회를 제공할 수 있으며 교사에 의해서 제공되는 단순한 지식전달의 수업 형태와 달리 문제 해결학습을 통한 보다 창의 적이고 활동적이며 역동적인 수업환경을 가질 수 있는 기회를 제공할 수 있다(류희영, 2006).

또한 수학을 탐구하기 위한 도구로써 컴퓨터의 활용은 조작적인 경험과 수학적인 개념 사이를 연결해 주며 추측하고 예상한 내용을 즉각적으로 확인해 줌으로써 직관적인 사고력과 논리적인 추론 능력을 향상시킬 수 있을 뿐만 아니라,수학적인 사실을 발견할 수 있도록 도울 수 있다. 특히 형식적인 증명이나 학습의 전 단계에서 그래픽이나 시뮬레이션을 통한 직관적인 탐구적 활동은 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있으며 학습자 스스로 자기주도적인 학습능력을 키울 수 있다. 따라서 이론적인 수학도 중요하지만 실질적인 수학 즉 통합교과적인 소재의 응용문제의 개발을 위하여 보다 많은 노력을 필요로 한다.

따라서 본 논문은 탐구형 소프트웨어를 이용하여 수학에 관련된 프로그램을 가지고 학생들이 어렵다는 부정적인 반응을 보였던 원의 성질에 대해 학생들이 선생님과 함께 스스로 문제를 찾아 나가고 또 이를 통하여 기본적인 수학적 개념을 자연스럽게 익힐 수 있는 수업의 도구로 GSP를 적용할 수 있는 내용을 연구해 보고자 한다.

2. 연구의 방법

교과서와 교사지침서, 참고서를 이용하여 중학교 교과를 분석하고,「고은경」이 2007년 12월에 울산광역시에서 북구 소재의 H중학교 3학년에서 실시한 설문조사를 바탕으로 도형의 증명에서 특히 어려움을 겪고 있는 원의 성질을 택하여 인터넷과 이미 발표된 다양한 자료를 기본으로 하여, GSP를 활용할 수 있는 내용에 대하여 적용 방법을 연구한다.

3. 연구의 제한점

(1) 제 7차 교육과정의 검인정 교과서 일부의 교재내용을 중심으로 하여 관련된 내용으로 한정한다.
(2) GSP 프로그램을 이용하여 작도할 때 꼭 필요한 부분만 자세한 사용방법을 언급한다.
(3) 아쉬운 점은 효율적인 증명을 위한 학습 자료의 개발이므로 교육현장에서 실질적 활용에 주안점을 두고 수업자료를 제시하였으나, 현장수업에 실제 적용하여 교육적 효과를 분석하고 평가하지는 못하였다.

Ⅱ. 문헌 검토

본 연구를 위해서 증명의 의미와 역할, 증명수업의 실태와 분석, 컴퓨터 환경에서의 수학학습-지도, The Geometer's Sketch Pad(GSP)의 개요를 살펴보겠다.

1. 증명의 의미와 역할

1) 증명의 의미

수학적 증명의 의미는 수학자들 사이에서 여러 가지로 정의된다(정윤미, 2007).

Bell에 의하면 수학적 증명이란, 정당화, 설명, 체제화의 과정을 말하는데, 여기서 정당화란 어떤 명제의 진리성에 관련되는 것으로 그 명제가 참임을 보이는 것을 의미한다. 두 번째로 설명이란 그 명제가 왜 참인지를 알 수 있는 통찰력을 준다는 것을 의미하며, 세 번째로 체계화는 수학적인 특징이 가장 강한 성질로 우리는 증명에 의하여 여러 결과를 공리나 개념, 정리 등등으로 구성되는 어떤 연역적 체계 내에 조직하게 된다는 것이다. Bell은 이후에 증명을 연구의 과정이라는 광범위한 맥락에서 논의하였는데, 이 과정은 문제의 조직, 문제해결, 정당화, 통합, 추상화, 일반화, 증명하기 등을 포함하고 있는 것이다.

Fischbein은 경험적 증명과 비교하여 수학적 증명의 의미를 설명하고 있는데, 경험적 증명은 어떤 명제를 확실히 하는 여러 가지 사실을 만들고 관찰

하는 것으로 구성되기 때문에 그 명제가 성립하는 사실이 많아질수록 그 명제가 타당하다는 확신은 강해질 것이지만, 이에 비해 수학적 증명은 전제나 이미 받아들여지고 있는 다른 여러 가지 명제로부터 논리적으로 추론되는 필연적인 결론이기 때문에, 그 논리적 과정이 정확하다면 그 정리와 증명은 옳은 것이며, 그 정리가 성립하는 경우가 많아진다고 하여 그 정리가 옳다고 말할 수는 없다는 것이 그의 견해이다.

한편 Davis는 증명이 정당화라고 보고 있으며, 증명이 새로운 수학적 발견을 유도할 수 있기 때문에 발견으로 보고 있으며, 형식화를 포함하고 의식화의 목적을 위해 증명을 한다고 보았으며, 증명은 토론의 장이고 오류가 제거되는 곳이라는 견해를 갖고 있다.

위에서 제시된 증명에 대한 의견과는 다른 견해를 갖고 있는 Lakatos는 수학은 끊임없는 숙고와 비판에 의해 증명과 반박의 논리에 의한 추측의 개선을 통해 성장한다고 보기 때문에 어떤 증명이 마지막일 수는 없고 증명을 개선하고 그것을 수용하는 것은 처음부터 형식적인 측면을 적용하는 것이라기보다는 그 의미에 대한 사회적 과정이라고 보고 있다.

증명은 자신의 주장을 스스로 검토하면서부터 시작되며, 이러한 내적 과정은 점점 겉으로 드러나는 타당성에 대한 증명을 제시하면서 자신의 주장을 다른 사람들에게 드러내고 비판하게 하는 것이다. 수학자는 자신의 주장에 대해 내적 검토를 시행해 보는데, 이 때 내적 검토는 궁극적으로 증명의 형태를 취한다. 이처럼 증명은 어떤 명제가 참이라는 것을 보이기 위해 논리적인 과정을 통해 가정으로부터 결론을 유도하는 것이며, 증명은 정당화, 형식화에 기여하며, 어떤 증명은 수학의 발전에 따라 변화할 수 있는 가능성을 지니고 있음을 알 수 있다.

2) 증명의 역할

수학 연구에서 증명은 자신의 주장을 스스로 검토하여 어떤 판단을 확신시키는 것이며, 교실에서의 증명의 목적은 학생의 이해를 자극하는 것을 목적으로 한다.

De Villiers는 수학에 있어서 증명의 역할로 입증(verification), 설명(explanation), 체계화(systematization), 발견(discovery), 의사소통(communication)의 다섯 가지를 들고 있다(조완영, 2000).

증명의 역할로의 '입증(verification)'은 '수학적인 진술의 정확성을 확신 또는 정당화 하는 것'으로 사용하고 있다. 여기서의 정확성은 어떤 상황을 인정하는 추론 규칙에 따라 나타내기 위해 쓰는 언어이기 때문에 논리적 필연성에 따라 지도해야 한다는 것을 강좌기 위해 사용한 말이다. 입증이란 결론에 대해서 가정의 설정이 필요함을 나타내는 것, 다시 말해 '이 가정 하에서는 그러한 결과가 반드시 일어난다는 사실을 보이는 것으로 볼 수 있다.

두 번째 역할로, '설명(explanation)'은 왜 그것이 참인가에 대한 통찰을 얻을 수 있는 설명으로 사용하고 있다. De Villiers는 작도나 실측, 수치의 대입과 같은 경험적인 방법은 심리적으로 아무런 만족할만한 설명을 해줄 수 없다고 주장한다. 따라서 설명이란 이 조건하에서는 그러한 결과가 일어난다는 사실을 분명하게 하는 것으로 볼 수 있다. 명제가 참인 이유로서 명제가 언급하고 있는 대상의 고유한 성질을 이용했다면 자기 스스로 납득한 것이 되고, 이것을 다른 사람에게도 보인다면 그를 설득한 것이 된다. 따라서 설명을 '납득 또는 설득' 이라는 말로 대신해도 무방할 것이다.

세 번째 역할로, '체계화(systematization)'를 '여러 가지 결과를 공리나 정의, 정리로부터 이루어지는 연역적인 체계를 확립하는 것' 이라고 할 수 있는데, 결과가 나타내는 대상을 보다 구체화하여 어떤 조건하에서 일어나는 결과

를 바탕으로 하는 여러 가지 사실을 공리나 정의, 정리로부터 이루어지는 연역적인 체계를 구성하는 것으로 볼 수 있다.

네 번째로, '발견(discovery)'은 '새로운 결과를 발견이나 발명하는 것'으로 진술하고 있다. 그런데 위에서 설명한 입증은 실제로는 조건과 결론과의 관계가 고찰 대상이 되기 때문에, 주어진 조건에 대해 그 조건이 충분한지에 대한 문제가 제기 될 수 있으며, 따라서 어떤 조건은 입증이 이루어진 후에도 문제에 따라 좋은 조건이 될 수 없는 경우가 생긴다. 이러한 상황에서 좀 더 좋은 조건을 찾는 발전된 사고가 일어날 수 있다. 여기에서는 '결론을 이끌어 내는 더 간단한 조건을 발견하는 것'이라 할 수 있고, 결국 이것은 조건과 결론의 새로운 관계를 확립하는 일이라고 할 수 있다. 그러므로 발견은 '조건과 결론과의 새로운 관계를 만드는 것 또는 진술된 명제와 그에 따르는 생각과의 새로운 관계를 만드는 것'이라 할 수 있다.

다섯 번째로, '의사소통(communication)'을 '수학적인 지식을 전달하는 것'으로 보고 의사소통은 수학자들 사이, 교사와 학생의 사이, 학생들 사이에서 일어나는 것으로 보았으며, 이것은 의사의 전달 뿐만 아니라 전달을 전제로 이루어지는 설명이나 논쟁을 받아들이는 기준을 습득하는데 목적이 있다.

2. 증명수업의 실태와 분석

1) 증명학습의 실태 및 증명 수업분석

고은경의 연구에서 학생들은 수학학습이 사고력 향상에 도움이 된다고 하였으나 사고력 향상에 도움이 되는 증명의 필요성에 대해서는 부정적으로 생각하는 학생들이 많았으며, 증명을 공부함에 있어서 어떤 조건을 적용해야

하는지 모르기 때문에 증명이 어렵다고 하였다. 따라서 증명과정의 필연성을 알게 된다면 증명을 이해하는데 많은 도움이 될 것이며, 이로부터 현재 학교에서 이루어지고 있는 연역적 지도에 대한 변화가 필요함을 알 수 있다고 하였다(고은경, 2008).

나귀수는 교사는 증명에 대해 흥미가 없고 증명을 어려워하는 학생들에게 증명을 조금이라도 쉽게 가르치려고 많은 노력을 기울이고 있으나 교사의 노력에도 불구하고 증명의 본질적인 측면이 간과됨으로써, 학생들은 증명을 거의 수행하지 못하고 있다고 하였다. 그는 교사의 증명지도에서 결여된 부분을 논의함으로써 증명 부분에서 보완해야 할 부분을 살펴보고자 하였다(나귀수, 1998).

교사가 학생들의 증명 이해를 수월하게 하고자 고안한 지도방식을 살펴보면,

첫째, 교사는 학생들의 증명 이해를 돕기 위하여 다양한 맥락에서 배경화 작업을 시도한다. 증명을 시작하기 전에 증명해야 할 명제의 의미를 그림으로 나타내고, 증명을 설명하는 과정에서도 끊임없이 배경화 작업을 시도하며, 증명 결과를 반성함으로써 정리의 의미를 보다 자세하게 이해시키고자 한다.

둘째, 교사는 용어를 설명함에 있어서 가능한 한 일상적인 단어를 이용하여 간단하고 쉽게 설명한다. 교과서에서는 어떤 개념에 대해 가능한 한 학문적인 용어를 사용하여 언어적으로 완벽하게 설명을 시도하지만, 교사는 개념 설명에 있어서 교과서의 설명을 그대로 따르지 않고 일상적인 용어를 사용하여 보다 쉽게 설명한다.

셋째, 교사는 학생들의 증명 수행을 돕기 위하여 증명 과정을 절차화 하며, 수학적으로 적절하다고 할 수 없는 나름대로의 지도 방안을 고안한다.

한편 교사의 증명 지도에서 보완해야 할 부분을 살펴보면,

첫째, 교사의 증명 논의 방식은 교과서의 증명 서술방식인 종합적 양식만

을 따른다는 점이다. 그러나 증명의 종합적 기술은 학생들이 학습해야 할 진정한 '증명 활동'이 아니라 '증명의 기록'에 불과한 것이므로, 활동적인 연역적 추론으로서의 증명은 분석적 사고방식과 종합적 사고방식이 역동적으로 통합된 사고 과정이 되어야 한다.

둘째, 교사는 증명 과정이 아닌 증명의 결과물이라 할 수 있는 정리를 더욱 강조하는 방식으로 수업을 조직하는데, 이것은 암묵적으로 증명의 과정 자체를 소홀히 함으로써 어떤 지식이 왜 성립하는가는 고려하지 않은 채 단지 결과적 지식을 피상적으로 이해하는 도구적 이해 수준에 학생들을 고착시킬 위험이 있다.

학생들이 증명 학습에서 겪는 어려움으로는,

첫째, 새로운 명제에 대한 증명 방법을 전혀 탐색하지 못한다는 것이다. 학생들은 증명 방법을 학습자 자신의 사고로는 감히 찾아낼 수 없는 것으로 인식하였으며, 자신이 증명단원에서 할 수 있는 것은 교사가 설명해 주거나 교과서에 제시되어 있는 증명을 외우는 것뿐이라고 생각하였다.

둘째, 학생들은 'A이면 B이다.' 형태의 명제를 해석하는 데에 어려움을 겪는다. 학생들은 'A이면 B이다.' 형태의 명제에서 가정과 결론의 정확한 의미를 알지 못함으로써, 결론을 증명 과정에서 임으로 이용하거나 또는 'A이면 B이다.' 형태의 문장 전체를 증명 과정에서 재진술 하는 인지적 장애를 나타낸다.

셋째, 정당화 수단으로서의 증명은 학생들에게 한계를 갖기도 한다. 학생들은 이전의 수학교육과정에서 배워서 이미 알고 있는 여러 사실이 참임을 밝히기 위해 증명해야 한다는 사실에 의아해하였다.

넷째, 학생들은 증명을 할 때 반드시 기호를 사용해야 한다는 데에 많은 어려움을 겪는다. 학생들은 기호를 수단으로 하여 사고 활동을 전개하면서 증명을 수행해야 하는 바, 이러한 이차원적 사고는 학생들에게 있어서 그렇지

않아도 어려운 증명을 더욱 어렵게 하는 요인으로 작용한다.

다섯째, 학생들이 증명을 충분히 탐색할 만한 시간이 수업시간에 할애되지 않는다. 대부분의 학생들은 수업시간에 스스로 증명해 볼 시간이 너무 적음을 토로한다.

2) 증명 지도의 개선 방향

증명지도의 개선 방향을 다음과 같이 살펴 볼 수 있다(나귀수, 1998).

첫째, 분석적 방식과 종합적 방식이 통합된 역동적인 수학적 사고 활동으로서 증명을 지도할 필요가 있다. 증명의 종합적 측면만으로는 학생들에게 왜 증명이 그러한 모습으로 나타나게 되는가를 적절히 보여주지 못하며, 결국 수학적 사고활동으로서의 증명이 아닌 증명의 기록에 불과한 수학을 학생에게 강제로 부과하는 결과를 초래한다. 형식적인 수학이 아니라 진정한 수학적 사고 과정으로서의 증명을 지도하기 위해서는, 증명지도에서 결론이 성립하기 위해서 성립되어야할 전제조건을 탐색하는 분석적 방식과 그러한 전제 조건을 가정에서부터 이끌어내는 종합적 사고방식의 역동적 통합으로서 증명을 지도해야 한다는 것이다.

둘째, 학생들에게 재발견(추측)의 경험을 제공함으로써, 즉 증명해야 할 명제를 '만들어가는 활동'에 참여시킴으로써 증명의 필요성을 보다 자연스럽게 인식시킬 필요가 있다. 현재의 증명 교육은 증명해야할 명제의 가정과 결론을 완전한 형태로 제시함으로써 학생들에게 정당화의 맥락만을 제시하고 있다. 그 결과 학생들은 증명에 대한 아무런 문제의식이나 동기를 갖지 못한 채, 증명해야 할 명제를 수동적으로 부과 받고 있으며, 완전한 형태로 제시되는 명제에서 가정과 결론이 증명에서 갖는 의미를 제대로 이해하지 못함으로써, 증명 과정에서 결론을 이용하거나 명제 전체를 증명과정에서 재진술하는 오

류를 범하게 된다. 그러므로 학생에게 가정만을 제시하여 가정으로부터 성립될 수 있는 여러 가지 결론을 스스로 추측하게 하는 재발견의 맥락과, 학생 자신의 추측이 옳은지 틀린지를 조사하는 정당화의 맥락을 통합하여 지도함으로써 보다 의미 충실한 증명 교육을 자신의 추측이 어떻게 성립될 수 있는가를 조사하는 과정에서 증명의 필요성을 자연스럽게 인식하도록 하는데, 그리고 가정과 결론이 증명에서 갖는 의미를 보다 풍부하게 이해시키는 대에 일조할 것으로 생각된다.

셋째, 증명 교육에 있어서 Freudenthal의 수학화 지도론을 반영할 필요가 있다. 학생들에게 '실행 수학'을 활동시키지 못하고 '기성 수학'을 단지 외부적으로 부과함으로써, 형식적이고 빈약한 교육을 고착시킬 위험이 있다. 따라서 수학화의 도구로서 연역을 재발명하는 학습이 이루어지도록 학생들을 격려해야 하는바, '정의'가 아닌 '정의하기'와 '증명'이 아닌 '증명하기'를 학생들이 경험할 수 있도록 지도해야 할 것이다. 한편 학생들이 이미 참임을 알고 있어, 정당화의 수단으로서 증명이 한계를 갖는 명제들이 존재하므로, 국소적 조직화 활동을 통해 조직화 수단으로서의 증명을 지도함으로써 증명의 다면적 측면을 경험하게 하는 것이 바람직할 것으로 생각된다.

넷째, 증명에 대한 사회적 관점을 완화시켜 증명 교육에 적용할 필요가 있다. 사회적 인식론에서 증명은 자신의 주장을 다른 사람에게 설명함으로써 다른 사람을 확신시키는 과정이며, 어떤 논쟁이 진정한 수학적 증명으로 인정되는 것은 오로지 수학자들 간의 상호작용인 사회적 합의를 통해서 가능한 것으로 파악 되었다. 따라서 증명에 대한 사회적 관점을 완화시켜 증명 교육에 적용한다는 것은, 학생들로 하여금 확신의 수단으로서의 증명을 경험하도록 하고 타당한 증명에 대한 최종 판단은 교사의 권한에 맡기는 것을 의미한다. 확신의 수단으로서의 증명을 경험할 수 있는 학습 상황으로 소그룹 협력 학습을 제안하며, 소그룹 협력 학습에서 자신이 탐색한 증명 방식을 다른 학

생들에게 설명하고 다른 학생들로 하여금 그 증명이 맞는지 틀리는지를 세심하게 따져 보도록 함으로써 사회적 상호작용을 통해 보다 의미 있는 증명의 구성을 도모할 수 있을 것으로 생각된다.

다섯째, 증명을 본격적으로 지도하기에 앞서 학생들로 하여금 패턴과 관련성을 파악하는 다양한 경험을 제시할 필요가 있다. 증명을 의미 있게 내면화하기 위해서는 증명을 본격적으로 지도하기에 앞서 구체적 활동이 풍부하게 제공되어야 하므로, 초등학교에서부터 도형의 정의나 도형의 성질을 지도할 때, 가능한 한 학생들로 하여금 도형의 성질을 발견하고 관련성을 파악할 수 있도록 지도하는 것이 바람직할 것으로 생각된다.

3. 컴퓨터 환경에서의 수학학습-지도

1) 수학교육의 방법론의 측면의 컴퓨터

Freudenthal은 ‘수학적 이해를 유발하고 증진시키기 위해 계산기와 컴퓨터를 어떻게 이용할 것인가?’ 라는 문제를 수학교육의 주요 문제 중의 하나로 설정 하였으며, 수학적 이해를 유발하고 증진시키기 위한 도구로서 컴퓨터를 이용할 것을 주장 하였다.

나귀수는 컴퓨터가 수학교육의 방법론에 기여할 수 있는 측면을 수학적 대상과 관계의 구체화, 학생들의 실제 경험과 수학의 연결, 수학의 다양한 표현체계의 연결, 사고력 중심의 수학교육 추구의 네 가지의 관점으로 분류하였다(나귀수, 2002).

① 수학적 대상과 관계의 구체화

수학은 실제로 존재하는 물리적 대상을 다루는 학문이 아니라 추상적인 학문이라는 점을 특징으로 하고 있다. 이러한 수학적 추상성은 수학의 교수·학습을 어렵게 하는 요인으로 작용한다. 물리적 세계를 바탕으로 하는 학생의 사고와 추상화된 수학적 내용의 만남은 교사가 감지하지 못하는 어려운 상황을 만들어 낼 수 있으며, 결국 학생들이 학습 내용을 수동적으로 받아들이고 암기할 수밖에 없는 상황을 만들어 낼 가능성이 크다. 다시 말해서, 수학은 추상화와 형식화된 대상을 조작함으로써 패턴을 탐구하는 학문이기 때문에 다른 어떤 과목보다도 교과의 대상이 학생의 인지 수준과 맞지 않을 가능성이 많다. 결국 학생 자신의 눈으로 사물을 바라보는 노력과 함께 주변에서 이를 뒷받침해주는 조력이 절대적으로 필요하게 된다. 여기서 컴퓨터가 중요한 기능을 할 수 있다(우정호, 1998).

컴퓨터는 추상적이고 형식적인 수학적 대상을 구체적인 형태로 표현하여 제시할 수 있을 뿐만 아니라 그 대상의 조작이 학생들의 통제 내에서 일어날 수 있다는 점에서 수학교육에서 부딪히는 중요한 장애인 추상화의 문제를 해결하는 주요한 도구로 활용될 수 있다. 또한, 적절한 소프트웨어를 사용하여 구체적인 조작 활동을 수학적 언어로 나타내게 함으로써 자신의 수학적·인지적 활동을 반성할 수 있을 뿐 아니라 학습 구성원들 사이의 수학적 의사소통을 강화할 수 있다.

Teodoro는 구체적-추상적 대상(concrete-abstract object)이라고 부를 수 있는 오직 컴퓨터에서만 구현할 수 있는 새로운 대상이 컴퓨터의 탐구학습 환경의 가장 큰 특징 중의 하나라고 주장하였고, 여기에서 구체적-추상적 대상은 컴퓨터 화면에서 실제로 존재하는 것처럼 볼 수 있고 다룰 수 있다는 것을 의미해서 구체적이며 수학적 구성물이라는 의미에서 추상적이라고 할 수 있다(Toredoro, 1991 재인용).

수학적 대상과 관계를 구체화하여 직접적인 조작을 활성화시킬 수 있는 컴

퓨터 기반 학습 환경의 특징은 특히 기하 교수·학습 방법에 많은 영향을 미친다. Cabri-Geometry와 Geometer's Sketchpad(GSP)와 같은 탐구 학습형 기하 소프트웨어에서 제공하는 환경을 기하 그림을 직접적으로 다룰 수 있는 새로운 접근방법을 채택하고 있다. 기하의 개념화는 컴퓨터화면에 나타나는 그림의 요소들을 마우스로 끌었을(drag) 때 그림에서 변하지 않는 성질에 대한 연구가 되며, 기하적 성질에 대한 명제는 새로운 실험의 영역에서 관찰 가능한 기하적 현상을 기술한 것이 된다(Balacheff, 1996 재인용).

수학이라는 교과의 성격을 보면, 컴퓨터만큼 수학 학습의 과정을 풍요롭게 할 수 있는 교육매체도 드물다 컴퓨터가 가지는 다양한 기능은 추상적인 수학 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐 아니라 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜준다. 특히 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계에서 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션을 통한 학생들의 자기 주도적인 직관적 탐구적 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다.

한편, 수학은 교과의 특성상 일반화를 추구하며, 학생들이 접하는 대부분의 수학 지식은 일반화된 지식이다. 그러나 학생들은 결과로서 제시되는 일반화된 수학 지식을 어려워하며, 결국 의미 있게 이해하지 못하고 피상적으로 암기하는 경향이 강하다. 증명 교육의 주요 대상인 일반화된 수학 지식을 어려워하는 학생들에게 지필환경에서는 한계가 있는 여러 가지 예를 컴퓨터를 활용하여 제시하고 그러한 예로부터 규칙성을 발견하게 함으로써 학생들에게 일반화 활동을 제공할 수 있으며, 일반화 활동을 의미 있게 도울 수 있다는 것이다.

컴퓨터를 활용한 귀납적 발견 활동에 있어서 유의해야 할 것은, 교수·학습 활동이 귀납적 발견 활동 자체에서만 끝나는 것은 곤란하다. 즉 궁극적으로 추구하는 것이 형식적인 일반화라면, 형식적인 일반화 활동으로 이끌지

않고 귀납적 발견활동에만 머무르는 것이 많은 학생들의 사고 수준을 귀납적이고 구체적인 것에 고착시킬 위험이 있으며, 학생들은 일반화된 수학 명제를 형식적으로 증명하라는 문제에 대하여 그저 예를 제시하는 귀납적 증명으로 충분하다는 오류를 범할 수도 있다.

② 학생들의 실제 경험과 수학의 연결

컴퓨터는 학생들의 일상적이고 물리적인 경험에 바탕을 둔 실제 자료와 시뮬레이션을 혼합하여 제시하는 바, 컴퓨터는 다양한 모델과 시뮬레이션을 통해 학생들의 광범위한 경험과 형식적인 수학을 연결한다. 이는 학생의 개인적 경험과 수학적 경험을 연결하는 새로운 수준의 친밀함을 형성함으로써 학생들이 일상적인 경험과 형식적인 수학의 세계를 의미 있게 연결하는데 도움을 준다. 또한 컴퓨터는 보다 이상적이고 개략적이고 추상적인 시뮬레이션을 제공하는바, 학생들은 하나 이상의 세계를 통제하는 동일한 모델을 직접적으로 경험할 수 있으며, 중간적인 추상성을 가진 모델들을 컴퓨터를 통해 경험할 수 있다(Balacheff, 1996 재인용).

컴퓨터 기반 학습 환경에서 유용하도록 만들어진 과제들은 직접적인 계산으로부터 학생들을 자유롭게 함으로써 방법의 선택, 방법의 조합, 분석 지향적인 능력으로의 이행을 촉진한다. 다양한 통계 소프트웨어는 이러한 활동을 통해 학생들이 구체적인 상황과 실제 자료의 모델링에 접근할 수 있는 길을 열어줌으로써 수학과 실제 생활을 연결 할 수 있게 도와준다.

컴퓨터의 이러한 특징은 학교수학에서 다룰 수 있는 문제의 영역을 확대하는데 기여할 수 있다. 지금까지 학교수학에서는 해결과정의 복잡함을 피하고 학생들에게 계산의 어려움을 가중시키지 않기 위해서 해결과정이 간단하거나 그 답이 비교적 간단한 수치로 나오는 문제를 주로 다루었다. 이는 결국 학생들의 현실(reality)과는 관련 없는 빈약하고 인위적인 문제만을 다루게 되

는 결과를 가져옴으로써, 학생들이 수학이라는 과목을 자신들의 현실과는 유리된 것으로 잘못 파악하는데 영향을 미쳤다. 이러한 왜곡된 상황은, 문제해결에서 문제의 의도와 모순되지 않는 경우에 한해서 컴퓨터를 이용할 수 있도록 함으로써 어느 정도 극복할 수 있다. 문제해결에서 가장 중요한 아이디어는 학생의 사고로 탐색하게 하되, 그 이외의 문제해결의 수단이 되는 복잡한 과정은 컴퓨터의 다양한 기능을 이용하게 하는 것이다. 이는 결국 수학교육의 본질적인 목적인 학생들이 주위의 여러 가지 현상을 수학적 안목으로 파악하도록 하는데 일조할 수 있을 것이다.

③ 수학의 다양한 표현 체계의 연결

다양한 표현 체계의 연결은 수학 교수·학습에서 두 가지 의미를 갖는바, 복잡한 수학 아이디어의 다양한 측면을 드러내는 것과, 어떤 표현 체계에서의 행동의 결과를 다른 표현 체계를 통해서 보여줌으로써 그 행동의 의미를 반성하도록 하는 것이다. 단 하나의 표현 체계로는 복잡한 수학 아이디어의 모든 측면을 적절하게 표현할 수 없는바, 복잡한 아이디어의 의미 충실한 표현을 위해 다양한 체계가 요구된다. 또한 연결된 다양한 표현들이 역동적이고 상호작용적인 매개체로 적용될 수 있다는 점에서 수학교수·학습방법의 개선에서 중요한 역할을 한다. 컴퓨터 기반 학습 환경은 수학의 다양한 표현을 같은 화면에 제공하는바, 이는 학생들로 하여금 다양한 표현을 서로 연결 짓게 함으로써 그 표현에 내제되어 있는 의미를 보다 충실하게 이해할 수 있도록 한다.

④ 사고력 중심의 수학교육 추구

컴퓨터는 사고력을 도모하기 위한 환경을 조성하는데 한계가 있는 지필 환경을 어느 정도 보완할 수 있다. 컴퓨터는 사고력 향상을 목적으로 하는 교

수·학습 활동에 산술적인 계산과 대수적인 문자식의 처리를 신속하게 수행해 줌으로써 본질적인 사고력 중심의 교수·학습 활동에 전념할 수 있게 해준다.

컴퓨터 프로그래밍 활동은 학생이 가지고 있는 수학 지식을 절차적 지식 형태로 변환하는 과정으로서, 학생 자신의 수학적 사고를 구체적으로 적용하여 어떤 결과를 산출하는 의미 있는 활동이다. 또한 컴퓨터 프로그래밍에서의 오류 수정 활동은 수학적 사고력 향상을 위한 기회로 활용될 수 있다. 오류는 예상하지 못한 곳에서 일어나고 그 오류를 제거하기 위해 반드시 프로그램에 수정을 가해야 하는바, 이는 학생 자신의 수학적 사고와 그것을 절차적 형태의 프로그램으로 변환하는 과정을 다시 한 번 반성하는 기회를 제공한다. 이는 자신의 사고와 행동을 다시 한 번 반성해 봄으로써 더 높은 수준으로의 발달을 모색하는 반영적 추상화 활동에 기여한다고 할 수 있다(신동선·류희찬, 1998 재인용).

2) 수학학습에서 컴퓨터 활용 시 유의점

수학교육에서 공학적 도구의 사용은 수학적 이해를 유발하고 증진시키기고 수학학습에 있어 많은 도움을 준다는 것을 위의 내용을 통해 알 수 있었다. 그러나 수학교육에서 공학적 도구를 활용할 때 유의해야 할 점이 존재하며 그것은 다음과 같다.

첫째, 교육공학적 도구를 수학 교수-학습에 도입함에 있어서 그 목적을 명확하게 할 필요가 있다. 수학교육의 방법을 개선하기 위해 교육공학적 도구를 도입한다면, 교육공학적 도구 활용 방안이 가르치고자 하는 내용, 즉 수학 지식의 성격을 변형하거나 왜곡할 위험성은 없는가에 대해 끊임없이 감독하고 통제해야 한다.

둘째, 수학 교수-학습의 어느 단계에서 어떤 교육공학적 도구를 어떻게 사용할 것인가의 문제가 중요하게 부각된다. 이때에 교사는 교육공학적 도구를 수학 교수-학습의 어느 단계에서 어떤 방식으로 활용할 것인가의 문제를 가장 구체적으로 고민하고 판단해야 할 책임이 주어지기 때문에 교사의 역할이 중요하게 부각된다. 이러한 관점에서 공학적 도구가 교사를 대체할 수 있을 것이라는 주장은 공학적 도구에 대한 지나친 낙관론이라고 할 수 있다.

셋째, 교육공학적 도구의 교육적 한계를 분명하게 인식해야 한다. 그 적용이 타당하지 않는 영역까지 교육공학적 도구를 무리하게 활용하려는 시도는 교육학적으로 바람직하지 못하다.

넷째, 교육공학적 도구를 더욱 적극적으로 활용할 수 있는 제도적이고 현실적인 여건이 시급히 마련되어야 한다. 교육공학적 도구로 인하여 수학교육은 새로운 단계로 진입하고 있지만, 국내의 현실은 수학 전용 실험실의 부재, 과다한 학급 당 인원수, 국산 소프트웨어의 부재 등 매우 열악한 상황인 바, 이러한 상황은 시급히 개선되어야 한다.

다섯째, 교육공학적 도구를 적극적으로 활용하기 위한 환경은 활성화 되었지만 교사들의 준비는 아직 미흡하다고 할 수 있다. 교육공학적 도구를 효과적으로 사용하기 위해서는 교사들의 의식을 변화시킬 수 있는 교사들의 재교육이 이루어져야 할 것이다(정복희, 2008 재인용).

3) 기하교육에서 컴퓨터의 활용

① 기하 학습에서의 컴퓨터 활용의 필요성

컴퓨터만큼 수학 학습, 특히 기하 학습의 과정을 풍요롭게 할 수 있는 교육매체도 드물다.

기하학적 개념은 대부분 영상으로 표현될 수 있는데, 대부분의 학생들은

기본적인 개념에 대하여 각각 원형적인 예를 영상으로 간직하고 있다. 즉 '표준화된 위치에 있는 표준화된 형태의 도형'을 말한다. 예를 들면, 삼각형의 높이는 삼각형의 내부에 그려져야 하는 것, 다각형의 한 변은 교과서의 하단과 평행해야 한다는 것 등이다. 이것은 교재에서 그림을 나타낼 때 최선의 형태의 것을 선택하여 학생들에게 제공하기 때문인데 이것이 오히려 학생들에게 정형화된 형태의 그림으로 받아들여 특정한 원형적 영상에 사고를 한계지우게 만든다. 예를 들면, 사각형을 정사각형이나 직사각형으로 생각하는 오류를 범한다거나, 도형의 방향에 영향을 받는 것, 또 삼각형 중 둔각삼각형에 대해서는 생각하지 않는 경향 등이다.

한편, 기하의 증명에 있어서 개념이나 정리에 수반된 그림이 고정된 것으로 받아들여진다면 새로운 상황으로 정리를 적용해야 할 때 문제해결에 장애가 되기도 한다. 한 개념이나 정리에서 성립하는 성질을 추상화하는 과정에서, 수반된 그림이 주어진 조건을 만족하는 여러 가지 예들 중에 하나로서 그 위치나 형태가 얼마든지 변할 수 있다는 생각을 갖는 것은 중요하다.

이 처럼 부적절하고 편향된 시각적 표현 자체가 문제해결을 방해하는 부정적 역할을 하는 것을 컴퓨터를 이용한 활동을 함으로써 상당 부분 해소할 수 있다. 컴퓨터의 중요한 역할 중 하나가 시각적 표현과 그 해석에 있어서의 개인차를 거의 제거할 수 있다는 것인데, 컴퓨터가 임의의 영상들을 전시하는 데에 그치지 않고 사용자가 조작하여 능동적으로 활동할 수 있는 환경을 제공한다면, 학생들은 컴퓨터를 통해 다양한 예들을 작도하거나 관찰하면서 변하지 않는 속성들을 발견하여 도형의 성질을 추출해 낼 수도 있다.

즉, 컴퓨터는 한 가지 개념이나 정리를 나타내는 다양한 그림을 제시할 때, 그림의 변화에도 불구하고 변하지 않는 필수적인 측면과 그림에 따라 가변적으로 변하는 우연적인 측면을 분리해 냄으로써, 특정한 원형적인 형상에 근거하여 잘못된 판단을 하는 오류를 제거할 수 있다. 또 정리 내용에 친숙해

짐으로써 새로운 상황에 정리를 적절하게 적용하는 데에도 도움이 된다(류희영, 2006).

② 기하교육에서 컴퓨터의 활용

기하교육의 목적은 실세계에 대한 직관력을 길러주며, 논리적 사고를 향상시키는데 있다. 이러한 이유로 학교 수학에서 기하학이 차지하는 위치가 중요함에도 불구하고 기하 수업은 교사의 지시와 설명의 수업형태에 의존하여 이루어져 왔으며 자, 연필, 컴퍼스, 각도기를 이용한 구체적 조작활동이 이루어지더라도 시간적·공간적 제약으로 다양한 상황에서 풍부한 경험과 탐구가 이루어지지 못하고 있다. 결국 학습자들은 기하학의 출발이 일상생활의 문제를 해결하기 위한 것임에도 불구하고 기하 영역을 현실과 동떨어진 증명 위주의 딱딱하고 재미없는 부분으로 인식하고 있다.

남승인(1994)은 기하는 연역과 귀납의 양면성을 가지고 있어 기하교육을 성공적으로 이끌기 위해서는 지나친 연역적 추론에 앞서 탐구하고 추측하며, 가설을 설정하는 귀납적인 탐구활동이 먼저 이루어져야 한다고 밝혔다. 또 어떠한 수학적 사실을 발견하고 창조하기까지의 과정은 귀납이며, 일단 찾아낸 사실을 증명하는 과정은 연역적이기 때문에 기하 학습은 귀납과 연역이 동등한 수준에서 다루어져야 한다고 했다.

따라서 지금까지의 기하교육은 시간적·공간적 제약에 의해 귀납적 탐구활동이 제한되었고 학습자들이 접할 수 있는 자료는 양적으로나 질적으로 다양한 상황에서 귀납적 활동을 경험하기에는 부족한 실정이었다.

이러한 한계를 극복하기 위한 한 가지 수단이 바로 컴퓨터이다.

기하 교육에서 컴퓨터를 활용함으로써 기대할 수 있는 효과를 살펴보면,

첫째, 추상적인 수학개념을 시각화시켜 수학학습의 어려움을 완화시키고

기하학적 대상들 사이의 관계를 시각적으로 파악할 수 있다.

둘째, 컴퓨터를 활용함으로써 학습자의 호기심을 유발하고, 흥미를 일으키며 주의를 집중시킬 수 있다. 따라서 학습자가 스스로 추정하거나 탐구하는 활동을 통해 학습에 능동적으로 참여할 수 있다. 컴퓨터의 그래픽기능과 계산 처리 능력은 도형의 관계를 탐구하고 추정하는 실험의 기회를 제공해 줄 수 있다.

셋째, 같은 수학적 개념, 원리, 법칙 등에 대한 접근 방법이 다양해질 수 있고 수학학습과정도 다양해질 수 있어 학습자들의 수준에 맞는 수업 진행이 가능하다.

넷째, 지필 환경에서는 다룰 수 없어 '정적'이기만 했던 도형의 '움직임'을 구현할 수 있어 폭넓은 공간감각의 발달에 기여한다.

다섯째, 프로그래밍 학습의 활용 시 가능한 오류수정을 통해 사고력을 향상시킬 수 있으며, 컴퓨터의 신속성과 기억, 저장 능력을 이용하여 학습자의 행동에 대한 즉각적이고 개별을 제공해 줄 수 있다(류희영, 2006).

③ 귀납적 추론과 연역적 증명의 연결

학생들은 컴퓨터의 활용을 통해 Balacheff가 제시한 증명의 네 수준을 - 몇 개의 예를 통해 기하학적 정리의 타당성에 대한 잠정적인 결론을 얻는 단순한 경험(nave empiricism)수준, 극단적인 경우를 시험하면서 일반성에 대한 의문을 좀 더 명확히 다루는 결정적인 실험(crucial experiment)수준, 대상들을 대표하는 예에 기초하여 논의를 전개하는 일반적인 예(generic example)수준, 특별한 예에 대한 설명으로부터 벗어나 논리적인 증명을 하기 시작한 사고 실험(thought experiment)수준- 거치면서, 귀납적 추론을 연역적 증명과 자연스럽게 연결시켜 나갈 수 있다. 그러나 탐구형 기하 소프트웨어를 활용하는 대부분의 교수-학습 자료는 연역적 논의가 결여된 채 학습내

용에 대한 시각적 확인 또는 귀납적 추론에 머물거나, 귀납적 추론에 대한 논의의 결여로 귀납적 추론과 연역적 증명이 자연스럽게 연결되지 못하고 있다.

Galindo(1998)는 탐구형 기하 소프트웨어를 활용하는 수업의 한 방법으로, 실제적인 조작활동 후에 컴퓨터를 통해 자신의 추측을 시험하고 확장하며, 다른 사람들과 서로 발견에 대해 논의하면서, 논의에 타당성을 제공할 목적으로 연역적 방법을 취하게 되는 수업을 제안한다. Yershalmy(1998)는 동적인 서술에 대한 내용전개의 한 방법으로 동적인 진술을 작도하고 작도된 대상을 탐구하면서, 시각적 피드백과 측정능력 등을 사용하여 관찰이 추론이 되도록 한 후, 사전 지식을 사용한 연역적 논의로 추론을 정당화하는 방법을 제안한다. 이러한 제안들은 앞서 논의한 증명의 네 수준과 관련하여 탐구형 기하 소프트웨어가 귀납적 추론과 연역적 증명을 자연스럽게 연결할 수 있는 도구로 활용될 수 있음을 뒷받침한다. 그러므로 기하교육에서 탐구형 기하 소프트웨어의 역할이 반영될 수 있도록 하는 노력이 필요하다(유공주, 2000 재인용).

4) The Geometer's Sketch Pad의 개요

GSP는 미국의 과학재단(National Science Foundation)의 VGP(Visual Geometry Project)사업의 한 부분으로 개발된 동적 기하 소프트웨어로서 VGP는 Swarth-more 대학의 연구과제인 시각적인 기하로, 수학교육기관인 Key curriculum Press와의 공동연구로 제작되었으며 수학자인 Eugene Klotz와 Doris Schattschneider에 의해 진두지휘되어 Nicholas Jackie와 Scott Steketee에 의해 이 프로그램이 완성되었다.

수학의 광범위한 대상을 탐구하며 분석할 수 있는 GSP는 동적 기하를 이

용하여 기본적인 도형과 수에 대한 탐구에서부터 복소수에 이르는 수준의 수학을 설명하는 모델을 만들 수 있으며, 수학에 관한 여러 가지 의문이나 어떤 특별한 도형의 성질을 증명할 때, 또는 새로운 결과를 도출할 때, 이 프로그램을 사용하면 많은 도움을 받을 수 있다. 또한 수업활동과 연구에 대한 보고서를 작성하거나 출판을 할 때, 시각적 효과를 높이는 수학적 설명을 위한 그림을 그릴 때도 사용할 수 있다. 예를 들어 함수식을 입력하면 함수의 그래프가 그려질 뿐만이 아니라 매개변수를 이용하여 계수가 변할 때 함수식도 동적으로 변하고, 고등학교의 수열, 극한, 미분, 적분 수업에 필요한 모든 그림뿐만 아니라 대학 Calculus에 필요한 그림을 구현할 수 있으며, GSP를 이용하여 그린 그림을 html로 저장해서 쉽게 움직이는 그림을 웹에 올릴 수도 있다. 이러한 기능의 다양한 활용으로 수업시간에 활용할 수 있는 학습자료 제작을 할 수 있다. GSP는 교사에게는 학습자료 제작에 도움을 주며, 학습자인 학생 또한 GSP를 이용하여 기하에 적용되는 패턴을 찾고 짐작하고, 학생상호간에 공동으로 문제해결력을 가지는데 도움을 주는 수학 소프트웨어라 할 수 있다(김향숙 외6인, 2005).

눈금 없는 자와 컴퍼스를 사용해서 도형을 작도하는 경우에는 생생한 기하학적 원리를 담는데 여러 가지 한계가 있다. 그러나 GSP는(수학사랑, 1999),

첫째, 기본적으로 점, 선, 원을 그리고 원을 이용하여 여러 기하학적 표현을 하고 명확히 구현할 수 있으며, 특히 각의 이등분선, 선분의 중점, 평행선, 수직선, 주어진 선분의 길이와 같은 반지름의 원, 기하학적 관계를 나타낸 그래프(평행이동, 대칭이동, 회전이동) 등을 그릴 수 있다. GSP를 이용하면 쉽게 도형의 본질적인 관련성을 나타내는 그림을 빠르고 정확하게 그릴 수 있다.

둘째, 종이 위에 연필을 사용해서 그린 도형이 기하학적 관계를 나타내는 어떤 특정한 경우를 표현한 것인데 비해, GSP를 사용하여 그린 도형에서는

도형의 한 부분을 끌면 서로 연관된 부분의 도형이 변하게 되며, GSP를 사용하여 그린 도형은 여러 가지 비슷한 경우를 많이 표현할 수 있다.

셋째, 스크립트는 작도 단계를 기록할 수 있고, 그 기록을 다시 재생 할 수 있다. 스크립트를 도구와 같이 사용하여 도형이나 도형들을 반복적으로 그릴 수 있다.

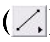
넷째, 스크립트를 실행하면 도형 사이의 관계와 특정한 도형자체 모두를 관찰할 수 있으므로 설정한 가설이 옳은지 옳지 않은지 동적으로 확인 할 수 있다.

다섯째, GSP는 도형의 모양을 여러 가지로 바꾸고 설정할 수 있으므로 동적이며 도형의 여러 요소에 색상처리, 변환, 측정, 계산, 도형의 방정식 등의 표현이 쉽게 구현되며, 도형의 이름을 붙이거나 설명을 써넣을 수 있다.

이렇듯이 GSP는 사용자와 상호작용 하는 동적인 칠판으로 사용할 수 있다.

GSP의 교육적인 효과를 살펴보면(임혜경, 2005),

첫째, 동적인 평면기하의 성질을 정적인 상태의 인쇄 매체 칠판 등을 통하여 지도할 때보다 더욱 확실하게 이해시킬 수 있다.

둘째, 새로운 멀티미디어 매체로서 GSP는 일반적인 그림 프로그램과 달리 직선 도구() 또는 원 도구()만을 사용하는 작도와 측정을 통하여 학생들의 흥미를 자극할 수 있고, 학생들이 직접 GSP를 사용한다면 더욱 학습욕구를 유발할 수 있을 뿐만 아니라 학습 내용을 눈으로 확인할 수 있어서 더욱 효과적이다.

셋째, 평면기하의 어떤 성질이 성립할 것 같은가 또는 평면기하의 성질을 발견적으로 찾아낼 수 있도록 자극할 때 GSP를 마치 실험도구처럼 사용하여 실제로 작도하고, 측정하여 그 성질에 대한 가설을 학습자 스스로 세울 수 있도록 도와 줄 수 있다.

넷째, 평면도형의 성질을 직관적으로 충분히 이해한 다음 연역적으로 증명하는 것이 필요한데 이때에 GSP는 정확한 그림을 제공해 주므로, 증명이나 문제 풀이에 필요한 정보를 얻을 수 있다.

다섯째, 애니메이션과 끌기를 사용하여 평면기하의 성질을 연속적이면서 역동적으로 관찰할 수 있다.특히 애니메이션으로 만들어지는 흔적 남기기는 도형의 자취를 생생하게 보여준다. 따라서 많은 도형을 그 정의에 의하여 구현해 봄으로써 확실한 개념을 얻고 그로부터 파생되는 도형의 성질에 자연스럽게 접근할 수 있다.

여섯째, 변환메뉴의 반복 기능을 사용하면 같은 작업의 순환(Recursion)을 할 수 있다.

일곱째, GSP에서 제공되는 직교좌표계와 극좌표계를 통하여 평면기하의 여러 가지 성질에 대한 해석기하적 접근이 가능하다.

여덟째, GSP에는 사용자 도구 만들기()가 있어서 정다각형, 타원, 각표시등의 도구들을 편리하게 가져다 쓸 수 있으며 자주 사용하게 되는 도형들을 스스로 만들어 넣어 두면 언제든지 간편하게 사용할 수 있다.

아홉째, 작도한 도형들에 애니메이션, 이동, 숨기기/보이기 기능 들을 사용하여 도형의 움직이는 모습, 이동하는 모습을 볼 수 있어서 수업자료를 제작하는 저작도구로서도 활용할 수 있다. 글상자와 동작 버튼을 사용하여 수학적 의사소통의 정보전달 매체로서 학생들의 이해를 도울 수 있다. 동작 버튼들은 기하학적 도형이나 글상자를 보여 주고 숨기거나 애니메이션화 하는 데 쓰일 수 있고, 또 이 버튼들은 연결될 수 있어서 작도 과정이나 설명을 연속적으로 보이게 하는 프리젠테이션 역할도 할 수 있다. 또한 여러 페이지를 만들어서 책장을 넘기듯이 자료를 구성할 수도 있어서 편리하다.

앞서 본 바와 같이 탐구형 소프트웨어의 사용은 학습자가 엄밀한 증명을 하기 위해 직관적으로 도형의 성질을 이해하는 데 도움이 된다. 하지만 이러

한 탐구형 소프트웨어가 장점만을 가지고 있는 것은 아니다. 그러므로 탐구형 소프트웨어의 장점과 단점을 잘 파악하여 단점을 최소화 하고 장점을 최대화 하는 노력을 해야 한다.

본 논문은 탐구형 소프트웨어 중 GSP를 활용한 기하학습에 대한 것이므로 GSP의 장점과 단점에 대하여 살펴 볼 것이다. GSP의 장점과 단점은 다음과 같다[17].

먼저 GSP 활용시 장점을 살펴보면,

첫째, 학생들의 호기심을 자극하여 수업에 대한 흥미와 관심을 유발한다.

둘째, 도형이 자유자재로 움직이므로 도형에 대한 성질을 생동감 있게 보여 줄 수 있다.

셋째, GSP를 통해 추상적인 평면 도형의 모든 관계를 시각화할 수 있다.

넷째, 그래프를 GSP로 작도하여 그 성질을 규명하는 것이 정적인 도형에서 이해를 요구하는 것보다 학생스스로 판단하고 찾을 수 있다.

다섯째, 실험적인 수학을 할 수 있는 계기가 될 수 있고, 다른 프로그램에 비해 비교적 조작이 손쉬워 학생들과 교사가 편하게 사용할 수 있다.

반면에 GSP의 단점은,

첫째, 주객이 전도될 수 있다. 수학 본연의 내용이나 성질의 확인보다 컴퓨터 활동으로 기울어질 염려가 있다.

둘째, 교사 자신이 GSP 및 다른 프로그램들을 잘 알아야 지도하는 방법을 개선할 수 있으며, 교사의 자료제작에 많은 시간이 필요하다.

셋째, 단추 등을 많이 만들면 순서를 결정하는데 어려움이 있다.

넷째, 화면의 글자가 작은 것이 많아 빔 프로젝트를 이용해야 하는 어려움이 있다.

다섯째, 모든 학생들이 모두 조작할 수 있는 컴퓨터 환경이 제공되어 있지 않으면 자칫 수업의 집중도나 효과성이 줄어들 수 있다.

Ⅲ. 연구의 내용

중등학교 수학교과서에서 학생들이 가장 이해하기 힘든 단원을 꼽으라고 하면 일반적으로 기하단원이라고 하였다. 이러한 기하단원을 좀 더 흥미롭고 쉽게 이해하기 위해 GSP를 이용하여 실제로 간단한 작도를 한 후 직관적인 이해에서부터 연역적인 증명에까지 이를 수 있도록 학습 자료를 만들어 보기로 하였다.

GSP는 누구나 쉽게 사용 가능한 프로그램이며 특히 중등학교 과정에서는 간단한 작도를 통해 수업내용을 쉽게 이해할 수 있다. 따라서 모든 학생들에게 컴퓨터가 주어진 상황에서 직접 조작함으로써 쉽고 흥미롭게 수업을 하도록 작성하였다.

1. 증명지도에 관한 교과서 분석

제7차 교육과정 개정에서는 국민 공통 기본 교육과정의 수학 영역을 수와 연산, 문자와 식, 함수, 확률과 통계, 기하의 5개 영역으로 구분하여 제시하고 있는데, 이 중에서 기하영역은 도형과 측정의 부분을 모두 포함하고 있다. 이 절에서는 기하의 영역 중에서 도형의 영역을 중심으로 증명 지도가 어떻게 이루어지고 있는지 살펴 볼 것이다.

교육과학기술부는 기하의 지도의의를 다음과 같이 말하고 있다(교육과학기술부, 2006).

중학교 기하 영역에서는 자연현상이나 실생활의 상황을 통해 평면과 공간 및 평면도형과 입체도형의 개념을 직관적으로 이해하고, 여러 가지 도형의 성질을 학생의 수준에 따라 직관적으로 혹은 연역적 추론을 통해 이해하고

탐구하며, 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결하는 학습활동을 한다.

기하 문제는 해결 방법이 다양하기 때문에 문제 해결 능력과 수학적 창의성을 신장시킬 수 있는 좋은 소재이며, 특히 도형에 관한 명제는 그에 대한 일반화나 유추, 조건의 변형 등을 통해 새로운 문제를 만들 수 있는 경험을 제공할 수 있어 학생의 문제 만들기 능력을 신장시킬 수 있는 좋은 소재이기도 하다.

중학교 도형 영역의 전반적인 내용을 정리해보면 <표1>과 같다(교육과학기술부, 2006).

< 표1. 중학교 교육과정의 기하 영역 내용 >

단계 / 영역	1학년	2학년	3학년
기하	· 점, 선, 면, 각 · 점, 직선, 평면의 위치 관계 · 평행선의 성질 · 간단한 작도 · 삼각형의 결정조건과 합동조건 · 다각형의 성질, 내각과 외각의 크기 · 부채꼴의 중심각과 호의 관계 · 부채꼴의 넓이와 호의 길이 · 원과 직선, 두 원의 위치관계 · 다면체, 회전체의 성질 · 입체도형의 겉넓이와 부피	· 명제의 뜻과 증명의 의미 · 삼각형과 사각형의 성질 증명 · 도형의 닮음 · 닮은 도형의 성질 · 삼각형의 닮음조건 · 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비 · 삼각형의 중점연결정리 · 닮은 도형의 넓이와 부피	· 피타고라스의 정리 · 삼각비 · 원에서 현, 접선에 대한 성질 · 원주각의 성질 · 원에 내접하는 사각형의 성질 · 원과 비례에 관한 성질

1) 중학교 1학년

중학교 1학년에서는 대부분의 성질은 직관적인 탐구활동을 통해서 제시되며, 엄밀한 증명은 피하고 간단한 조작활동을 통하여 그 이유를 설명할 수 있도록 지도하고 있다.

중학교 1학년에서 직관적 추론에 의해 지도되는 내용으로는 평행선과 동위각의 관계, 정다면체의 종류, 중심각의 크기와 호의 길이와의 관계 등이다.

이 학년에서는 직접적으로 형식적 증명을 요구하고 있지 않으며, 대부분이 직관적 추론에 의해서 제시되고 있다.

2) 중학교 2학년

중학교 2학년에서는 본격적으로 형식적 증명이 도입되며, 명제, 가정, 결론, 역의 개념을 이해하게 하며, 주어진 명제를 $p \rightarrow q$ 의 꼴로 나타낼 수 있게 한다. 정의, 정리, 증명의 뜻을 이해하고, 어떤 명제가 참임을 증명하려면 우선 그 명제의 가정과 결론을 분명히 하고 가정과 이미 알려진 사실이나 성질들을 근거로 하여 결론을 유도하여야함을 알게 하여, 대부분의 명제를 형식적으로 증명하게 되며, 중학교 1학년에서 배운 삼각형의 합동조건을 이용하여 증명하게 된다. 그러나 삼각형과 사각형의 성질에 대한 증명에서 증명을 하기 전에 공학적 도구나 종이접기, 작도 등의 조작 활동을 통하여 증명해야할 성질은 추측하거나 직관적으로 이해한 후 증명을 하는 등 형식적인 증명이 도입되긴 하지만, 지나치게 논증을 강조하지 않도록 한다.

중학교 2학년에서의 내용을 보면, 삼각형의 합동조건을 이용하여 이등변삼각형의 성질, 직각삼각형의 합동조건, 삼각형의 외심, 내심의 성질, 무게중심,

여러 가지 사각형의 성질, 삼각형의 닮음 등이 지도된다.

3) 중학교 3학년

중학교 2학년과 마찬가지로 중학교 3학년에서도 형식적인 증명을 통해서 지도되며, 추론도 부분적으로 다루어지고 있으며, 학생의 수준에 따라 증명 방법이나 활용 정도를 달리 할 수 있도록 하였다.

중학교 3학년에서 지도되는 내용은 피타고라스의 정리, 원에서 현에 관한 성질, 원주각과 중심각의 크기, 원의 접선과 현이 이루는 각, 원과 비례에 관한 성질 등이며, 원과 직선 및 원주각에 관한 성질의 이해에서 학생들에게 엄밀한 연역적 증명을 강조하지는 않으나, 학생의 수준에 따라 그 정도와 방법은 달리 할 수 있다.

이상에서는 중학교 교육과정 해설서와 교사용지도서를 중심으로 기하영역에 해당하는 중학교 교육과정을 분석해 보았다.

학교현장에서는 학생들의 개인차나 학생들의 기하학습 수준이 다르기 때문에 학생들이 느끼는 어려움에 대해 학생들에게 선행학습을 시켜 학생들의 학습수준을 학습내용에 맞게 이끌어줄 시간이 충분하지 않다. 그러므로 개정 교육과정에서는 학생들에게 엄밀한 증명이전에 흥미를 느낄 수 있게 직관적 이해가 가능한 공학도구의 이용등과 같은 조작 활동을 강조하였으며, 학생들의 수준에 따라 정도와 방법을 달리하여 증명 교육을 지도해야 한다고 하였다.

이 논문은 학생들이 엄밀한 증명 이전에 직관적 이해를 가능하게 할 공학도구 중 GSP를 이용하여 중학교 3학년의 원의 성질에 대한 직관적 이해를 돕는 자료를 소개할 것이며, 이것은 학생이 증명을 어렵게만 생각하고 교사의

일방적인 지도하에 증명을 기록 암기 하던 수업에서 벗어나 증명에 대한 흥미와 자신감을 기대할 수 있을 것이다.

2. GSP를 활용한 효율적인 증명지도 방법

학생들의 수학적 사고 활동으로서의 증명을 하기위해서는 2장의 증명지도의 개선 방향에서 살펴보았듯이 효율적으로 증명지도를 하기 위해서는 증명 이전에 학생들로 하여금 패턴과 관련성을 파악하는 다양한 경험을 제시할 필요가 있으며, 증명의 방식에서도 분석적 방식과 종합적 방식이 통합된 역동적인 수학적 사고 활동으로서 증명을 지도할 필요가 있다.

본 논문은 다른 프로그램에 비해 비교적 조작이 손쉬운 GSP를 이용하여 효율적으로 증명지도를 하기위한 방법에 대하여 연구하여 보았으며, 그 방법은 다음과 같은 순서로 이루어진다.

증명지도 이전에 평면기하의 성질을 발견적으로 찾아낼 수 있도록 GSP를 이용하여 도형을 작도해보고, 작도한 도형을 직접 움직여 관찰을 통하여 도형의 성질을 발견해본다. 이렇게 얻어낸 사전 지식을 사용하여 명제의 엄밀한 연역적 증명을 위해 명제를 가정과 결론으로 나누어 결론이 성립하기 위한 조건을 찾아내고, 가정에서 결론이 성립하기 위한 조건과 관련된 정의 성질 등을 생각해내는 분석적 방식을 이용하여 증명 방법을 찾아낸 후 이를 이용하여 종합적인 방식으로의 증명을 함으로써 역동적인 수학적 사고활동으로서 증명을 지도할 수 있게 된다.

3. GSP를 이용한 중학교 3학년 원의 성질에 대한 증명 이해를 돕기 위한 학습자료

GSP를 활용하여 원의 성질을 알아보고 원과 직선의 성질, 원주각의 성질, 원과 비례의 성질을 추측한 다음 그 추측이 옳음을 증명하는데 활용할 수 있는 자료이다.

1) GSP를 이용한 원과 직선의 성질

① 중심각에 대한 호와 현

< 작도방법 >

ㄱ. 화면 왼쪽에 원을 선택()한 후 적당한 크기의 원을 그린다.

ㄴ. 원 위에 현을 긋고, 원의 중심 O와 선분의 양 끝점에 이름 A, B를 단다.

㉠ 그려진 원 선택()→ 작도(작도(C)) → 원 위의 점 선택 → 원 선택() → 작도(작도(C)) → 원 위의 점 선택

㉡ ㉠에서 생성된 두 점을 선택() → 작도(작도(C)) → 선분 선택

㉢ 화면 왼쪽의 글 도구 선택(A) → 원 위의 점 선택() → 원하는 이름 입력

ㄷ. O, A, B를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형을 그린 후 삼각형에 색을 넣는다.

㉠ 점 O, 점 A, 점 B를 선택(↖) → 작도(작도(C)) → 선분 선택

㉡ 점 O, 점 A, 점 B를 선택(↖) → 작도(작도(C)) → 삼각형의 내부 선택 → 마우스의 오른쪽 선택 → 색 선택 → 원하는 색 선택

ㄹ. 원 안에 위쪽 삼각형 그린 후 삼각형의 각 꼭짓점의 이름을 정한 후 삼각형에 색을 넣는다.

㉠ 선분 OA, 선분 OB, 선분 AB 선택(↖) → 변환(변환(T)) → 회전이동 선택 → 각도지정 → 선택

㉡ 점 O, 점 C, 점 D를 선택(↖) → 작도(작도(C)) → 삼각형의 내부 선택 → 마우스의 오른쪽 선택 → 색 선택 → 원하는 색 선택

ㅁ. 애니메이션버튼 만들기

㉠ B점과 원을 선택(↖) → 편집(편집(E)) → 동작버튼 → 애니메이션 선택

ㅂ. 각, 현, 호의 길이 표시하기

㉠ 각의 크기 표시하기

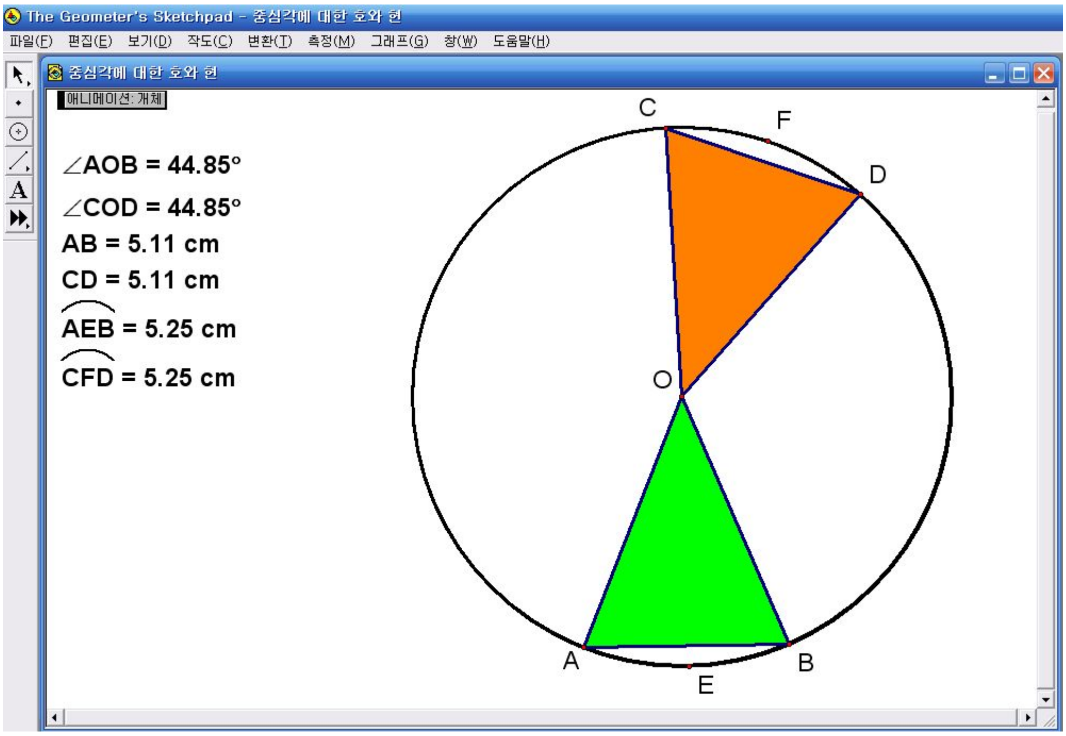
점 A, 점 O, 점 B를 선택(↖) → 측정(측정(M)) → 각의 크기 선택 (측정하고자 하는 각의 이름순서로 점을 선택해야 한다.)

㉡ 현의 길이 표시하기

현 AB 선택(↖) → 측정(측정(M)) → 길이 선택

㉢ 호의 길이 표시하기

호 AB위에 한 점(·)E를 선택 → 점 A, 점E , 점 B를 순서대로 선택(↖) → 작도(작도(C)) → 세 점을 지나는 호 → 측정(측정(M)) → 호의 길이



[그림1. 중심각이 같은 현과 호]

* 그림1은 한 원에서 같은 중심각에 대한 호와 현의 길이를 알아보기 위한 것이다.

< 원의 중심각과 호, 현의 성질의 발견 >

ㄱ. 점A, B, C, 또는 점D를 마우스를 이용하여 자유롭게 이동시켜가면서 중심각, 호, 현의 크기를 비교하여 본다.

ㄴ. 애니메이션 버튼을 누른 후 중심각, 호, 현 사이에 어떤 관계가 있는지 살펴본다.

ㄷ. 위의 실험을 통해 알 수 있는 사실은 무엇인가?

< 원의 중심각과 현의 성질의 엄밀한 증명 >

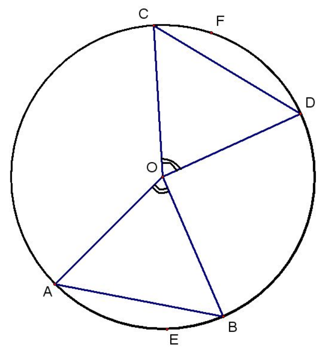
ㄱ. 일반적으로 '한 원에서 같은 크기의 두 중심각에 대한 현의 길이는 서로 같다.'는 추측이 참인지 거짓인지 어떻게 확인할 수 있을까? 모든 합동인 원의 같은 크기의 두 중심각에 대한 현의 길이는 서로 같은지 측정해보아야 하는가? 그러나 모든 원과 크기가 같은 두 중심각을 다 그려보고 측정하는 것은 불가능하다.

ㄴ. 일반적으로 항상 성립하는 사실을 이용하여 '한 원에서 같은 크기의 두 중심각에 대한 현의 길이는 서로 같다.'는 성질을 증명해 보자.

㉠ <u>주어진 명제를 가정과 결론으로 나눈다.</u>

가정: 한 원에 중심각이 같은 현을 그린다. ($\angle AOB = \angle COD$)

결론: 현의 길이는 같다. ($\overline{AB} = \overline{CD}$)



[그림2]

㉡ <u>결론이 성립하기 위한 조건을 찾아낸다.</u>

㉡-1: 현의 길이는 같다. 즉 $\overline{AB} = \overline{CD}$은 어떻게 이끌어낼 수 있을까?

㉡-2: 삼각형의 합동을 이용하자

㉡-3: 선분AB과 선분 CD가 대응되는 두 삼각형 △OAB과 △OCD 이

합동이면 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 이 된다.

㉢ <u>가정에서 결론이 성립하기 위한 조건과 관련된 사항(정의, 성질 등)을 생각해 낸다.</u>

㉢-1: △OAB과 △OCD이 합동인가?

㉢-2: ∠AOB=∠COD이고

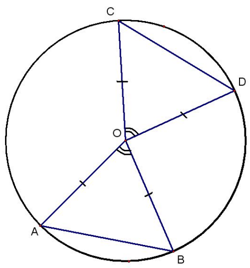
$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$ (원의정의: 반지름)

'삼각형에서 두 변의 길이가 같고

그 사이에 끼인 각의 크기가 같으면

합동이다.' (SAS 합동조건)에 의해

△OAB과 △OCD이 합동이다.



[그림3]

㉣ <u>㉡과㉢에서 생각한 것으로 증명의 과정을 차례로 설명해 나간다.</u>

한 원에서 중심각의 크기가 같으면, △OAB≡△OCD

왜냐하면 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$ (원의정의: 반지름)

∠AOB=∠COD (가정에 의해)

그러므로, $\overline{AB}=\overline{CD}$

② 원의 중심과 현

< 작도방법 >

ㄱ. 화면 왼쪽에 원()을 선택한 후 적당한 크기의 원을 그린다.

ㄴ. 원위에 현을 긋는다.

ㄷ. 원의 중심 O와 선분의 양 끝점에 이름A, B를 달고, 원의 중심 O에서 선분AB에 수선을 긋는다.

㉠ 점 O와 선분AB 선택() → 작도(작도(C)) → 수선 선택

㉡ ㄷ-㉠에서 생성된 수선과 선분AB 선택() → 작도(작도(C)) → 교점 선택

㉢ 원의 중심 O와 ㄷ-㉡에서 생성된 점 선택() → 작도(작도(C)) →선분 선택

㉣ ㄷ-㉠에서 생성된 수선 선택() → 보기(보기(D)) → 숨기기 선택

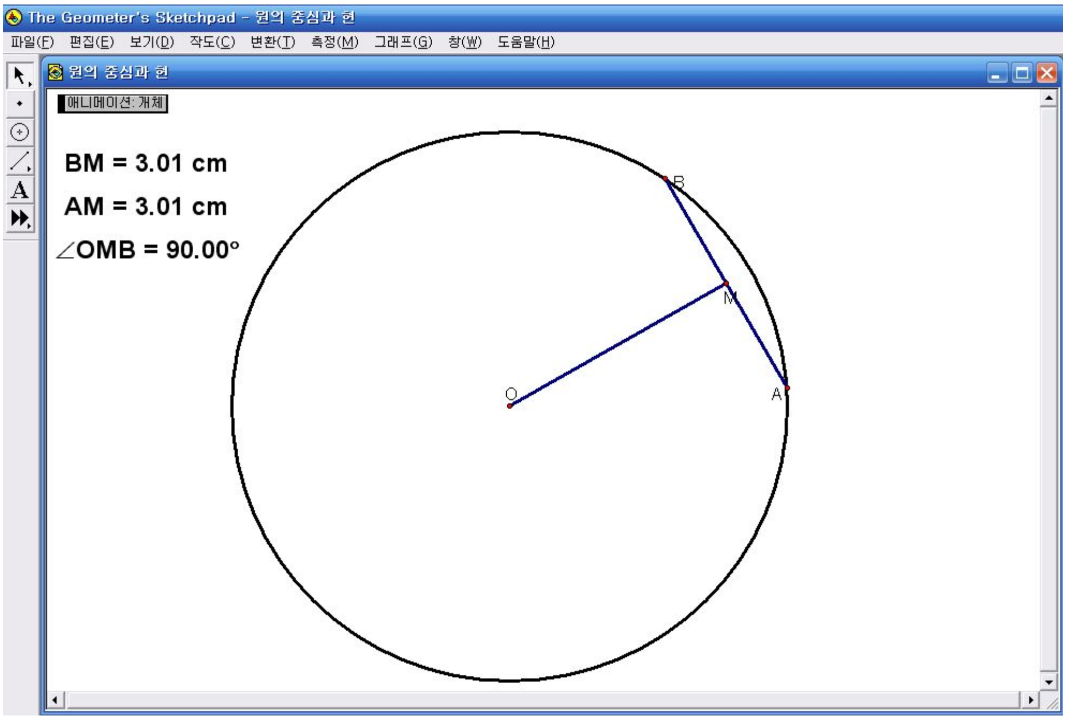
ㄹ. 애니메이션버튼 만들기

㉠ B점과 원을 선택() → 편집(편집(E)) → 동작버튼 → 애니메이션 선택

ㅁ. 현의 중점과 원위의 점의 길이표시하기

㉠ 점A와 점M 선택() → 측정(측정(M)) → 거리 선택

㉡ 점B와 점M 선택() → 측정(측정(M)) → 거리 선택



[그림4. 원의 중심과 현]

* 위의 그림은 원의 중심 O에서 현 AB에 수선을 그은 것이다.

< 원의 중심과 현의 성질의 발견 >

ㄱ. 점A, B 또는 점 D를 마우스를 이용하여 자유롭게 이동시켜가면서 선분 AM, 선분 BM의 길이가 어떻게 변하는지 비교해 본다.

ㄴ. 애니메이션 버튼을 누른 후 선분 AM, 선분 BM의 길이 사이에 어떤 관계가 있는지 살펴본다.

ㄷ. 위 실험을 통해 알 수 있는 사실은 무엇인가?

< 원의 중심과 현의 성질의 엄밀한 증명 >

ㄱ. 일반적으로 '원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.'는 추측이 참인지 거짓인지 어떻게 확인할 수 있을까? 모든 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분하는지 측정해보아야 하는가? 그러나 모든 원과 현을 다 그려 보고 측정하는 것은 불가능하다.

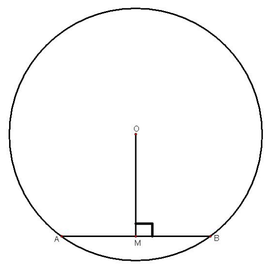
ㄴ. 일반적으로 항상 성립하는 사실을 이용하여 '원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분 한다'는 성질을 증명해 보자.

㉠ 주어진 명제를 가정과 결론으로 나눈다.

가정: 원에 중심에서 현에 수선을 내린다.

($\angle OMA = \angle OMB$)

결론: 현을 이등분한다. ($\overline{AM} = \overline{MB}$)



[그림5]

㉡ 결론이 성립하기 위한 조건을 찾아낸다.

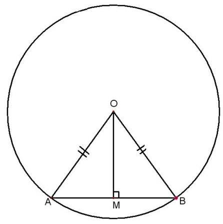
㉡-1: 현을 이등분한다. 즉 $\overline{AM} = \overline{MB}$ 을 어떻게 이끌어낼 수 있을까?

㉡-2: 삼각형의 합동을 이용하자.

㉡-3: 선분AM과 선분 BM이 대응되는 두 삼각형을 만들어보자.

㉡-4: 선분OM을 그어 두 삼각형△OAM과 △OBM을 만들자

㉡-5: 여기서 △OAM과 △OBM합동이면 $\overline{AM}=\overline{MB}$ 이 된다.



[그림6]

㉢ <u>가정에서 결론이 성립하기 위한 조건과 관련된 사항(정의, 성질 등)을 생각해 낸다.</u>

㉢-1: △OAM과 △OBM이 합동인가?

㉢-2: ∠OMA=∠OMB=90˚이고

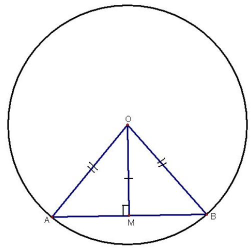
변 OM은 공통, 변 OA와 변 OB는 같다.

(원의정의: 반지름)

'직각삼각형에서 빗변의 길이가 같고 한 변의 길이가 같으면 합동이다.'

(RHS 합동조건)에 의해

△OAM과 △OBM이 합동이다.



[그림7]

㉣ <u>㉡과㉢에서 생각한 것으로 증명의 과정을 차례로 설명해 나간다.</u>

원의 중심에서 현에 내린 수선과 현이 만나는 교점을 M이라고 하면,

△OAB≡△OCD

왜냐하면 $\overline{OA}=\overline{OB}$ (원의정의: 반지름)

∠AMO=∠BMO (가정에 의해)

$\overline{OM}$ 은 공통 그러므로, $\overline{AM}=\overline{MB}$

③ 원의 접선의 길이

< 작도방법 >

ㄱ. 화면 왼쪽에 원(⊙)을 선택한 후 적당한 크기의 원을 그린다.

ㄴ. 원 밖에 한 점 P를 선택(•) 한다.

ㄷ. 원의 O와 외부의 점 P를 지나는 접선을 그린다.

㉠ 점 O와 점 P를 지나는 선분OP를 그린다.

㉡ ㄷ-㉠에서 생성된 선분OP 선택(↖) → 작도(작도(C)) → 중점 선택

㉢ ㄷ-㉡에서 생성된 점과 원의 중심O 선택(↖) → 작도(작도(C)) → 중심과 원주위의 점이 주어진 원 선택

㉣ ㄷ-㉢에서 생성된 원과 원O 선택(↖) → 작도(작도(C)) → 교점 선택

㉤ 생성된 점A, 점B와 점P가 이루는 선분을 각각 그린다.

㉥ 선분OP 선택(↖) → 마우스 오른쪽 선택 → 선분 숨기기 선택

㉦ 선분OP를 지름으로 하는 원 선택(↖) → 마우스 오른쪽 선택 → 원 숨기기 선택

㉧ 선분OP를 지름으로 하는 원의 중심 선택(↖) → 마우스 오른쪽 선택 → 점 숨기기 선택

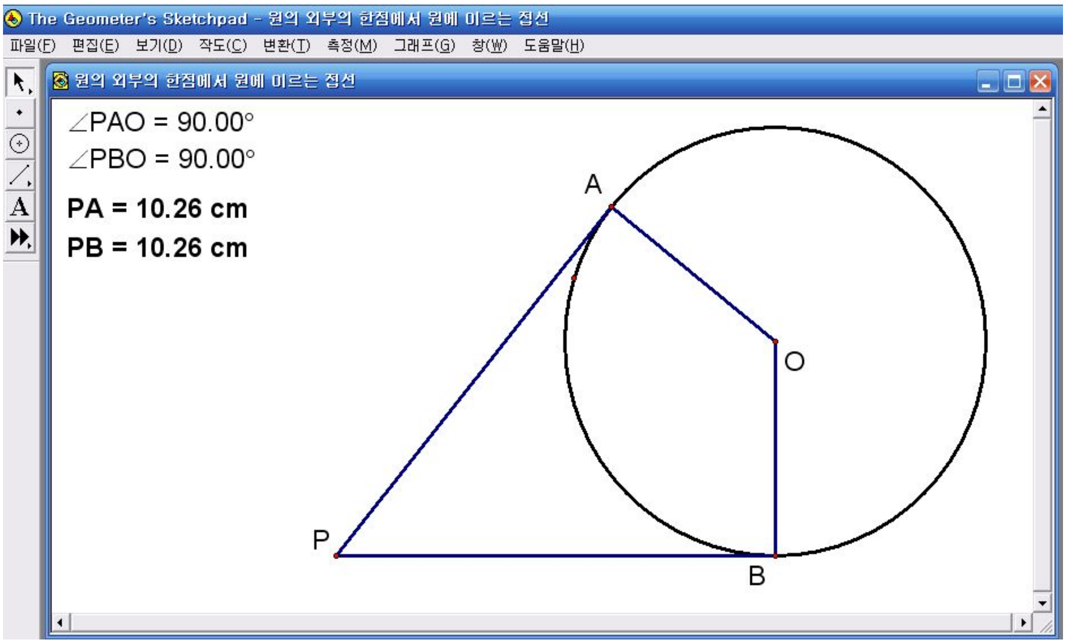
ㄹ. 애니메이션버튼 만들기

점P와 원을 선택(↖) → 보기(보기(D)) → 점에 애니메이션 주기 선택

ㅁ. 접선 PA와 접선PB의 길이 , ∠PAO와 ∠PBO의 크기 표시하기

㉠ 점P와 점A 선택(↖) → 측정(측정(M)) → 거리 선택 (접선 PB도 같은 방법)

㉡ 점P, A, O 선택(↖) → 측정(측정(M)) → 각의 크기 선택(∠PBO도 같은 방법)



[그림8. 원의 접선의 길이]

* 위의 그림은 원의 외부의 한 점P에서 원 O에 접선PA, 접선PB를 그은 것이다.

< 원의 접선의 길이에 대한 성질의 발견 >

ㄱ. 점P를 마우스를 이용하여 자유롭게 이동시켜가면서 접선 PA, 접선 PB

의 길이가 어떻게 변하는지 비교해 본다.

ㄴ. 애니메이션 버튼을 누른 후 접선 PA, 접선 PB의 길이 사이에 어떤 관계가 있는지 살펴본다.

ㄷ. 위 실험을 통해 알 수 있는 사실은 무엇인가?

< 원의 접선의 길이에 대한 성질의 엄밀한 증명 >

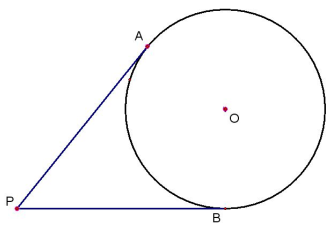
ㄱ. 일반적으로 '원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같다.'는 추측이 참인지 거짓인지 어떻게 확인할 수 있을까? 모든 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같은지 측정해보아야 하는가? 그러나 모든 원과 현을 다 그려 보고 측정하는 것은 불가능하다.

ㄴ. 일반적으로 항상 성립하는 사실을 이용하여 '원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같다.'는 성질을 증명해 보자.

㉠ 주어진 명제를 가정과 결론으로 나눈다.

가정: 원의 외부의 한 점에서 그 원에 접선을 그린다.

결론: 두 접선의 길이는 같다. ($\overline{PA} = \overline{PB}$)



[그림9]

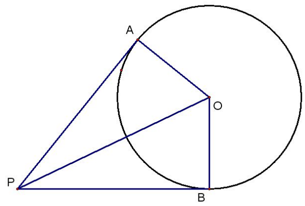
㉡ 결론이 성립하기 위한 조건을 찾아낸다.

㉡-1: 두 접선의 길이는 같다. 즉 $\overline{PA} = \overline{PB}$를 어떻게 이끌어낼 수 있을까?

㉡-2: 삼각형의 합동을 이용하자

㉡-3: 선분PA과 선분 PB가 대응되는 두 삼각형을 만들어 보자.

㉡-4: 선분OA, 선분OB, 선분PO를 그어 두 삼각형 △PAO과 △PBO를 만들자.



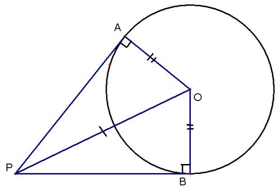
[그림10]

㉡-5: 여기서 △PAO과 △PBO가 합동이면 $\overline{PA} = \overline{PB}$이 된다.

㉢ 가정에서 결론이 성립하기 위한 조건과 관련된 사항(정의, 성질 등)을 생각해 낸다.

㉢-1: △PAO과 △PBO가 합동인가?

㉢-2: ∠OAP=∠OBP=90°이고
(접선과 반지름의 성질)
변 OP는 공통, 변 OA와 변 OB는 같다.
(원의정의: 반지름)
'직각삼각형에서 빗변의 길이가 같고 한 변의 길이가 같으면 합동이다.'
(RHS 합동조건)에 의해
△PAO과 △PBO가 합동이다.



[그림11]

㉣ ㉡과㉢에서 생각한 것으로 증명의 과정을 차례로 설명해 나간다.

원의 외부의 한 점P에서 원의 중심O에 선분을 긋고, 원의 중심에서 접점 A와 접점B에 선분을 그으면, △PAO≡△PBO

왜냐하면 $\overline{OA}=\overline{OB}$ (원의정의: 반지름)

∠OAP=∠OBP=90° (접선과 반지름의 성질)

$\overline{OP}$ 은 공통

그러므로, $\overline{PA}=\overline{PB}$

2) GSP를 이용한 원과 각의 성질

① 원주각과 중심각의 크기

< 작도방법 >

ㄱ. 화면 왼쪽에 원( )을 선택한 후 적당한 크기의 원을 그린다.

ㄴ. 원 위에 세 점 A, B, P를 선택한다.

원 선택( ) → 작도(작도(C)) → 원 위의 점

ㄷ. 선분 OA, 선분 OB, 선분PA, 선분PB를 긋는다.

점 O와 점A 선택( ) → 작도(작도(C)) → 선분 선택 (같은 방법으로 나머지 세 선분도 그린다.)

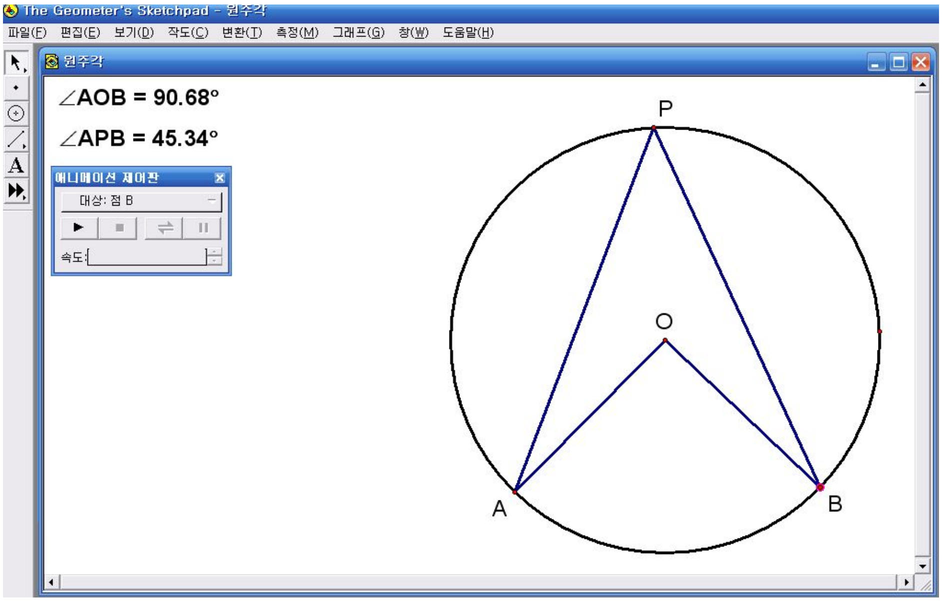
ㄹ. 애니메이션버튼 만들기

점P와 원을 선택( ) → 보기(보기(D)) → 점에 애니메이션 주기 선택

(원하는 점을 선택( )하면 그 점에 대한 애니메이션이 일어난다.)

ㅁ. ∠APB와 ∠AOB의 크기 표시하기

점A, P, B 선택( ) → 측정(측정(M)) → 각의 크기 선택(∠AOB도 같은 방법)



[그림12. 원주각과 중심각의 크기]

＊ 위의 그림은 원의 중심각과 원주각을 그린 것이다.

< 원주각과 중심각의 크기에 대한 성질의 발견 >

ㄱ. 점A, B 또는 점 P를 마우스를 이용하여 자유롭게 이동시켜가면서 ∠APB와 ∠AOB의 크기가 어떻게 변하는지 비교해 본다.

ㄴ. 애니메이션 버튼을 누른 후 ∠APB와 ∠AOB의 크기 사이에 어떤 관계가 있는지 살펴본다.

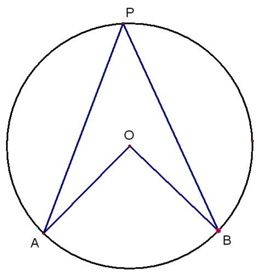
ㄷ. 위 실험을 통해 알 수 있는 사실은 무엇인가?

< 원의 중심과 현의 성질의 엄밀한 증명 >

ㄱ. 일반적으로 '한 호에 대한 원주각의 크기는 일정하고, 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.'는 추측이 참인지 거짓인지 어떻게 확인할 수 있을까? 모든 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 일정하고, 그 호에 대한 중심각의 크기는 $\frac{1}{2}$인지 측정해보아야 하는가? 그러나 모든 원과 현을 다 그려 보고 측정하는 것은 불가능하다.

ㄴ. 일반적으로 항상 성립하는 사실을 이용하여 '한 호에 대한 원주각의 크기는 일정하고, 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.'는 성질을 증명해 보자.

㉠ 주어진 명제를 가정과 결론으로 나눈다.



[그림13]

가정: 원의 한 호이다.

결론: 원주각의 크기는 일정하고,

그 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의

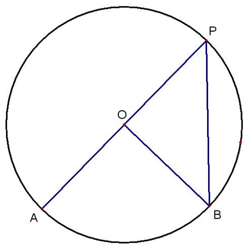
크기의 $\frac{1}{2}$이다.

㉡ 결론이 성립하기 위한 조건을 찾아낸다.

㉡-1: 한 호에 대한 원주각의 크기는 일정하고

그 호에 대한 원주각의 크기는 중심각

크기의 $\frac{1}{2}$이다. 즉,



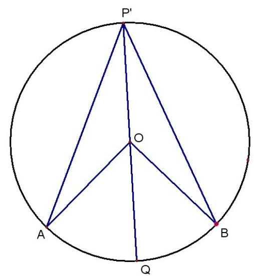
[그림14]

$\angle APB = \angle AP'B = \angle AP''B = \frac{1}{2}\angle AOB$

를 어떻게 이끌어낼 수 있을까?

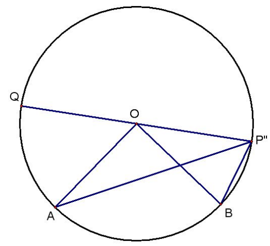
㉡-2: 삼각형의 외각의 합을 이용하자.

㉡-3: 원의 중심O와 $\angle APB$, $\angle AP'B$, $\angle AP''B$ 가 각각 포함 되는 세 삼각형을 만들어보자.



[그림15]

㉡-4: P와 중심O를 포함한$\triangle OAB$와 P'와 중심O를 지나는 선분, P''와 중심O를 지나는 선분을 그어 삼각형 $\triangle OAP'$,$\triangle OBP'$와 $\triangle OAP''$,$\triangle OBP''$를 만들자



[그림16]

㉡-5: 여기서 외각 $\angle AOB=2\angle APB$이고,

외각 $\angle AOB = \angle AOQ + \angle BOQ$

$=2\angle AP'Q+2\angle BP'Q=2\angle AP'B$이고,

외각 $\angle AOB = \angle QOB - \angle QOA$

$=2\angle QP''B-2\angle QP''A=2\angle AP''B$ 이면,

$\angle APB = \angle AP'B = \angle AP''B = \frac{1}{2}\angle AOB$

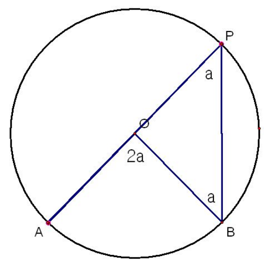
이다.

㉢ <u>가정에서 결론이 성립하기 위한 조건과 관련된 사항(정의, 성질 등)을 생각해 낸다.</u>

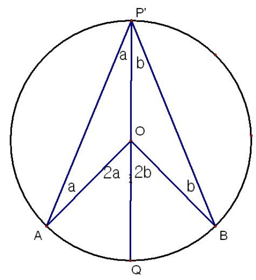
㉢-1: 원주각과 원의 중심 O와의 위치 관계는 점 P의 위치에 따라,

중심 O가 원주각∠APB의 한 변위에 있는 경우, 중심 O가 원주각 ∠AP′B의 내부에 있는 경우, 중심 O가 원주각의 외부에 있는 경우로 나눌 수 있는데, 그때

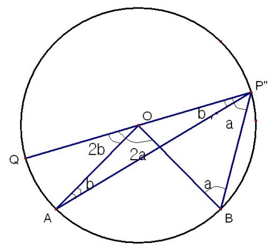
$$\angle APB = \angle AP'B = \angle AP''B = \frac{1}{2}\angle AOB \text{ 인가?}$$



[그림17]



[그림18]



[그림19]

ㄷ-2: 선분OP = 선분OP′ = 선분OP″

= 선분OA = 선분OB

(원의정의: 반지름)이므로,

‘삼각형의 한 외각의 크기는 이와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.’는 삼각형의 외각의 성질에 의해 [그림17]의 △OBP, [그림18]의 △OBP′, △OAP′, [그림19]의 △OBP″, △OAP″는 두변이 반지름으로 같은 이등변 삼각형이므로,

$\angle AOB$

$=2\angle APB$

$=2\angle AP'B=2\angle AP'Q+2\angle AP'Q$

$=2\angle AP''B=2\angle OP''B-2\angle OP''A$이다.

㉣ ㉡과㉢에서 생각한 것으로 증명의 과정을 차례로 설명해 나간다.

원주각 ∠APB와 원의 중심 O와의 위치 관계는 점 P의 위치에 따라,

중심O가 원주각∠APB 의 한 변위에 있는 경우는,

∠APB=$\frac{1}{2}$∠AOB이다.

왜냐하면 $\overline{OA}=\overline{OB}$ (원의정의: 반지름)

△OPB는 이등변 삼각형 (이등변삼각형의 정의)

그러므로, 2∠APB=∠AOB (삼각형의 외각의 성질)

중심O가 원주각∠AP′B 의 내부에 있는 경우는,

원의 중심O와 점P′를 지나는 지름을 긋고 그 지름이 원의 다른 부분과 만나는 점을 Q라 하면,

∠AP′B=$\frac{1}{2}$∠AOB이다.

왜냐하면, $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OP'}$ (원의정의: 반지름)

△OBP′와△OAP′는 이등변삼각형(이등변삼각형의 정의)

∠AOQ=2∠AP′Q이고 ∠AOQ=2∠AP′Q

(삼각형의 외각의 성질)

∠AOB=∠AOQ+∠AOQ=2∠AP′Q+2∠AP′Q=2∠AP′B

이다.

그러므로, 2∠AP′B=∠AOB

중심O가 원주각∠AP″B의 외부에 있는 경우는,

원의 중심O와 점P′를 지나는 지름을 긋고 그 지름이 원의 다른 부분과 만나는 점을 Q라 하면,

$\angle AP''B = \frac{1}{2}\angle AOB$이다.

왜냐하면, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OP''}$(원의정의: 반지름)

$\triangle OAP''$와$\triangle OBP''$는 이등변삼각형

$\angle QOB = 2\angle OP''B$이고 $\angle QOA = 2\angle OP''A$

(삼각형의 외각의 성질)

$\angle AOB = \angle QOB - \angle QOA = 2\angle OP''B - 2\angle OP''A = 2\angle AP''B$

이다.

그러므로, $2\angle AP''B = \angle AOB$

세 가지 경우를 모두 보았을 때 한 호에 대해 생길 수 있는 모든 원주각의 크기는 같고 중심각의 $\frac{1}{2}$이다.

즉, 한 호에 대한 원주각 $\angle APB = \angle AP'B = \angle AP''B = \frac{1}{2}\angle AOB$ 이다.

③ 네 점이 한 원 위에 있을 조건

< 작도방법 >

ㄱ. 화면 왼쪽에 원( )을 선택한 후 적당한 크기의 원을 그린다.

ㄴ. 원 위의 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC를 그린다.

㉠ 원O 선택( ) → 작도(작도(C)) → 원위의 점 선택 (반복하여 세 점을 잡는다.)

㉡ 세 점을 선택( ) → 작도(작도(C)) → 선분 선택

ㄷ. 원의 외부에 한 점 P를 선택한 후 점 A, B, P를 선분으로 연결한다.

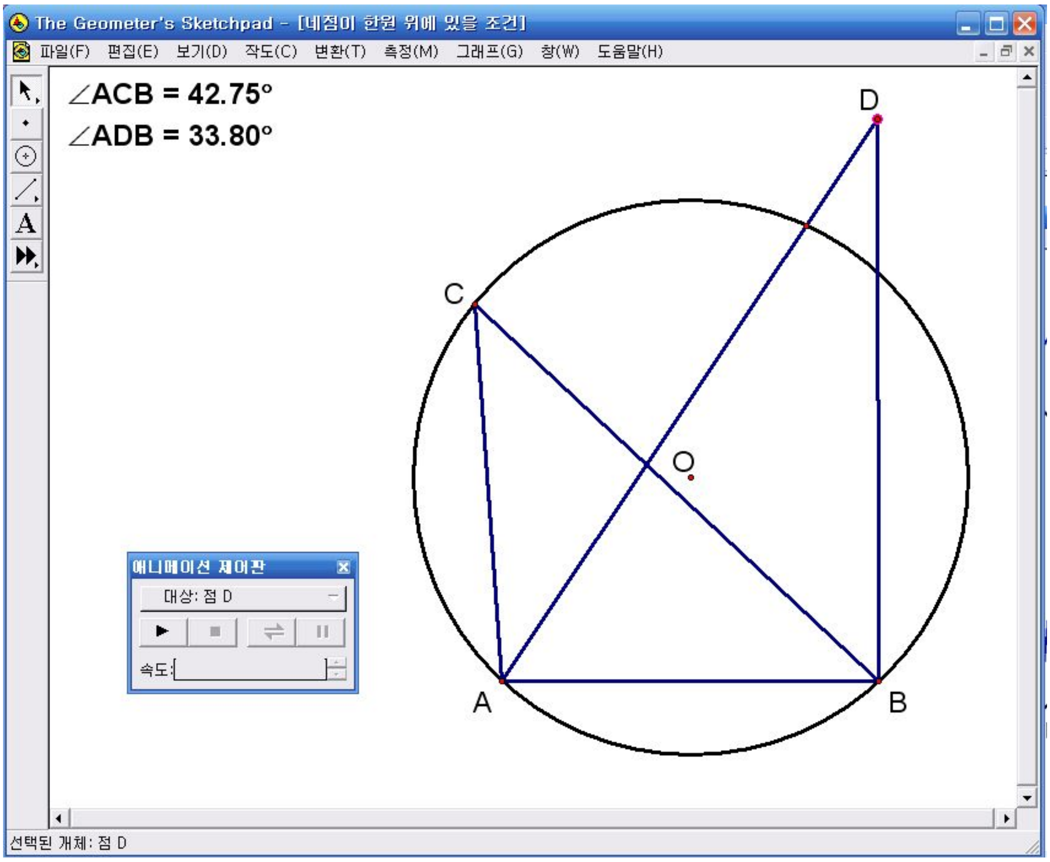
점 P를 선택( ) → 세 점을 선택( ) → 작도(작도(C)) → 선분 선택

ㄹ. 애니메이션버튼 만들기

점P 선택(↖) → 보기(보기(D)) → 점에 애니메이션 주기 선택

ㅁ. ∠ACB와 ∠APB의 크기 측정하기.

점A, C, B 선택(↖) → 측정(측정(M)) → 각의 크기 선택(∠APB도 같은 방법)



[그림20. 네 점이 한 원위에 있을 조건]

* 위의 그림은 네 점이 한 원위에 존재할 조건에 대한 그림이다.

< 네 점이 한 원위에 있을 조건에 대한 발견 >

ㄱ. 점P를 마우스를 이용하여 자유롭게 이동시켜가면서 ∠ACB와 ∠APB의 크기가 어떻게 변하는지 비교해 본다.

ㄴ. 애니메이션 버튼을 누른 후 ∠ACB와 ∠APB의 크기 사이에 어떤 관계가 있는지 살펴본다.

ㄷ. 위 실험을 통해 알 수 있는 사실은 무엇인가?

< 네 점이 한 원위에 있을 조건에 대한 엄밀한 증명 >

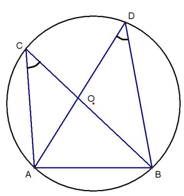
ㄱ. 일반적으로 '두 점 C, D가 직선 AB에 대하여 같은 쪽에 있고 ∠ACB =∠ADB이면, 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.'는 추측이 참인지 거짓인지 어떻게 확인할 수 있을까? 모든 원의 위에 있는 점에서 이루는 각의 크기가 서로 같은지 측정해보아야 하는가? 그러나 모든 원과 현을 다 그려 보고 측정하는 것은 불가능하다.

ㄴ. 일반적으로 항상 성립하는 사실을 이용하여 '두 점 C, D가 직선 AB에 대하여 같은 쪽에 있고 ∠ACB=∠ADB이면, 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.'는 성질을 증명해 보자.

㉠ <u>주어진 명제를 가정과 결론으로 나눈다.</u>

가정: 두 점 C, D가 직선 AB에 대하여 같은 쪽에 있고 ∠ACB=∠ADB이다.

결론: 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

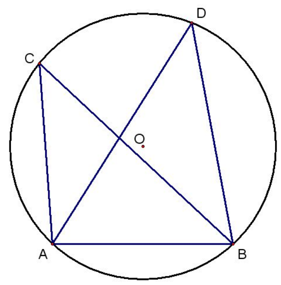


[그림21]

㉡ <u>결론이 성립하기 위한 조건을 찾아낸다.</u>

㉡-1: 네 점A, B, C, D가 한 원 위에 있을 조건은 어떻게 이끌어낼 수 있을까?

㉡-2: 세 점A, B, C를 지나는 원에 대해 점 D는 활꼴 ACB의 내부, 호 ACB 위, 활꼴 ACB의 외부에 있는 경우로 나눌 수 있다.

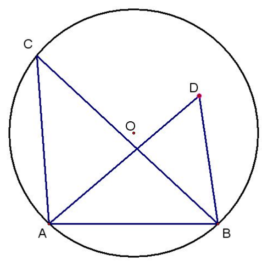


[그림22]

㉡-3: 각각의 경우에 대하여 삼각형의 외각의 합을 이용하자.

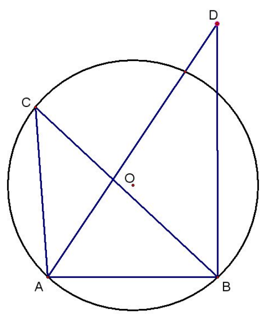
㉡-4: 점 D가 원위에 있으면 ∠ACB= ∠ADB 이다.(원주각의 성질)

㉡-5: 점 D가 원의 내부에 있으면,
원 위에 있을 경우와 비교하기 위해 선분 AD를 연장하여 원 위의 한 점D′를 잡고 점 D와 D′를 포함한 삼각형을 만든다.



[그림23]

점 D가 원의 외부에 있으면,
원 위에 있을 경우와 비교하기 위해
선분 AD와 원이 만나는 점D′를 잡고 D와 D′를 포함한 △DD′B를 만든다.



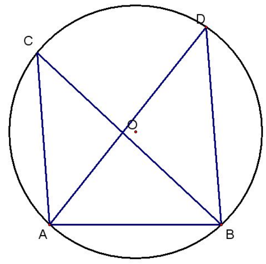
[그림24]

㉡-6: 여기서 ∠ADB의 크기와 원위의 점에 대한 ∠AD′B의 크기를 비교 원 위에 있을 조건이 ∠ACB=∠ADB뿐임을 보이면 된다.

ㄷ <u>가정에서 결론이 성립하기 위한 조건과 관련된 사항(정의, 성질 등)을 생각해 낸다.</u>

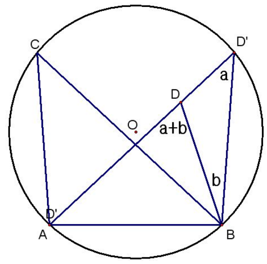
ㄷ-1: 네 점이 원위에 있을 조건은 ∠ACB=∠ADB뿐인가?

ㄷ-2: 세 점A, B, C를 지나는 원에 대해 점D는 활꼴 ACB의 내부, 호 ACB 위, 활꼴 ACB의 외부에 있는 경우로 나누고, 이때 원 위의 점D′를 잡는다. '삼각형의 외각의 크기는 이와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.'는 삼각형의 외각의 성질에 의해,

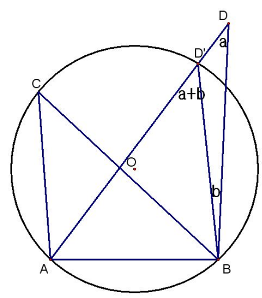


[그림25]

[그림26]의 활꼴 ACB의 내부의 점 D에 대해 ∠AD′B < ∠ADB 이고,
[그림27]의 활꼴 ACB의 외부의 점 D에 대해 ∠AD′B > ∠ADB 이다.
또한 [그림25]의 호 ACB 위의 점 D에 대해 ∠ADB = ∠ACB 이다.
(원주각의 성질)
그러므로 원 점 D가 원 위에 있을 경우는 ∠ADB = ∠ACB뿐이다.



[그림26]



[그림27]

ㄹ <u>ㄴ과ㄷ에서 생각한 것으로 증명의 과정을 차례로 설명해 나간다.</u>

한 원 위에 세 점 A, B, C가 있고 점 D가 활꼴 ACB의 내부, 호 ACB

위, 활꼴 ACB의 외부에 있는 경우의 세 가지로 나누어 $\angle ADB$의 크기와 $\angle ACB$의 크기를 비교하여 보자.

점 D가 호 ACB 위에 있는 경우,

원주각의 성질에 의해 $\angle ADB = \angle ACB$이다.

점 D가 활꼴 ACB의 내부에 있는 경우,

점 A와 점 D를 연장한 직선과 원이 만나는 교점을 D′라 하면,

$\angle AD'B < \angle ADB$이다.

왜냐하면, $\triangle DD'B$의 외각 $\angle ADB = \angle AD'B + \angle D'BD$

그러므로, $\angle AD'B < \angle ADB$.

점 D가 활꼴 ACB의 외부에 있는 경우,

선분 AD가 원과 만나는 교점을 D′라 하면, $\angle AD'B > \angle ADB$이다.

왜냐하면, $\triangle DD'B$의 외각 $\angle AD'B = \angle ADB + \angle D'BD$

$$\angle AD'B - \angle D'BD = \angle ADB$$

그러므로, $\angle AD'B > \angle ADB$.

세 가지 경우를 모두 보았을 때 한 원위에 네 점이 모두 존재하기 위한 경우는 $\angle ADB = \angle ACB$뿐이다.

즉, 한 원위에 네 점 A, B, C, D가 존재하기 위한 조건은 선분 AB에 대해 같은 방향으로 점 C, D가 있고 $\angle ADB = \angle ACB$이다.

④ 접선과 현이 이루는 각

< 작도방법 >

ㄱ. 화면 왼쪽에 원()을 선택한 후 적당한 크기의 원을 그린다.

ㄴ. 원 위의 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC를 그린다.

㉠ 원O 선택( ) → 작도(작도(C)) → 원위의 점 선택

㉡ 세 점을 선택( ) → 작도(작도(C)) → 선분 선택

ㄷ. 원 위의 점A를 지나는 접선을 그린다.

㉠ 점 A와 원의 중심 O를 선택( ) → 작도(작도(C)) → 직선 선택

㉡ 직선과 점 A 선택( ) → 작도(작도(C)) → 수선 선택

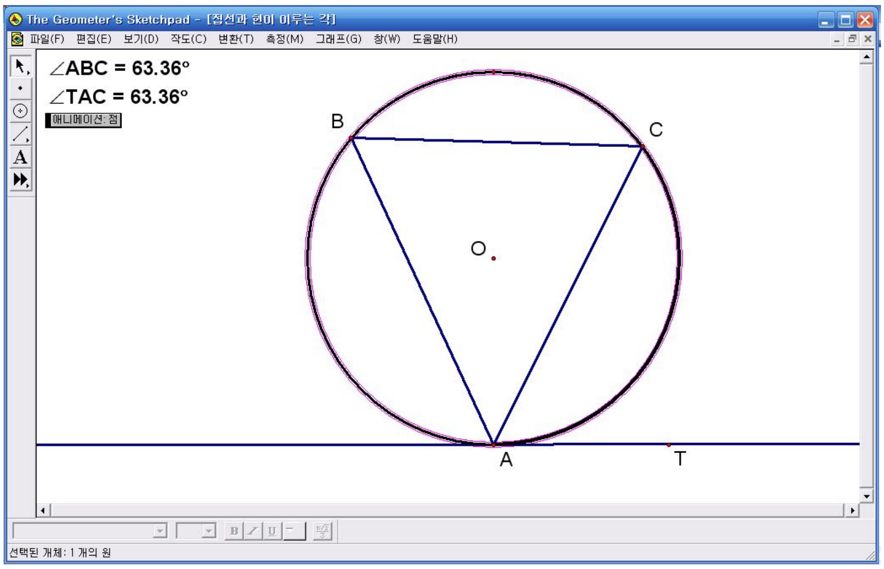
㉢ 수선 선택( ) → 작도(작도(C)) → 수선위의 점T 선택

ㄹ. 애니메이션버튼 만들기

점 C 선택( ) → 편집(편집(E)) → 동작 선택 → 애니메이션 선택 → 애니메이션의 방향과 속도를 선택

ㅁ. ∠ACB와 ∠TAB의 크기 측정하기.

점A, C, B 선택( ) → 측정(측정(M)) → 각의 크기 선택



[그림28. 접선과 현이 이루는 각]

* 위의 그림은 접선과 현이 이루는 각의 성질에 대한 그림이다.

< 접선과 현이 이루는 각의 조건에 대한 발견 >

ㄱ. 점 C를 마우스를 이용하여 자유롭게 이동시켜가면서 ∠ABC와 ∠TAB의 크기가 어떻게 변하는지 비교해 본다.

ㄴ. 애니메이션 버튼을 누른 후 ∠ACB와 ∠TAB의 크기 사이에 어떤 관계가 있는지 살펴본다.

ㄷ. 위 실험을 통해 알 수 있는 사실은 무엇인가?

< 접선과 현이 이루는 각의 조건에 대한 엄밀한 증명 >

ㄱ.일반적으로 '원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.'는 추측이 참인지 거짓인지 어떻게 확인할 수 있을까? 모든 원의 위에 있는 점에서 이루는 각의 크기가 서로 같은지 측정해보아야 하는가? 그러나 모든 원과 현을 다 그려 보고 측정하는 것은 불가능하다.

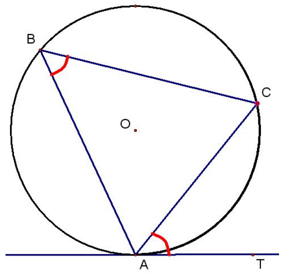
ㄴ. 일반적으로 항상 성립하는 사실을 이용하여 '원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.'는 성질을 증명해 보자.

㉠ <u>주어진 명제를 가정과 결론으로 나눈다.</u>

가정: 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각이 있다.

결론: 접선과 현이 이루는 각은 이 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각이 같다.

즉, ∠ACB= ∠TAB 이다.



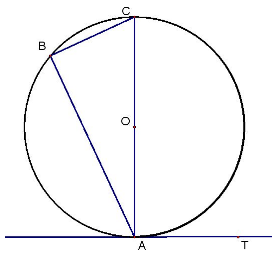
[그림29]

㉡ <u>결론이 성립하기 위한 조건을 찾아낸다.</u>

㉡-1: 접선과 현이 이루는 각은 이 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각이 같다.

즉, ∠ACB= ∠TAB 은 어떻게 이끌어 낼 수 있을까?

㉡-2: 원O 위에 세 점A, B, C가 있을 때, 접선 AT와 현 AC가 이루는 각 ∠TAC의 크기를 직각, 예각, 둔각인 세 경우로 나눌 수 있다.

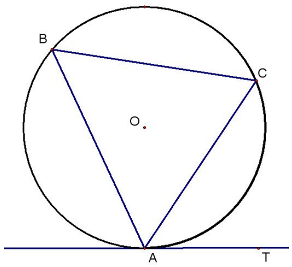


[그림30]

㉡-3: 각각의 경우에 대하여 원주각을 이용하자.

㉡-4: 접선 AT와 각이 90°로 만나는 현AC는 지름, ∠ABC =90°(지름에 대한 원주각)

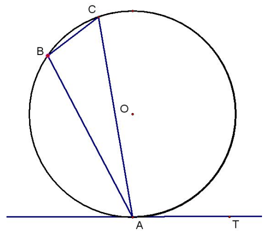
㉡-5: 접선 AT와 현 AC가 이루는 각이 예각이면, A를 지나는 지름을 그어 원과 만나는 점을 P라 하고, △APC를 만든다. 접선 AT와 현 AC가 이루는 각이 둔각이면, A를 지나는 지름을 그어



[그림31]

원과 만나는 점을 P라 하고, △APB를 만든다.

㉡-6: 여기서 지름을 지나는 원주각은 90°임을 이용하여 ∠ABC=∠TAC 임을 보이면 된다.

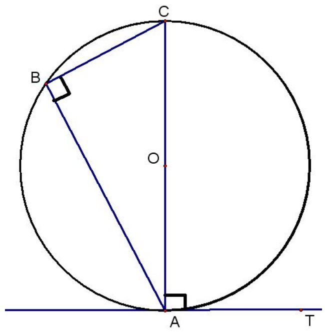


[그림32]

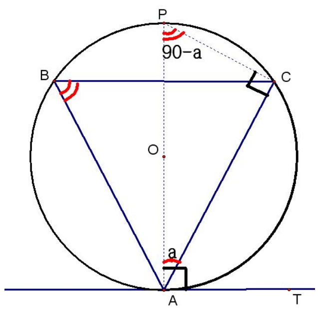
㉢ <u>가정에서 결론이 성립하기 위한 조건과 관련된 사항(정의, 성질 등)을 생각해 낸다.</u>

㉢-1: 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각과 이 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각 즉, ∠ABC=∠TAC이 인가?

㉢-2: 원O 위에 세 점A, B, C가 있을 때, 접선 AT와 현 AC가 이루는 각 ∠TAC의 크기를 직각, 예각, 둔각인 세 경우로 나누고, 이때 예각과 둔각인 경우 점A를 지나는 지름과 원이 만나는 점P를 잡는다. '원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.'는 원주각의 성질에 의해, [그림33]은 접선과 지름은 수직으로 만나고, 지름의 원주각은 90° 이므로, ∠ABC=∠TAC이다. [그림34]는 접선과 현이 이루는 각이 예각인 경우로 ∠TAP= 90° 이고, ∠TAC=∠TAP-∠CAP= 90° -∠CAP이다. ∠ACP는 지름 AP를 현으로 하는 원주각이므로, ∠ACP= 90°이다.



[그림33]



[그림34]

따라서, $\triangle ACP$에서 $\angle APC = 90^\circ - \angle CAP$

이므로, $\angle TAC = \angle APC = \angle ABC$ 이다.

(원주각의 성질)

[그림35]는 접선과 현이 이루는 각이 둔각인 경우로의 $\angle TAP = 90^\circ$ 이고, $\angle TAC = \angle TAP + \angle CAP = 90^\circ + \angle CAP$이다. $\angle ABP$는 지름 AP를 현으로 하는 원주각이므로 $\angle ABP = 90^\circ$이다.

따라서, $\triangle ABC$에서

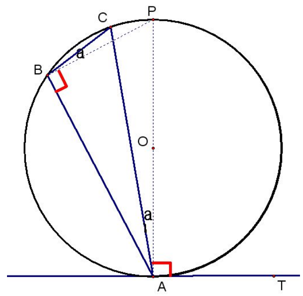
$\angle ABC = \angle ABP + \angle CBP = 90^\circ + \angle CBP$이다.

$\angle TAC = 90^\circ + \angle CAP = 90^\circ + \angle CBP$

$= \angle ABC$

($\angle CAP = \angle CAP$: 원주각의 성질)

그러므로 $\angle ABC = \angle TAC$.



[그림35]

㉣ <u>㉡과㉢에서 생각한 것으로 증명의 과정을 차례로 설명해 나간다.</u>

원O 위에 세 점A, B, C가 있을 때, 접선 AT와 현 AC가 이루는 각 $\angle TAC$의 크기를 직각, 예각, 둔각인 세 경우로 나누어 $\angle ABC$와 $\angle TAC$의 크기를 비교하여 보자.

현AC가 접선과 수직으로 만나면, 원주각의 성질에 의해 $\angle ABC = \angle TAC = 90^\circ$

현AC가 접선과 이루는 각의 크기가 예각인 경우,

점A를 지나는 지름과 원이 만나는 점P라 하면, $\angle ABC = \angle TAC$이다.

왜냐하면, $\angle TAP = 90^\circ$ 이고,

$\angle TAC = \angle TAP - \angle CAP = 90^\circ - \angle CAP$이다.

$\angle ACP$는 지름 AP를 현으로 하는 원주각이므로,

$\angle ACP = 90^\circ$ 이다. 따라서, $\triangle ACP$에서 $\angle APC = 90^\circ - \angle CAP$ 이므로, 원주각의 성질에 의해 $\angle TAC = \angle APC = \angle ABC$ 이다.

현AC가 접선과 이루는 각의 크기가 둔각인 경우,

점A를 지나는 지름과 원이 만나는 점P라 하면, $\angle ABC = \angle TAC$이다.

왜냐하면, $\angle TAP = 90^\circ$ 이고,

$\angle TAC = \angle TAP + \angle CAP = 90^\circ + \angle CAP$이다.

$\angle ABP$는 지름 AP를 현으로 하는 원주각이므로 $\angle ABP = 90^\circ$ 이다. 따라서, $\triangle ABC$에서 $\angle ABC = \angle ABP + \angle CBP = 90^\circ + \angle CBP$이므로, 원주각의 성질에 의해 $\angle CAP = \angle CAP$이고,

$\angle TAC = 90^\circ + \angle CAP = 90^\circ + \angle CBP = \angle ABC$

그러므로, $\angle ABC = \angle TAC$.

세 가지 경우를 모두 보았을 때 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉, $\angle ABC = \angle TAC$이다.

3) GSP를 이용한 원과 비례

① 원에서의 비례관계

< 작도방법 >

ㄱ. 화면 왼쪽에 원()을 선택한 후 적당한 크기의 원을 그린다.

ㄴ. 원 위에 세 점 A, B, C, D 를 선택한다.

원 선택(↖) → 작도(작도(C)) → 원 위의 점

ㄷ. 선분 AB, 선분 CD를 긋는다.

점 A와 점B 선택(↖) → 작도(작도(C)) → 선분 선택

ㄹ. 교점을 표시한다.

선분 AB, 선분 CD 선택(↖) → 작도(작도(C)) → 교점(P)선택

ㅁ. 애니메이션버튼 만들기

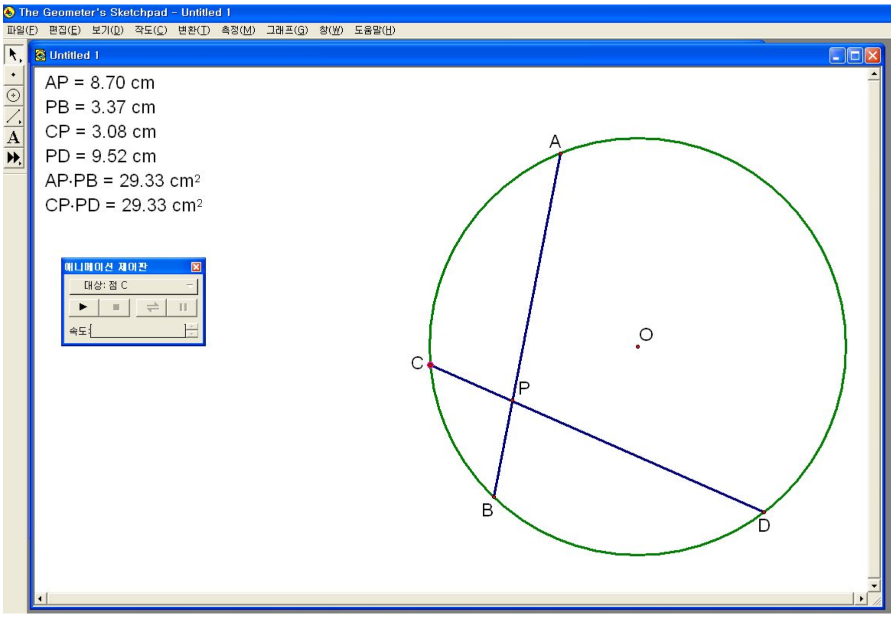
점A와 원을 선택(↖) → 보기(보기(D)) → 점에 애니메이션 주기 선택

(원하는 점을 선택(↖)하면 그 점에 대한 애니메이션이 일어난다.)

ㅂ. $\overline{AP}\times\overline{PB}$ 와 $\overline{CP}\times\overline{PD}$ 의 값 표시하기

점A, P(↖) → 측정(측정(M)) → 거리 선택(나머지 선분도 같은 방법)

측정한 거리 선택 (↖) → 측정(측정(M)) → 계산 선택 →$\overline{AP}\times\overline{PB}$ 식 입력



[그림36. 원에서의 비례관계]

* 위의 그림은 원의 현의 교점에서의 비례관계를 나타내는 그림이다.

< 원에서의 비례관계에 대한 성질의 발견 >

ㄱ. 점C를 마우스를 이용하여 자유롭게 이동시켜가면서 $\overline{AP} \times \overline{PB}$ 와 $\overline{CP} \times \overline{PD}$ 의 값이 어떻게 변하는지 비교해 본다.

ㄴ. 애니메이션 버튼을 누른 후 $\overline{AP} \times \overline{PB}$ 와 $\overline{CP} \times \overline{PD}$ 의 값 사이에 어떤 관계가 있는지 살펴본다.

ㄷ. 위 실험을 통해 알 수 있는 사실은 무엇인가?

< 원에서의 비례관계에 대한 성질의 엄밀한 증명 >

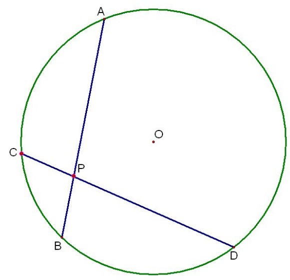
ㄱ. 일반적으로 '한 원에서 두 현 AB,CD이 만나는 점을 P라고 하면 $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{CP} \times \overline{PD}$ 이다.'는 추측이 참인지 거짓인지 어떻게 확인할 수 있을까? 모든 원의 $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{CP} \times \overline{PD}$ 가 성립하는지 측정해보아야 하는가? 그러나 모든 원과 현을 다 그려 보고 측정하는 것은 불가능하다.

ㄴ. 일반적으로 항상 성립하는 사실을 이용하여 '한 원에서 두 현 AB, CD이 만나는 점을 P라고 하면 $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{CP} \times \overline{PD}$ 이다.'는 성질을 증명해 보자.

㉠ <u>주어진 명제를 가정과 결론으로 나눈다.</u>

가정: 한원에서 두 현 AB, CD가 만나는 점이 P이다.

결론: $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{CP} \times \overline{PD}$ 이다.



[그림29]

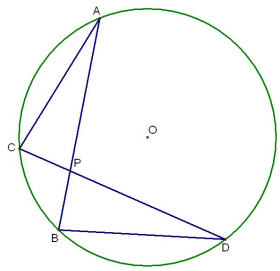
㉡ <u>결론이 성립하기 위한 조건을 찾아낸다.</u>

㉡-1: $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{CP} \times \overline{PD}$ 임을 어떻게 이끌어낼 수 있을까?

㉡-2: 삼각형의 닮음을 이용하자

㉡-3: 선분AP과 선분 PB가 선분 CP와 선분 PD를 포함하는 두 삼각형을 만들어 보자.

㉡-4: 선분AC, 선분BD를 그어 두 △PAC과 △PDB를 만들자.



[그림30]

㉡-5: 여기서 삼각형 △PAC과 △PDB이 닮음이면 닮음비 $\overline{AP} : \overline{DP} = \overline{PC} : \overline{PB}$가성립하여,

$\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{CP} \times \overline{PD}$ 이다.

㉢ <u>가정에서 결론이 성립하기 위한 조건과 관련된 사항(정의, 성질 등)을 생각해 낸다.</u>

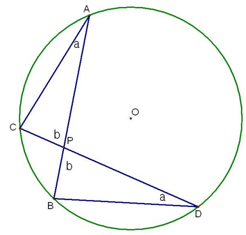
㉢-1: △PAC과 △PDB가 닮음인가?

㉢-2: ∠APC=∠DPB (맞꼭지각의 성질)

∠CAB=∠BDC (원주각의 성질)

‘한 원에서 두 현 AB, CD이 만나는 점을 P라고 하면 $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{CP} \times \overline{PD}$ 이다.’

(AA 닮음조건)에 의해 △PAC과 △PDB가 닮음이다.



[그림31]

㉣ <u>㉡과㉢에서 생각한 것으로 증명의 과정을 차례로 설명해 나간다.</u>

원의 현에 대한 교점을 점P라 하면,

△PAC∽△PDB이다.

왜냐하면 ∠APC=∠DPB (맞꼭지각의 성질)

∠CAB=∠BDC (원주각의 성질)

그러므로, △PAC∽△PDB이고, 닮음비 $\overline{AP} : \overline{DP} = \overline{PC} : \overline{PB}$가 성립하여 $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{CP} \times \overline{PD}$ 이다.

Ⅳ. 결론

본 논문은 문제해결력과 더불어 제반 고등 사고 능력을 함께 포함하는 수학적 힘의 신장을 수학과 목표로 하고 이를 개발하기위한 가장 중요한 역할을 하는 것이 바로 증명이라고 보았다. 학교 수학에서의 증명은 연역적 추론 능력을 개발하고, 수학적 이해를 증진시킴으로써, 수학적으로 사고하는 힘을 육성하는 데 많은 도움을 준다(나귀수, 1998). 그러나 실제 기하교육은 실생활과 밀접한 관계를 유지하며 발전되어 왔으면서도 학생들이 가장 어렵게 느끼고 흥미를 잃는 부분이다. 이는 증명 교육이 교사가 해당 명제의 증명을 학생들에게 설명하면, 학생들은 이 증명을 모방하는데 그치는 단순히 암기하는 증명 수업을 하기 때문이다. 본 논문은 이러한 증명 수업을 학생들이 효율적으로 학습하기 위한 개선 방안으로 본격적인 증명 이전에 풍부한 구체적 활동과 역동적인 수학적 사고 활동으로서의 증명지도와, 재발견의 경험, 실행 수학과 증명에 대한 사회적 관점을 완화시켜 증명을 경험할 수 있는 소그룹 활동을 제공하는 것을 제안하였다.

특히 증명을 본격적으로 지도하기 전에 제공하는 풍부한 구체적 활동으로 GSP를 이용하여 도형의 성질에 대한 학습 자료를 연구해 보고 이를 단순한 직관적 관찰에서 멈추는 것이 아니라 도형의 성질을 발견하고 이를 엄밀한 증명까지 연결할 수 있는 수업자료를 연구해 보았다.

마지막으로 본 연구에서 연구한 교육 자료를 가지고 직접 적용해 볼 기회를 가지지 못해 현장 교육에 적용했을 때의 좋은 점과 미비한 점 등은 기술하지 못하였으나, 후속 연구를 통해 실제 교육현장에 적용, 수정 및 보완을 하고자 한다.

참고 문헌

강옥기 외2인, 중학교 수학 7-나,8-나, 9-나 지도서, (주)두산

고은경(2008), *분석•종합법을 이용한 기하 증명 지도에 대한 연구-<9-나 단계 중심으로>*, 부경대학교 교육대학원 석사학위논문

교육과학기술부, 수학과 중학교 교육과정 해설, 교육인적자원부 고시 제 2006-75호

김남희 외5인(2006), 수학교육과정과 교재연구, 경문사,

김순자 외2인(2003), GSP를 이용한 기하탐구-원을 중심으로-, 경문사

김향숙 외6인(2005), 창의적 수학을 위한 GSP활용, 경문사

김향숙 외8인(2006), GSP를 이용한 기하의 이해, 경문사

나귀수(1998), *증명의 본질과 지도 실제의 분석-중학교기하단원을 중심으로-,* 서울대학교대학원 교육학 박사학위논문

나귀수(2002), *공학적 도구를 활용한 증명 교수•학습 방법 개선 연구*, 한국교육과정 평가원 KICE 연구 초록집, p133~156.

류희영(2006), *탐구형 기하 소프트웨어 환경에서 피드백을 활용한 증명학습에 관한 사례연구*, 한국교원대학교 석사학위 논문.

수학사랑(1999), 예제로 배우는 한글 GSP, 수학사랑

이영하 외3인, 중학교 수학 9-나, (주)교문사

임혜경(2005), 초중등교사를 위한 GSP 활용, 수학사랑

정윤미(2007), *중학교 3학년 학생들의 기하학적 정리와 증명에 대한 인식*, 한국교원대학교 석사학위 논문.

조완영(2000), *탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구*, 한국교원대학교 박사학위 논문.

ABSTRACT

A Study on Teaching Methods of effective learning in Geometry by Using The Geometer's Sketchpad for the Third Grade students in Middle School in the part of "properties of Circle".

Park, Guenae
Major in Mathematics Education
The Graduate School of Education
Sungshin Women's University
Supervised by Shim, Seong-A Ph.D

The aim of this study is developing meaningful teaching method by using Dynamic Geometry Software in the desirable geometrical proof learning focusing on teaching in activity way instead of one-side, passive way of teacher-oriented method. The material were designed to connect instinctive observation, understanding and finding the properties of a plane figure to deductive proofs.

Developed teaching aids which can help to achieve this goal are follows.

1. Material for teaching the unit of "Circle" that students have difficulty on studying especially by using GSP.

2. Not only instinctive observations but also finding of a plane figures by the Questions which help students to find it by themselves.

3. To add deductive proofs by using instinctive observation, understanding and finding the character of a plane figure to levels.

This study is expected to help developing students' motivation and interests in the practical teaching by using developed material in this study. However, it was not chance to run materials in practical instructions. Therefore, there are not descriptions of its strengths and weaknesses, it will be applied in practical instruction, amended and complemented by following studies.