印 昞 植 教授指導

碩士學位 請求論文

Freudenthal의 이론을 적용한 학습자료 개발

-중학교 대수영역 중 '문자와 식'을 중심으로-

2004

誠信女子大學校 敎育大學院

敎育學科 數學敎育專攻

孫 受 延

Freudenthal의 이론을 적용한 학습자료 개발

-중학교 대수영역 중 '문자와 식'을 중심으로-

印 昞 植　教授指導

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

2004年 5月

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

孫 受 延

認 准 書

孫 受 延의 碩士學位 論文을 認准함

審査委員 ____________________ 印

審査委員 ____________________ 印

審査委員 ____________________ 印

2004年 6月

誠信女子大學校 教育大學院

논 문 요 약

Freudenthal의 이론을 적용한 학습자료 개발

- 중학교 대수영역 중 '문자와 식'을 중심으로 -

이 연구의 목적은 Freudenthal의 이론을 적용해서 중학교 대수영역 중 '문자와 식'의 학습자료를 개발하는 것이다. 이를 통해 현행 문자지도의 문제점을 수정・보완하고 선생님들에게는 좀 더 바람직한 방향으로의 교수 방법을 구현하여 수학 수업에 도움을 주고자 한다.

개발한 학습자료에서는 학습자가 실생활의 여러 활동을 경험하고 풍부한 맥락 문제를 통해 문자에 대한 심상을 갖게 된 후 문자를 도입한다. 이런 과정은 학습자에게 갑작스러운 문자의 도입으로 인한 인지적 혼란을 해소할 수 있을 것이다. 또한 본질과 현상의 교대작용을 통한 점진적인 형식화로 대수적 사고력을 길러 줄 것이다.

네덜란드의 현실적 수학교육(RME)에서 Freudenthal의 수학화 이론의 적용 가능성을 입증할 수 있었다. 그리고 Gravemeijer의 연구에서도 현실적인 교과서의 접근이 학습자에게 수학의 기본 개념을 이해시키고 응용능력을 길러 주는데 상당히 효과적이라는 결과가 이를 뒷받침해 준다[11].

본 연구에서는 Freudenthal의 수학화 이론과 RME이론을 근거로 학습자료를 개발하였다. 그리고 제 7차 교육과정을 분석하여 문자지도의 방향과 목적을 설정하였다. 또한 개발한 학습 자료에 대한 교사와 예비교사의 호응도를 분석하여 학습 자료를 수정・보완하였다.

목 차

논 문 개 요

Ⅰ. 서 론 1

1. 연구의 필요성 1

2. 연구 방법 및 절차 3

Ⅱ. 문헌 검토 4

1. Freudenthal의 수학화 4

1) 수학화의 의미와 Freudenthal의 수학관 4

2) 수학화 활동 6

3) 수학화 학습 이론 7

4) 수학화 활동을 통한 대수개념 지도 12

2. 네덜란드의 현실주의 수학교육 15

(RME : Realistic Mathematic Education)

1) RME의 기원 15

2) RME의 학습지도원리 16

3. RME 학습과정 모형 21

Ⅲ. Freudenthal의 수학화를 통한 대수영역의 분석

- '문자와 식'을 중심으로 - 26

1. 대수영역 중 '문자와 식' 분석 방법 26

2. 대수영역 중 '문자와 식' 분석 27

1) '문자와 식' 내용분석 27

2) '문자와 식' 교육과정 30

Ⅳ. Freudenthal의 수학화 과정을 도입한 대수영역 학습자료 개발 - ‘문자와 식’을 중심으로 - ········ 34
1. 대수영역의 구성과 학습자료 ········ 34
1) 대수영역의 구성 방향 ········ 34
2) 학습자료의 개발 방향 및 목표 ········ 36
3) 학습자료의 구성 체계 ········ 37
2. 대수영역의 학습자료 개발 ········ 38
1) 개발한 학습자료의 특징 ········ 38
2) 개발한 학습자료 ········ 40
3. 학습자료에 대한 호응도 분석 ········ 44
1) 검사도구의 제작 ········ 44
2) 자료의 분석 ········ 45

Ⅴ. 결론 및 제언 ········ 50

참고문헌
ABSTRACT

<부록1> 개발한 학습자료
<부록2> 호응도 조사 설문지

표 목 차

[그림Ⅱ-1] de Lange의 학습과정모형 ······ 22

[그림Ⅱ-2] 수업에서의 수학화 과정 ······ 23

[그림Ⅱ-3] 형식적 수학의 응용 ······ 23

[그림Ⅱ-4] 현실적 해결 ······ 24

[그림Ⅱ-5] 재발명 ······ 25

[표Ⅲ-1] 제7차 중학교 교육과정의 '문자와 식' 영역의 목표 ······ 30

[표Ⅲ-2] 제7차 중학교 교육과정의 '문자와 식' 영역의 내용 ······ 31

[표Ⅳ-1] 대수적 사고의 발달과정에서 본 문자개념 ······ 35

[표Ⅳ-2] 단원별 학습자료의 특징 ······ 39

[표Ⅳ-3] 점진적인 수학화 도입 과정 ······ 39

[표Ⅳ-4] 개발한 학습자료의 효율성 ······ 45

[표Ⅳ-5] 개발한 학습자료가 효율적인 이유 ······ 46

[표Ⅳ-6] 학습자료의 활용 여부 ······ 47

[표Ⅳ-7] 개발한 학습자료의 개선점과 수정·보완 방향 ······ 47

[표Ⅳ-8] 개발한 학습자료의 효율성 ······ 48

[표Ⅳ-9] 개발한 학습자료의 효율적인 이유 ······ 48

[표Ⅳ-10] 학습자료의 활용 여부 ······ 49

[표Ⅳ-11] 개발한 학습자료의 개선점과 수정·보완 방향 ······ 49

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성

수학교육과 관련된 사람들 뿐 만 아니라 대부분의 사람들은 학생들이 수학의 가치와 수학의 의미를 명확하고 긍정적으로 인식하기를 바랄 것이다. 나아가 수학을 적극적으로 활용하며 수학을 좋아하고 수학에 대한 자신감을 갖는 등 긍정적인 수학적 신념을 형성하기를 바랄 것이다. 또한 실생활에서 부딪히는 여러 문제를 합리적으로 해결하는데 수학능력이 매우 중요하다는 것도 잘 알 것이다. 수학은 과학발달의 원동력이며 수학의 이해 없이는 물리, 화학, 공학 등 이공계 학문은 물론이고 경제학, 사회학 등 인문계 학문까지도 깊이 이해하기가 어렵다. 이와 같이 수학은 인간의 사고력을 기르는데 가장 적합한 학문 중의 하나이다.

그러나 수학을 배우는 것은 쉽지 않다. 현행 수학교육 문제점 중 하나는 수학의 중요성을 인정하는 학생들조차도 수학을 어려워하고, 골칫거리로 생각한다는 것이다. 수학적 재능이 있는 소수의 학생들을 제외하고는 수학을 매우 하기 싫어한다는 것이다. 여기에는 많은 이유가 있지만 대표적으로 ‘수학적인 힘’을 기르기보다 공식을 암기하여 문제를 기계적으로 푸는 데에만 지나치게 치중한다는 점을 들 수 있다. 이항을 하면 부호가 바뀐다는 사실은 알지만 등식의 성질을 이해하지 못하는 학생들이 많고 이차 방정식에서 근의 공식을 이용하여 해를 구하지만 공식이 유도되는 과정은 이해하지 못하는 학생이 의외로 많다. 이는 학

생들에게 수학적으로 사고할 기회를 만들어 주기보다 교사의 설명과 학생들의 연습에 의해 기계적으로 암기하는 수업을 제공하기 때문이라고 생각한다.

수학 수업의 주체는 학생이며 학생들의 탐구활동과 재발명에 의해 수학적 지식이 구성되는 것이라면 수학을 가르치는 방법은 달라져야 한다. 이러한 '수학적인 힘'을 개발하는 방법으로 Freudenthal의 수학화를 도입해 보고자 한다. 그리고 대수영역의 학습은 학습자의 '수학적 힘'을 증대할 수 있는 영역이므로 Freudenthal의 수학화 이론을 중학교 대수영역에 접목시켜 좀 더 나은 수학교육 방법을 모색해 보려고 한다.

이 연구는 학생들에게는 대수의 필요성과 유용성을 인식시켜 흥미를 유발하고 '수학적 힘'의 신장과 대수적 사고력을 발달시켜 현실세계의 상황을 설명하고 조직할 능력을 기르는 기회와 다양한 표현의 기회를 제공할 학습자료를 개발하는 것이다. 그리고 이를 활용하여 교수 학습 현장에서 학생들을 효율적으로 지도하는데 도움을 주고자 한다.

Freudenthal의 이론을 활용한 네덜란드의 현실적인 수학교육(RME)에서 보면 현실적인 교과서의 접근방법이 기존의 교과서의 접근 방법보다 학습자에게 수학의 기본 개념을 이해시키고 응용 능력을 길러 주는데 상당히 효과적이라는 결과가 보고되었다고 한다[11].

그러므로 본 연구에서 개발한 학습자료는 현행 대수 지도(특히, 문자지도)의 문제점을 극복하기 위한 교수학적 시사점을 제공해 줄 수 있다고 본다.

2. 연구 방법 및 절차

1) 문헌 연구

(1) Freudenthal의 수학화 이론을 살펴본다.

(2) Freudenthal의 이론을 구체화시킨 네덜란드의 현실적 수학교육 (RME)에 대해 살펴본다.

2) 자료 개발

본 연구에서는 제7차 교육과정의 중학교 대수영역 중 '문자와 식'을 중심으로 살펴보겠다. 이런 과정을 통하여 현행 '문자와 식'의 문제점을 살펴보고 Freudenthal의 수학화 과정을 도입한 학습자료를 개발하기 위해 다음과 같은 절차를 밟는다.

(1) 제7차 교육과정의 중학교 대수영역 중 '문자와 식'의 내용 및 교육과정을 분석한다.

(2) 현 교육과정의 목표수준을 고려하여 개발하려는 학습자료의 학습목표와 구성 체계를 설정한다.

(3) 설정된 목표와 구성 체계에 맞는 학습자료의 초안을 개발한다.

(4) 교사와 예비교사를 대상으로 개발한 학습자료에 대한 호응도를 조사한다.

(5) 개발한 학습자료를 수정・보완한다.

Ⅱ.문헌 연구

1. Freudenthal의 수학화

본 장에서는 Freudenthal의 수학화 이론을 통해 학습자료 개발에 대한 이론적 토대를 마련하고자 한다. 그리고 Freudenthal의 수학화 과정을 도입하여 대수영역 중 '문자와 식'의 학습자료 개발 구성 체계에 대한 시사점을 얻고자 한다.

1) 수학화의 의미와 Freudenthal의 수학관

'학문의 구조를 가르치자'라는 현대화 운동 이후 수학을 객관적 세계와 학생으로부터 분리된 것으로 제시하는 데 반대하는 주장이 나오고 있다. 이는 수학을 학습하는 최선의 방법은 학생들의 활동에 의한 것임을 강조하면서 개념이 형성되는 과정을 학생들 스스로 경험할 수 있도록 해야 한다는 것이다. 즉 인간의 본성에 부합되는 자유로운 창조활동을 추구하는 수학의 중요성이 강조된 것이다. 이러한 주장은 인간이 사회적 존재라는 인간관을 바탕으로 수학적 사고와 반성의 역할이 중요하다는 것을 부각한 것이다. 이와 함께 수학을 대중에게 가르치고 수학을 통해 인간화 교육에 공헌하는데 더 많은 관심이 모아졌다. 다시 말해서 수학 자체를 위한 수학교육이 아니라 그것의 유용성과 응용을 중시하고 다른 분야와의 연결성을 강조하는 수학교육을 지향하였다. 이를 대표하

는 학자가 Freudenthal이다.

수학을 인간의 활동으로 보는 Freudenthal에게 있어 수학적 활동의 핵심은 수학화(mathematising)이다. 그가 말하는 수학화란 수학의 내적·외적 상황이나 문제 속에서 수학을 창조해 가는 과정이다. 또한 수학화란 현상을 수학적 본질인 수학적 개념, 구조, 아이디어로 조직화하고 체계화하는 것을 의미하며 현상과 본질의 교대작용에 의해 수준상승이 이루어지는 불연속적인 과정이다[10]. 즉 수학화란 현실상황을 수학적 수단에 의해 수학화 하는 것을 출발점으로 해서 수학자체의 수학화로 이어지며 처음에는 국소적으로 나중에는 전면적으로 진행되는 것이다.

다음으로는 Krygowska, Steiner, Wittmam, Wheeler 등의 수학화에 대해 살펴보겠다. Krygowska는 수학화의 과정을 현실에 대한 이상적인 도식화 과정으로 기술하고 이를 수업에 도입하려 했다[12]. Steiner가 보는 수학화의 과정은 학생들이 실제 상황에서 시작해서 친숙해지고 정보를 수집하고 분석하며 정의에 대한 여러 가지 제안을 고려하고 주어진 상황과 문제에 맞는 수학적 모델을 구성하고 정교화 하는 것이다[13]. Wittmam은 수학화란 현실을 조작하여 수학을 조직하는 것으로 보고 수학화를 도입한 수업은 문제의 문맥으로부터 출발해서 하나의 주제를 다루면서 수업의 여러 단계에서 서로 다른 유형의 문제 내지는 과제 삽입을 통해 수학적 개념이 추상화되고 응용된다고 보았다. Wheeler는 사회의 급속한 발전으로 인해 사람들이 더욱 비인간화되어 가는 현실을 반성하며 수학을 인간화하는 수학화 활동을 중시했다[16].

위의 학자들은 수학화의 의미에 다소 차이를 갖고 있다. 그러나 수학화를 수업에 도입하기 위해서는 풍부한 문맥의 구성을 통해서 수학을 학습하고 수학에 대한 진정한 이해와 현상을 수학적 안목으로 볼 수 있

는 능력을 길러야 한다고 주장하고 있다.

Freudenthal에 의하면 수학이란 확실성을 추구해 가는 정신적 활동이다. 이러한 확실성은 정신적 활동에 대한 계속적인 탐구와 반성에 의해서 추구되어 온 것이다. 즉 수학은 이미 완성된 지식이 아니라 현실에서 출발하며 여러 수준을 거쳐 추상적이고 형식적인 수학으로 계속해서 성장해 가는 것이다. 수학은 현실의 모델이며 아이디어에 대한 심상이 형성되고 어떤 계기로 인해 의식화되며 반성적 사고를 통해 수학적 개념이 탄생한다는 것이다[10]. Freudenthal의 수학 인식론은 수학의 플라톤적 실체를 인정하지는 않지만 수학의 객관적 타당성을 인정한다는 점에서 전통적인 절대주의 관점을 수용하고 있다. 그리고 인간의 오류 자체를 인정하고 수학이 인간의 활동에 의해 계속 발달한다고 주장하는 점과 역사적·언어적 측면을 중시한다는 점에서 후기 현대철학의 입장도 포함하는 절충적인 관점이라고 볼 수 있다.

이와 같이 Freudenthal은 수학에 대해 현실을 출발점으로 내용과 형식의 교대작용에 의해 조직화·구조화되고 확실성을 추구하는 인간의 정신적 활동이라는 점을 강조하고 있다. 결국 학생들은 수학화 경험을 통해 자신에게 의미가 있는 수학을 구성하고 수학에 대한 진정한 이해와 수학적 신념을 형성해야 한다.

2) 수학화의 활동

수학화 과정을 현실에서 출발해 수학 자체의 수학화에 이르는 과정으로 볼 때 수학화 과정에서 이루어지는 조직화 활동은 매우 다양하다. 수학화 과정에서 나타나는 수학화 활동에는 형식화, 국소적 조직화, 공리화, 관찰, 실험, 귀납, 유추, 시행착오, 추측, 일반화, 도식화, 추상화,

기호화, 정의, 알고리즘화, 패턴화, 구조화, 추론, 분석, 증명, 반성적 사고, 관점의 전환, 재구조화, 구체화, 모델링 등이 모두 여기에 포함된다[5]. 이런 수학화 활동을 경험하게 하는 근본 의도는 수학의 유용성을 체험케 하고자 하는 것이다.

수학화는 관찰, 실험, 귀납, 유추를 통하여 현실을 수학적 수단으로 조직하는 수평적 수학화로 시작한다. 그리고 수학적 경험이 축적되면 수학 자체의 수학화 곧 수직적 수학화가 시작된다. 이것은 처음에는 국소적으로 시작되다가 점차 형식적 이론 체계의 구성으로 확장되어 전면적인 수학화가 시도된다[13]. 수평적 수학화가 문맥문제를 수학적 용어로 기술하는 과정이나 수학적 수단으로 문제를 풀 수 있는가와 관련된 반면 수직적 수학화는 자신의 수학적 활동을 수학화하는 것과 관련된다. 즉 수직적 수학화는 자신의 수학적 활동을 수학화하는 것으로 수직적 수학화를 통해서 학생들은 더 높은 수준의 수학에 이르게 된다[11].

Freudenthal에게서 수학화란 일상생활에서의 제재를 수학화하는 것과 수학적인 제재를 수학화하는 것을 모두 포함했다. 그는 두 활동사이에 근본적인 차이가 있지 않다고 보고 교육이 일상생활의 제재로부터 시작될 수 있다고 보았다[10]. 이런 수학화 활동을 학생들에게 경험시키고자 하는 의도는 학생들에게 의미가 없는 형식적 수학을 처음부터 제시하는 것이 아니라 학생들로 하여금 수학적 내용을 재발명하게 함으로써 수학적 내용의 필요성을 인식하게 하는데 있다.

3) Freudenthal의 수학화 학습 이론

Freudenthal에 따르면 수학적 사고활동의 본질은 수학화이며 수학 학습 지도는 기성수학을 가르치는 것이 아니라 수학자들이 수학을 발명

하는 과정을 학습자가 재발명하는 것이라고 보았다. 그리고 풍부한 현실 상황과 문맥에서 수평적 수학화를 조직해야 하며 그것이 수직적 수학화를 위한 도구로 제공되어야 한다고 했다[10].

다음은 그의 수학화 학습이론에 대해서 살펴 본 것이다.

(1) 안내된 재발명 원리

Freudenthal은 활동을 배우는 최선의 방법은 그것을 직접 수행해 보는 것이라고 하였다. 학습 과정에서 교사의 안내 하에 학생들의 감정이 이입될 수 있는 상황에서 수학화 활동을 하고 이를 통해 수학적 내용을 재발명해 나가는 과정이 필수적이라고 보았다[10]. 즉 수학이 발달해온 과정을 학습자가 스스로 재발명하며 그 권리를 가질 필요가 있다고 하였다. 그는 수학적 개념, 구조, 아이디어는 물리적, 사회적, 정신적 세계의 여러 가지 현상을 정리하고 조직하는 수단에 의해 발명된 것으로 보고 있다. 수학적인 사고는 수학화 과정을 경험시킴으로써 배울 수 있다. 이를 위해 학습자의 현실 내에서 수평적 수학화에 적절한 학습상황을 선택하고 수직적 수학화를 위한 수단과 도구를 제공하며 교사와 학생, 학생들 사이의 상호작용을 통해 지도를 하고 학습 내용이 서로 관련되도록 안내해서 지도해야 한다. 또한 Freudenthal은 재발명해야 할 것에 관해 다음과 같이 말하고 있다[10, p 49].

> 나는 활동으로서의 수학을 강조해 왔기 때문에 “어디로 안내할 것인가?”에 대한 나의 답변은 “활동으로”일 것이다. 학습자는 수학보다는 수학화를, 추상보다는 추상화, 도식보다는 도식화, 공식보다는 공식화, 알고리즘보다는 알고리즘화, 언어보다는 언어화를 재발명해야 한다.

Freudenthal은 안내된 재발명 방법을 구현하기 위해서 '사고실험'을 제안했다. 이는 다른 사람과 자신의 학습과정을 관찰하여 자신의 행동을 의식하고 반성하도록 지도하는 것이다. 이를 위해 대화와 토론을 강조하는 '사고실험'을 거치는데 Socrates의 산파법 혹은 대화법을 이용하자고 했다[6]. 그에 따르면 사고실험은 어떤 일이 일어날 것인가를 상상해서 실제로 실험을 수행한 것처럼 자신감 있게 하나의 결론을 유도하는 과정이라고 했다. 즉 학생의 입장과 반응을 사전에 고려하고 동시에 자신의 입장에서 개인 수학자의 마음에 대해 추측을 하는 것이다.

Freudenthal은 안내된 재발명의 중요성에 대해 "본질은 학습자에 의한 학습, 즉 재발명되어야 하며 어린 시절부터 재발명되는 것이 바람직하다. 일단 학습자가 기성의 도식과 알고리즘을 주입 받고 나면 너무 늦을 지도 모른다"라고 하면서 어린 시절부터 학생들이 재발명해야 한다고 주장하였다. 또한 그는 어디까지 안내해야 하는 지에 대한 교수의 영향력과 학습의 자유로움 사이의 균형을 이루는 것은 어렵고 안내는 복잡한 변수에 의해 좌우되기 때문에 일반적인 안내의 방법을 찾기 어렵다로 말하고 있다. 그러나 안내된 재발명의 원리는 중요하며 그의 목표는 수학이 발생되는 역사를 이해하여 학습자의 수학적 사고를 끌어내는 것이다[10].

(2) 심상

Freudenthal에 따르면 심상은 학습자가 현실 세계의 현상 속에서 발생되는 일종의 암묵적 직관이다[7]. 심상은 현실 세계에 존재하는 어떤 실물보다 여러 가지 현상을 다루어 봄으로써 우리의 정신에 의해 하나의 대상으로 구현되는 것이다. 이것이 반성적 사고를 통해 의식화되어

형식화될 때 개념이 형성된다고 본다. 수학적 개념을 모르더라도 개념을 나타내는 단어를 도입하고 그 의미를 내포한 현상을 다룸으로써 암묵적인 아이디어가 형성된다. 그리고 계속 탐구하는 과정을 통해서 수학적 개념, 구조, 아이디어를 형성하고 심상을 구성하며 이를 이론화할 수 있는 토대를 만들 수 있는 것이다.

(3) 교수학적 현상학

Freudenthal에 따르면 현상학은 수학과 그 응용에 관한 지식을 다루는 것이고 교수학적 현상학은 이와 더불어 수업에 관한 지식을 요구하는 것을 의미한다. 따라서 어떤 수학적 개념, 구조, 아이디어에 관한 현상학이란 수학적 수단인 본질이 창조되고 발전되어 온 현상과 관련시켜 본질을 설명하고 이러한 본질이 학생들의 학습과정에서 어떻게 획득될 수 있는지를 설명하는 것이다[4]. 그의 교수학적 현상학에 따르면 어떤 수준에서 현상이 본질로 조직되고 나면 본질은 그 다음 수준에서는 현상으로 파악되어 새로운 본질로 조직된다고 보았다. 현상, 정리수단의 본질, 더 높은 차원의 본질과 같은 계속적인 현상과 본질의 교대작용 속에서 본질을 찾아 체계화한다. 교수학적 현상학에서는 조직되어야 할 학습자 주변의 현상을 가능하면 폭 넓게 제시해 주어야 하고 수학적 개념, 구조, 아이디어를 부과하는 것이 아니라 점진적인 수학화를 경험시켜야 함을 주장한다. 이러한 수학화 경험을 위해 수업을 어떻게 진행시켜야 하는가에 많은 관심을 가졌으며 이를 위한 방법적 수단이 교수학적 현상학이다.

교수학적 현상학이 의미하는 바는 학생들에게 수학의 완성된 구조를 직접적으로 접하게 하는 것이 아니라 학생들의 인지능력에 알맞은 현상

들에 직면하도록 해서 학생들 스스로 재발명 과정을 통해 수단들을 찾아 수학적 대상에 대한 심상을 구성하게 하려는 것이다. 그는 교수와 학습의 근본적이고 최종적인 목표는 심상의 구성이라고 주장했다. 다시 말해 교수학적 현상학은 현실에서 수학의 응용 기능만을 보는 것이 아니라 현실 속에서 직관적 관념을 개발하기 위한 혹은 심상을 구성하기 위한 개념 형성의 근원을 찾는 것을 목표로 하는 것이다.

(4) 학습 수준 이론

Freudenthal에 의하면 수학은 인간의 정신적 활동이다. 그는 수학화 과정을 현상과 본질의 교대작용에 의해 수준 상승이 이루어지면서 조직화·구조화 되는 불연속 과정이라 하였다. 학생들이 수학 학습을 통해서 수학화 과정을 재발명하도록 한다는 것은 수준 상승이 가능하도록 교수학적 조치를 취해 가면서 점진적으로 안내해 가는 것을 의미한다. 그의 수준 이론은 van Hiele의 수준이론을 기초로 하고 있다[7].

우선 van Hiele의 수준이론에 대해 알아보고 이를 바탕으로 점진적인 수학화 과정에서 학습 수준 이론이 의미하는 바를 살펴보고자 한다.

van Hiele는 기하학적 사고 수준을 5수준으로 구분하였다. 제1수준은 주변 대상을 '형'이라는 인식수단을 통해 파악하는 단계로 기본적인 도형을 구성요소에 대한 명확한 고려 없이 전체적인 외관으로 판별하는 단계이다. 제2수준은 주변 대상의 정리 수단이었던 '형'이 연구의 대상이 되고 도형의 구성요소와 성질에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악하는 단계이다. 제3수준은 도형의 성질과 도형사이의 관계가 연구의 대상이 되고 명제가 정리수단이 되는 단계이다. 제4수준은 명제가 연구의 대상이 되며 형식적인 논리를 파악하는 단계이다. 제5수준은 기

하학체계가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리체계를 비교할 수 있고 Hilbert류 기하의 형식적 엄밀성을 파악할 수 있는 단계이다.

van Hiele에 따르면 높은 수준에서의 진정한 학습은 낮은 수준의 학습과정이 충족되지 않는 한 가능하지 않다고 한다. 또한 낮은 수준에서의 행동은 높은 수준의 사고과업이기 때문에 낮은 수준이 높은 수준의 기초가 되는 것이다.

Freudenthal은 van Hiele의 제1수준에 해당하는 초기 수준인 바닥수준으로부터 점진적으로 수평적 수학화와 수직적 수학화 활동을 해야 함을 주장하면서 바닥수준에서의 활동을 탐구수준에서 수학을 배울 수 있는 예비 수학적 활동(pre-mathematical)으로 간주해야 한다고 보고 있다[7]. 따라서 학생의 학습과정은 바닥 수준의 활동이 탐구 수준에서 반성됨으로써 비로소 시작되는 것이다. 이것은 아주 필수적인 것이며, 이것이 학생의 현실적 경험을 수학화하는 것이고 이런 바닥 수준에서의 수학화 활동이 계속적인 수준의 상승에 의해 세련된 수학으로 발달하는 것이다. 그가 제시하는 수준이론은 거시적 수준으로의 비약을 위해서 한 수준 내에서도 점진적이고 미시적인 수준의 상승이 이루어지도록 해야 함을 말한다. 이런 점진적인 수학화가 가능하도록 하기 위해서는 교수학적 현상학을 통해 학습자의 현실 속 현상과 꾸준히 관계를 맺으면서 수평적 수학화와 수직적 수학화가 교대로 일어나도록 하여 반성에 의한 수준 상승이 자연스럽고 자발적으로 이루어지도록 해야 한다.

4) 수학화 활동을 통한 대수개념 지도

Freudenthal은 대수 지도 방법으로 '대수적 원리'를 이용한 지도 방법과 연산을 수직선 위의 사상으로 해석하는 기하학적 방법을 말하고

있다. 그는 음수 $-x$ 를 $x+(-x)=0$ 이 되는 수로 정의하고 산술법칙을 그대로 사용하여 그 계산 법칙을 지도하는 방법을 분수, 거듭제곱, 분수지수, 허수의 지도에도 적용할 것을 권하고 있다. 정수의 연산을 수직선 위의 사상으로 해석하여 -2에서 어떤 수 x를 빼는 것을 사상 $x \to -2-x$ 즉, 0과 -2를 교환하는 대칭이동으로 해석하는 대수의 기하학적 지도방법을 권한다[6].

그는 Davydov에 의해서 시도된 산술교육의 조기 대수화-수치산술에 앞선 문자 산술의 조기도입-는 교육학적으로 매우 건전하다고 하였다. 그리고 문자 산술은 문자로 식을 나타내고 식의 동치성을 파악하게 함으로써 산술적인 접근에서 나타나는 문제점을 예방할 수 있는 등 많은 이점이 있다고 하였다.

대수 학습에서 무엇보다도 중요한 것은 산술에서의 '경험적 사고'와 대비되는 '이론적 사고'이다. Davydov에 의하면 학습활동은 "사실적 자료의 분석을 통하여 핵심을 거쳐 추상적인 것으로부터 구체적인 것으로 나아가는 이론적 지식의 동화과정"이라고 하였다. 이는 양의 조작에 대한 이론적인 법칙을 바탕으로 수 개념을 동화하는 학습활동을 구체적으로 예시하는 것이라고 하였다[6].

이론적인 대수사고 자체를 일찍부터 계발하여야 한다는 Davydov의 생각에 Freudenthal도 아래와 같이 동의하고 있다[10, P 412].

> "추상화와 일반화는 구체적이고 특별한 경우로부터 도달되지 않는다. 오히려 한 가지 전형적인 보기에 의해서 혹은 이러한 것이 없으면 대수에서와 같이 추상・일반적인 접근에 의해 도달된다."

위와 같은 Freudenthal의 생각을 바탕으로 대수적인 전략과 전술 가운데 대표적인 것을 열거하면 다음과 같다[6].

① ‘대수적 원리’ : ‘대수적 형식 불역의 원리’로 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수와 그 연산 및 관계를 확장하는 것을 의미한다. 이는 수학을 창조하는 원리일 뿐만 아니라 교수학적인 기능도 갖고 있다. 이를테면 지수를 자연수 지수에서 정수 지수, 유리수 지수로 확장할 때 이용된다. 수 및 그 연산과 관계의 확장은 좌표평면에서 도형의 확장과 그 관계의 대수적 기술의 단순성에 의해서 정당화되므로 이는 ‘기하학적- 대수적 형식 불역의 원리’라고도 불릴 수 있는 것이다.

② 형식적 대입 : 변수가 수치적으로 고정되면 특수화 되고, 수치가 변수로 대치되면 일반화 된다. 그리고 어떤 풀이 양식이 적용되면 특수화 되고, 어떤 풀이 양식이 일반적으로 적용되면 일반화된다.

③ 대수적 번역 : 성질이나 관계 또는 문제를 변수, 방정식, 부등식 등으로 번역하고 대수적으로 기술한다.

④ 방정식과 부등식 풀기 : 차례로 대입해 보거나, 항을 모두 한쪽으로 이항하거나, 양변에 항을 적절히 분배하거나 양변에 같은 연산을 적용하거나 단순화를 위해 소거법을 사용하여 방정식과 부등식을 해결한다.

⑤ 식을 함수로 간주하기 : 주어진 함수를 어떤 함수의 합성함수로 혹은 어떤 함수의 역함수로 간주하거나 방정식을 두 함수식으로 간주하고 그래프를 이용하여 실근을 구한다.

⑥ 관점의 전환 : 자료를 미지의 것으로 생각하거나 미지인 것을 자료로 생각함으로써 미지인 것을 방정식을 만족하는 해로 생각하고 거꾸로 연구하거나 부등식을 등식으로 또는 등식을 부등식으로 대치함으로써 관점을 바꾼다.

⑦ 대칭성을 찾아보기 : 식, 방정식, 부등식, 함수에서의 대칭성을 찾아

본다.

⑧ 식이 양임을 보이기 : 식을 어떤 식의 제곱의 합으로 간주함으로써 양임을 보인다.

⑨ 유추하기 : 직관적으로 혹은 지수함수와 로그함수에 의해 실수의 덧셈과 곱셈사이의 관계를 유추하듯이, 비형식적으로 혹은 함수적인 관련성으로 유사성을 탐구한다.

2. 네덜란드의 현실주의 수학교육

1) RME의 기원

네덜란드에서는 1968년부터 Wiskobas ('초등학교에서의 수학'을 의미하는 네덜란드어 머리글자)프로젝트가 시작되었고 1971년부터 1980년까지 활동한 네덜란드의 국립 수학 교육 연구소인 IOWO에서 연구가 계속 진행되었다. 이러한 IOWO는 Freudenthal의 이론을 바탕으로 설립되었으며 이를 통해 나온 수학교육이론이 Realistic Mathematic Education(RME)이다. 이와 같은 RME이론은 Freudenthal연구소의 연구원들에 의해 광범위하게 설명되고 연구되어 왔다[9].

RME의 핵심적인 생각은 학생들이 교사의 안내 하에 수학을 재발명하는 경험을 할 수 있어야 한다는 점과 학생들의 비형식적인 방법을 존중하고 상호작용적 학습을 강조한다는 것이다[9]. 또한 학생들이 '경험한 현실적인 상황'을 출발점으로 하고 이러한 현실은 일상생활 속의 상황일 수도 있고 학생들이 몰입할 수 있는 상상의 세계일 수도 있다.

Gravemijer는 RME에서 보여 지는 재발명의 원리를 살펴보면서 학

생들은 수학이 발명된 과정과 유사한 과정을 경험해야 하며 이를 위해서 수학사가 참고 될 수 있다고 말했다. 또한 재발명은 학생들의 비형식적 풀이 방법에 의해 일어날 수 있다고 말하고 있다[11]. 학생들의 비형식적 전략이 보다 추상적인 방법을 예견하는 것으로 해석될 수 있고 재발명의 과정을 통해 유사한 풀이 방법의 수학화가 일어날 수 있다.

따라서 교사는 다양한 풀이 방법이 있는 맥락문제를 찾아야 하며 학생들의 풀이 방법이 점진적 수학화 과정을 통해 미래의 학습경로를 결정한다는 사실을 알아야 한다. 그리고 RME에서는 실세계문제를 해결하는 것이 수학을 학습하는 것의 필수적인 부분이며 여러 방면의 맥락문제가 처음부터 계속해서 교육과정 속에서 다루어져야 함을 강조하고 있다.

2) RME의 학습지도원리

Treffers는 점진적 수학화를 위한 RME의 학습지도원리로 다음과 같이 5가지 원리를 제안하고 있다. 이를 통해 교사가 어떤 방법을 사용해서 학생들을 재발명의 과정으로 인도할 것인가에 대한 시사점을 얻을 수 있을 것이다[15].

(1) 구체적 현상의 탐구원리(Phenomenal exploration)

Treffers에 따르면 교수학적 현상학을 토대로 점진적 수학화를 추구하는 수업의 첫 번째 교수－학습단계는 구체적 맥락에서 시작된다. 이 단계에서는 수학화를 고려하여 여러 개념과 구조가 드러나는 현실 상황을 탐구하게 된다. 탐구의 목적은 풍부한 직관적 관념 즉 심상을

형성하는데 있으며 따라서 맥락의 역할이 매우 중요하다[15].

Freudenthal에 따르면 맥락이란 수학화 되기 위해 학습자에게 노출된 현실의 영역을 의미한다. 맥락문제는 문장제의 형태일 수도 있고 때로는 놀이, 게임 속에 내재되어 있기도 하고 이야기의 형태로 표현되거나 신문기사로서 제공되기도 한다. 그는 맥락의 형태로 우선 '장소'와 관련된 맥락을 들고 있다. 예를 들어 물속나라라든가 정박한 배, 버스정거장에서 승하차하는 사람들, 사방팔방으로 뚫린 도로, 설치되었거나 설치될 도로표지판, 걸어 다닐 수 있는 거리 등이 이에 해당한다. 이것은 수학을 발견할 수 있고 수학을 행동으로 옮길 수 있는 풍부한 상황이며 동시에 교사와 학생 모두의 상상력을 자극할 수 있는 특성을 지니고 있다[10].

이러한 맥락문제는 다음과 같은 기능을 한다[15].

① 개념형성 :

수업의 초기 단계에서 맥락문제는 학생들이 수학에 자연스럽게 그리고 호기심을 갖고 접근할 수 있게 한다.

② 모델형성 :

맥락문제는 사고과정을 돕는 기능을 하는 활동자료나 시각적 모델을 제공하며 또한 형식적 연산, 절차, 기호, 규칙을 학습하기 위한 기반을 제공한다.

③ 응용가능성 :

맥락문제는 응용의 근원이자 응용영역으로서의 현실을 보여 준다.

④ 응용상황에서 특정한 산술 능력의 연습 기회를 제공한다.

즉 다양한 문맥을 통해 여러 가지 개념과 구조가 내포된 현실 상황을 탐구해야 한다.

(2) 수직적 도구에 의한 수준상승의 원리 (Bridging by vertical instruments)

수학적 개념이나 기능을 학습하는 것은 장기간에 걸쳐 진행되는 과정이고 다양한 추상화 수준에 따라 이행되는 과정이다. 기초적 문제 상황에서 처음부터 모델, 계획, 도식 그리고 기호와 같은 다양한 수직적 도구가 제공되고 이를 탐구하는 것이다. 여기서 수직적 도구란 직관적, 구체적, 비형식적 맥락에 결합된 조작과 반성적, 추상적, 형식적 체계적 조작 간의 차이를 좁히는데 도움이 되도록 화살표 기호와 같은 시각적 모델, 상황모델, 도식, 다이어그램, 기호와 같은 수학적 도구를 의미한다.

수직적 도구로서의 모델은 현실 속에서 수학의 현상학적 모습과 형식적 체계를 이어주는 기능을 한다. 또한 구체적 표현, 시각적 표현, 언어적 혹은 기호적 표현과 수학적 개념, 구조의 본질적 측면을 반영하는 현실 세계 상황을 이어주는 기능도 수행한다. 모델은 학생 자신의 활동으로부터 나타나며 학생에게 친숙한 상황의 모델에서 형식화의 과정을 거쳐 추론을 위한 모델로 변화한다.

이 과정에서는 이런 수학적 도구들이 그대로 부과되기보다 학생들이 맥락에 대한 적절한 자신의 생각을 표현할 수 있는 도구들을 만들어 보는 기회가 제공되어야 한다. 예를 들어, 수식을 나타낼 때에도 x, y 와 같은 고정된 문자로 시작하기보다 주어진 맥락에서 사용된 용어의 약어나 암호 등을 사용할 기회를 주는 것이 바람직하다. 즉 학생들의 비형식적, 상호적 지식이 점차 추상화되고 세련되어 형식적 수학을 위한 토대를 제공할 수 있어야 한다. 또한 구체적 혹은 추상적이라는 의미는 고정적이 것이 아니라 상대적인 것으로 받아들여야 한다.

(3) 학생의 창작활동을 통한 반성적 사고의 촉진원리
(Pupil's own constructions and production)

RME에서 학생들 자신의 구성과 창작은 핵심적인 역할을 한다. 수평적·수직적 수학화는 학생들의 행동과 행동에 대한 반성적 사고를 통해 일어난다. 수준상승은 반성적 사고에 의해서 촉진되며 갈등이나 학생들 자신의 창작활동은 반성적 사고가 일어나도록 하는데 도움이 될 수 있다. 학생들은 이미 접한 학습내용을 반성하고 앞으로 무엇이 진행될 것인지에 대한 것을 예측할 기회를 계속해서 가져야 한다. 이런 반성적 사고를 가능하게 하고 학생들의 창조적 활동을 더욱 활성화하기 위해서는 주어진 맥락을 다루는 것도 중요하지만 어떤 단계에 이르러서는 좀 더 새로운 상황에 직면하도록 할 필요가 있다.

따라서 학생들은 창작활동을 통해 수학화 과정에서 핵심적인 역할을 수행하고 이를 통해 형식적인 수학개념, 연산, 구조 등으로 쉽게 이행할 수 있게 된다. 학생 자신의 창작은 학습의 도구이면서 동시에 교수의 도구이다. 수업에서 학생 자신의 구성이 수학화 진행과정을 결정지으며 수업을 설계할 때 학생들의 공헌이 상당히 중요한 면을 차지한다. 결국 교사에 의해 안내가 되어도 실제로 수업을 이끌어 가는 것은 학생들이다[15]. 학생들 자신의 자유로운 구성과 산물을 통해 학생들은 스스로 수학 학습과정에 공헌할 수 있는 기회가 극대화 된다고 할 수 있다.

(4) 상호작용의 원리

앞에서 말한 현상학의 탐구, 수학적 도구에 의한 수준상승 및 학생 자신의 구성과 창작은 상호작용적 수업이 실현될 때만 효과적이다. 상

호 작용수업이란 서로 의논하고 참여하고 타협하고 협동하며 재검토하는 기회가 주어지는 것으로 교사는 설명을 자제하고 조력자·안내자로서의 역할을 담당하는 것을 말한다. 즉 학생들이 자신의 풀이를 설명하고 정당화하며 다른 사람의 풀이를 이해하고 동의하거나 반대하면서 다른 방법을 찾는 과정이고 이 과정에서 반성적 사고가 일어나는 것이다.

RME 수업에서는 각 학생은 개인적으로 탐구할 기회를 갖고 자신이 속한 집단 속에서 탐구계획을 구성할 기회를 갖는다. de Lange는 협동학습에 있어서 공동연구는 이해의 원천일 뿐만 아니라 다른 사람과도 접촉할 수 있는 기회이며 활동에 도움이 된다고 말하고 있다[9]. 수학교수－학습에서 학생들은 서로 다른 인지수준과 서로 다른 문화적 배경 속에서 활동하므로 서로 간의 인지적 갈등이 있기 마련이다. 이 상황을 최대한 효율적으로 다루는 것이 교사의 임무인 것이다. 따라서 학생들은 상호작용 수업을 통해 자기 자신의 생각을 재고하면서 반성할 기회를 갖고 더 나은 아이디어를 창조해 낼 수 있다[7]. 학생들이 개발한 비형식적인 전략들과 절차들을 구사할 수 있는 기회를 잘라 버리기 보다는 그것들이 허용되고 촉진되고 이용되도록 하는 것이 중요하다.

(5) 학습내용의 혼합을 통한 구조화 원리

학습내용의 혼합은 수학적 구조와 개념이 드러나는 현실적 현상에서 발생 근원을 찾을 수 있다. 다시 말해서 한 가지 구조나 한 가지 개념만을 포함할 만큼 순수한 현상은 현실 세계에서는 드물다. 따라서 여러 가지 학습 내용을 포함하고 있는 전형적 예로 적용할 수 있는 문제 상황을 찾아내는 것이 중요하다. 또한 수학을 학습한다는 것은 단편적인 지식과 기능을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 지식과 기능을 하나

의 구조화된 전체로 조직하는 것이다.

학습내용의 혼합은 관련된 학습과정을 전체적으로 보는 것이다. 학습은 가능한 한 일찍부터 지속적으로 서로 얽혀 있는 여러 가닥들로 조직되어야 한다. Streefland는 분수와 비는 실세계 상황에 밀접히 관련되어 있으며 분수와 비의 학습은 상호 관련되어 이루어 져야 한다고 말하고 있다[14]. 다시 말해서 비와 분수는 처음부터 함께 다루어질 수 있다는 것이다. 분리된 여러 대상을 시각적으로 비교하는 것은 하나의 대상을 여러 부분으로 나누어 비교해 보는 것과 같고, 수직선과 비례표는 비와 분수를 서로 관련짓는 수단이며 같은 아이디어에 대한 다른 표현이 된다.

수학의 다양한 주제들이 수직적으로만 분리되어 지도되고 횡적 연결을 무시한다면 수학을 응용하기는 어렵다. 따라서 횡적·종적인 학습내용의 혼합을 통해서 전체적인 구조화가 이루어져야 한다. 그리고 동시에 처음부터 응용과 순수수학이 결합되어야 하며 현실이 수학적 구조와 개념의 근원이자 응용영역이 되도록 지도되어야 한다. 그리고 여러 가지 학습 가닥을 포함하고 있는 상황모델로서 작용할 수 있는 문맥을 찾아내야 한다.

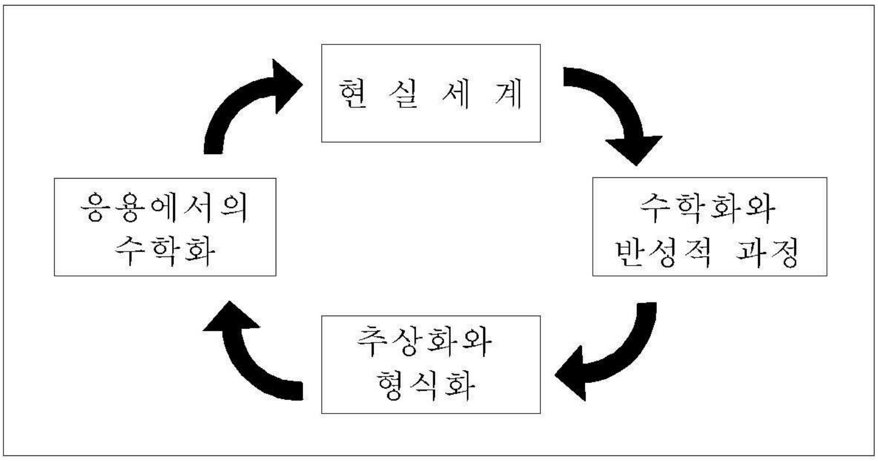
3. RME의 학습과정모형

de Lange외에 다른 학자들은 실세계로부터 출발하여 수학적 개념과 아이디어를 개발하는 과정을 '개념적 수학화'라 부르면서 학습모형을 다음과 같이 설명하고 있다[9].

첫 번째 단계에서는 맥락문제가 수학화의 관점에서 직관적으로 탐구

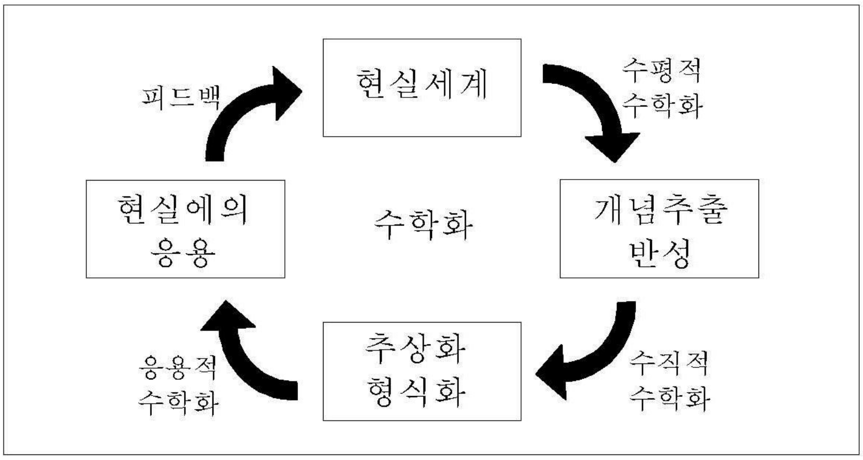
된다. 이는 문제를 조직화하고 구체화해서 문제의 수학적 측면을 알아내고 규칙성을 발견하는 것을 의미한다. 두 번째 단계는 학생들 간의 상호작용과 학생들의 사회적 환경, 형식화 및 추상화 능력에 의존하여 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해 내는 것이다. 이 단계를 특히 '개념적 수학화'라고 부른다. 여기에서는 반성적 사고가 중요한 역할을 수행한다. 세 번째 단계는 형식화와 추상화의 단계로 수학적 개념을 기술하고 보다 엄밀하고 형식적인 정의를 내리게 된다. 네 번째 단계는 수학적 개념을 새로운 문제에 응용함으로써 수학적 개념을 강화하고 수학화 기능을 개발하며 일반화하는 단계이다. 끝으로 해결된 맥락문제는 현실 세계에 대한 학생들의 관점에 영향을 미치게 된다.

이와 같은 순환적 학습과정을 de Lange 등은 다음과 같이 나타내고 있다.



[그림Ⅱ-1].de Lange의 학습과정모형(de Lange et al, 1987)

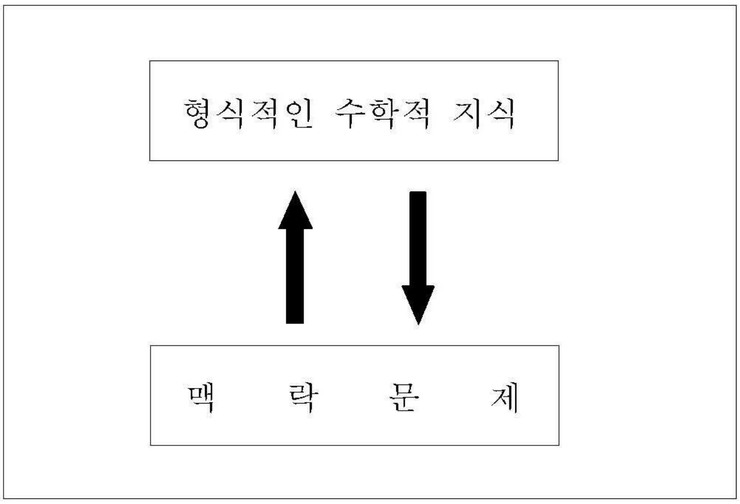
학습자는 스스로 새로운 경험에 참여할 수 있어야 하고 다양한 관점에서 자신의 경험을 반성하고 관찰할 수 있어야 한다. 그리고 수학적 개념은 계속해서 생성되고 다시 성장하고 변형되는 과정을 통해 형성되는 것이다. 정영옥은 [그림Ⅱ-1] 을 [그림Ⅱ-2] 와 같이 변형하여 제시했다[7].



[그림Ⅱ-2]. 수업에서의 수학화 과정(정영옥, 1997)

이는 현실 세계의 풍부한 맥락문제로부터 수학적 개념을 추출하고 학습자의 반성에 의해 추상화·형식화되어 현실 세계에 다시 피드백 되는 과정을 보여 준다.

한편, Gravemijer는 수학을 형식적 체계로 생각할 때 수학의 응용성은 개념과 절차의 일반적 성질에 의해 제공되며 결국에는 추상적 지식을 현실 속의 문제 해결에 적절하게 번역해야 한다고 했다[11].

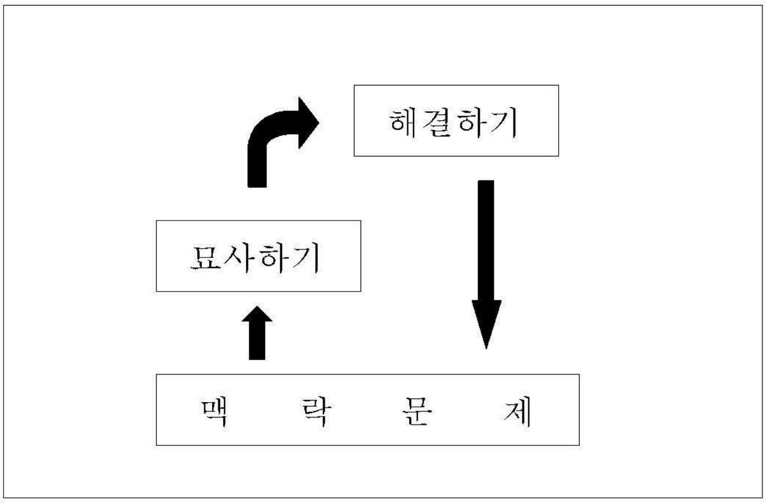


[그림Ⅱ-3]. 형식적 수학의 응용(Gravemijer, 1994)

위의 [그림Ⅱ-3] 은 형식적 수학의 도움을 받아 맥락문제를 해결하

는 과정을 나타내고 있다. 먼저 문제가 수학적 용어 즉 수학적 문제로 표현되어야 한다. 다음으로 이 수학적 문제는 활용 가능한 수학적 수단의 도움으로 해결된다. 마지막으로 수학적 풀이가 거꾸로 원래의 맥락으로 번역된다. 따라서 수학을 거꾸로 주어진 문제로 번역하기 위해서는 주어진 문제의 맥락 속에서 수학적 풀이를 해석하는 것을 필요로 한다. 다시 말해 제거되었던 측면들이 다시 고려되어야 한다. 일반적으로 위에서 말한 '번역'은 결국 문제 유형을 인식하고 표준적 방법을 설정하는 것이다.

그러나 '활동으로서의 수학'을 가르치고자 한다면 문제해결은 [그림 Ⅱ-4] 와 같이 다른 의미를 갖게 된다. 수학적 도구를 사용하기 보다는 문제가 중심이 된다. 문제가 적절한 목표가 되고 문제해결이 탐구과정으로서 해석되면 문제해결은 맥락문제를 좀 더 형식적으로 묘사하기, 형식적 수준에서 문제를 해결하기, 그리고 풀이를 거꾸로 번역하기와 같은 3가지 단계를 거치게 된다. 문제를 현실체계에 맞게 해결하는 것을 목적으로 하기보다 문제를 다룰 수 있는 방법으로 묘사하고 특히 도식화를 통해서 문제 상황 속의 중심적 관계를 확인해야 된다.

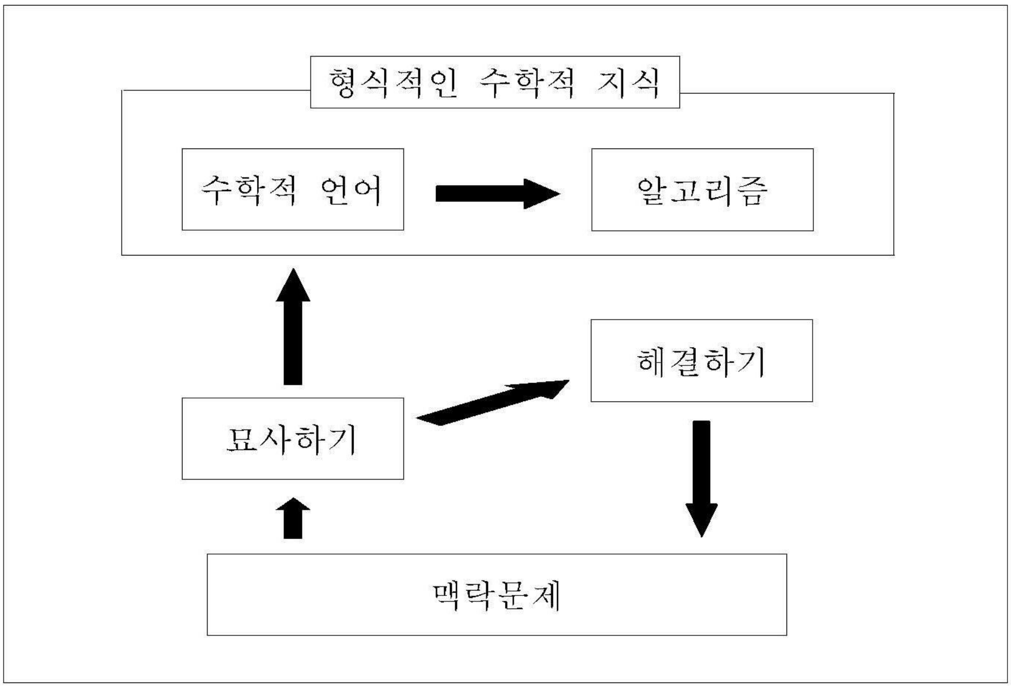


[그림Ⅱ-4]. 현실적(Realistic)해결(Gravemijer, 1994)

이와 같은 문제로 구성된 수업 프로그램을 통해 학생들은 맥락문제의 수학화를 경험할 수 있게 된다.

Gravemijer는 문제에 대한 묘사는 비형식적 언어로 발견될 수 있고 이 비형식적 언어가 단순화와 형식화의 과정을 통해 좀 더 형식적인 언어로 발전될 수 있다고 했다. 이런 과정은 시간이 흐름에 따라 단축되고 형식화 된다. 그 결과 진정한 의미의 알고리즘이 만들어 질 수 있는 것이다.

그는 이런 과정을 형식적인 수학적 지식자체가 재구성될 수 있는 학습과정으로 설명하고 있으며 [그림Ⅱ-5] 와 같이 나타냈다[11].



[그림Ⅱ-5]. 재발명(Gravemijer, 1994)

Ⅲ. Freudenthal의 수학화를 통한 대수영역의 분석

- '문자와 식'을 중심으로 -

본 장에서는 Freudenthal의 이론을 적용하여 제 7차 대수 영역 중 '문자와 식'의 학습자료 개발을 위해 '문자와 식'의 교과서 내용분석 및 교육과정을 분석하겠다. 이를 기초로 하여 '문자와 식'의 학습자료 구성과 개발 방향을 설정하고자 한다.

1. 대수영역 중 '문자와 식'의 분석 방법

Freudenthal의 수학화 이론과 네덜란드의 현실주의 수학교육 (RME)의 특성을 도입한 학습자료 개발을 위한 대수영역 중 '문자와 식'의 분석 절차는 다음과 같다.

1) 현행 중학교 대수영역 중 '문자와 식'의 교과서 내용과 교육과정을 분석하여 개발할 학습자료 구성의 기초를 마련한다.
2) '문자와 식'의 학습자료를 개발하기 위해 다음의 절차를 밟는다.
   (1) '문자와 식'의 구성방향 설정
   (2) 설정된 구성 방향에 맞는 학습자료의 개발 방향 및 목표 설정

(3) 학습자료의 구성 체계 설계

(4) 설정된 구성 체계에 맞는 학습자료의 초안 개발

2. 대수영역의 중 '문자와 식' 분석

학습자료의 개발 방향과 단원을 설계하기 위해 국내 교과서의 내용 분석 및 교육과정을 분석하였다.

1) '문자와 식' 내용분석

국내 교과서는 모두 대단원·중단원·소단원으로 구성되어 있고 소단원에서 실제적인 학습내용이 전개되고 있다. 현행 교과서의 편찬 방향은 교육과정에 충실하고, 교육부의 집필상의 유의사항을 잘 반영하고 있다[1:3].

여기에서는 교과서의 전체적인 흐름을 살펴보고 그 중에서 문자의 도입에 관한 내용을 중점적으로 분석하겠다. 교과서 내용 중 '문자와 식' 분석은 다음과 같다.

(1) 대단원의 도입 :

단원명, 동기유발을 위한 흥미 있는 수학 이야기 또는 문제와 해설, 단원의 학습목표, 학습계열을 제시하여 학습 안내를 한다.

(2) 중단원 :

'준비학습'에서는 진단, 보충, 심화의 평가를 하도록 하였고 '생각해봅시다'에서는 수학에 대한 흥미와 학습의욕을 높여 주었다.

(3) 소단원 :

'무엇을 배울까? 어느 때 사용할까'와 같은 의문문의 형태로 학습 목표를 제시하였다. 내용 전개는 ➡로 그 내용과 내용의 핵심이 되는 문제를 제시하였다. 필요한 부분에 <예제>를 주고, <예제>와 그 풀이를 시범적으로 준다. <주의>와 <참고>를 제시하여 학생들의 이해를 도와준다. 또한 <문제>는 내용의 이해를 깊게 하거나 다른 내용과 관련된 것을 연습할 때 주어지며 필요에 따라서 점진적으로 어려운 문제로 나열되어 있다.

(4) 연습 문제 :

각 중단원 끝에 연습 문제를 제시한다. <기초>문제와 <발전>문제를 주어 학생의 능력에 따라 선택하도록 한다.

(5) 확인 학습 :

단원의 끝에 확인 과정을 주어 스스로 자기 평가하고 보충, 심화할 수 있게 한다.

(6) 종합 문제 :

단원의 끝에 종합 문제를 주어 단원의 내용을 복습하거나 다른 문제 상황에 대한 적응력을 높이도록 했다.

문자의 도입을 살펴보면 다음과 같다.

현행 교과서를 보면 단원의 도입에 『모르는 것을 아는 것처럼 생각하라.』라는 부분에서 승준이와 은아 두 사람은 각자 같은 문제를 풀고 있다. 승준이와 은아가 그 문제를 푸는 방법에 대해 그림을 가지고 설명하고 있다. 이것을 통해 수를 기호로 나타내면 유용하다는 점을 인지하고 디오판토스의 예를 적용하고 있다[3]. 이와 같이 현실적 문제 혹은 수학사를 인용하여 문자의 필요성을 인식하고 문자를 도입하는 것을 Freudenthal은 적극 찬성하였다. 그러나 도입부분의 문제는 학습자가

경험하는 실생활의 문제가 아니며 문자의 심상을 가질 수 있는 맥락문제는 아니다. 수학사를 도입할 때는 학생들의 능동적인 활동과 교사의 적절한 안내가 필요하다고 하였다. 따라서 적절한 현실 상황의 문제를 통하여 문자가 필요하다는 점을 더욱 부각시키는 문제로 바꾼다면 좀 더 학생들이 문자를 잘 이해할 수 있을 것이다. 또한 학생들의 활동이 많이 부족하다는 것이다. 이런 점도 보완하면 학생들의 문자 학습에 도움이 될 것이다.

그리고 7단계에서 '문자와 식'의 학습이 어려운 것은 초등학교에서는 수를 가지고 구체적 내용을 조작하는데 비해 7단계에서는 문자를 다루는 추상적인 내용으로 급속히 전환되어 문자의 개념에 대한 확실한 이해가 부족하기 때문이다. 이런 점을 보완하기위해 구체적인 상황에서 추상적인 상황으로 가는 수평적 수학화를 통해 문자에 대한 심상을 구성하고 수직적 수평화를 통해 문자에 대한 심상을 확고히 하여야 한다.

【생각 열기】 슈퍼마켓에서 1kg에 1200원인 감자를 샀다. 저울에 올려놓으니 감자의 무게에 해당하는 가격표가 나왔다. 빈 칸을 채워보아라.

1kg 에는 1200원
2kg 에는 (   )원
2.5kg 에는 (   )원
□kg 에는 (   )원

위의 예는 현행 교과서에 실린 내용이다[3]. 위의 예는 실생활에서 일어날 수 있는 문제 상황을 통해 문자의 필요성을 알 수 있고 이를 기호로 나타내는 과정을 통해 수평적 수학화는 어느 정도 잘 일어날 수

있다. 그러나 이를 통하여 문자 개념의 심상을 구현하기는 어렵다. 이 문제에 Freudenthal이 제안한 여러 가지 대수적인 전략을 이용한다면 수직적 수학화에 많은 도움이 될 것이다. 그로 인해 학생들도 문자를 잘 이해하고 문자를 사용하여 식을 잘 나타낼 수 있을 것이라고 본다.

2) '문자와 식' 교육과정

(1) 대수지도의 목표

우리나라 제7차 교육과정에서 중학교 '문자와 식' 영역의 목표를 살펴보면 다음 [표Ⅲ-1]과 같다[2].

단 계	목 표
7-가 단계	문자를 사용하여 식을 간결하게 나타낼 수 있고, 일차방정식을 풀 수 있다.
8-가 단계	연립일차방정식과 일차부등식의 해를 구할 수 있고, 이를 활용할 수 있다.
9-가 단계	다항식의 곱셈과 인수분해를 할 수 있고, 이차방정식을 풀 수 있다.

[표Ⅲ−1]. 제 7차 중학교 교육과정의 '문자와 식' 영역의 목표

(2) 내용체계

우리나라 제7차 교육과정에서 중학교 '문자와 식' 영역의 내용을 살펴보면 다음 [표Ⅲ-2]와 같다[2].

단 계	내 용
7-가 단계	• 문자의 사용 • 식의 값 • 일차식의 계산 • 일차방정식과 그 해 • 등식의 성질 • 일차방정식의 풀이와 활용
8-가 단계	• 다항식의 계산 • 지수법칙 • 간단한 등식의 변형 • 미지수가 2개인 일차방정식과 연립일차방정식 • 부등식과 그 성질 • 일차부등식과 그 해 • 연립일차부등식 • 부등식의 활용
9-가 단계	• 다항식의 곱셈 • 곱셈공식 • 인수분해 • 이차방정식과 그 해 • 이차방정식의 풀이와 활용

[표Ⅲ-2]. 제 7차 중학교 교육과정의 '문자와 식'의 내용

(3) 내용개요

초등학교에서 문자의 사용, 방정식은 직접 다루지 않지만, 문장제 문제가 다루어지고 거기서 문자식과 방정식의 기본개념이 학습되어진다. <7-가 단계>에서는 이를 바탕으로 문자를 처음 사용하게 되고, 방정식을 다

루어 형식화, 알고리즘화한다. 또, 방정식의 활용 측면을 강조하여 실생활의 여러 가지 문제를 조직, 표현, 해결할 수 있도록 해 준다[2].

(4) 교육과정의 내용 분석

교육과정 상의 '문자와 식' 영역의 목표, 내용체계와 내용의 개요를 보면 학습자는 <9-가> 단계를 이수하면 문자에 대한 개념을 형식화·일반화하여 대수적인 사고력을 갖추고 이를 현실 상황에 잘 적용할 수 있어야 한다. 그러나 학습자들의 '문자와 식'의 학습은 만족스럽게 이루어 지지 못하고 있다. 그 이유에는 첫째, 구체적 조작기에서 형식적 조작기로 들어서는 과도기적인 학습자들에게 문자를 다루는 추상적인 내용으로 급속히 전환되어 인지적 장애를 유발할 수 있다는 것이다. 둘째, 현실적인 문제를 통한 문자에 대한 심상의 구현이 목표가 아닌 단지 학습자들의 계산적인 면만을 강조하는 사회적 풍토와 목표를 들 수 있다. 셋째, 학습자들의 능동적인 활동이 보장되지 않는다는 것이다. 넷째, 학습자들의 과도한 학습량을 말 할 수 있다.

인류의 역사를 보며 문자는 언어적 대수, 생략적 대수, 기호적 대수 순으로 발전했으며 문자의 도입에는 많은 시간이 소요되었다. 그리고 많은 인지적 갈등을 해결한 후에 현재와 같은 기호를 사용하게 된 것이다. 이와 같이 학습자들도 문자를 사용하는 데에는 많은 시간이 필요하며 역사 발생적 원리를 통해 수학자들이 발명한 것을 학습자들은 재발명해야 한다. 또한 현실적인 문제 상황을 발판으로 수학화 활동을 경험하여야 한다. 그리하여 문자의 심상을 형성하고 다른 개념과의 연계를 통해 수직적 수학화 활동을 하며 점진적이고 비약적인 수준의 상승이 이루어 져야 한다. 이런 과정의 반복은 현 '문자와 식'의 문제점을 해결할 수 있는 하나의 대

안이라고 여겨진다. 그리고 Freudenthal의 이론을 우리나라 교육과정에 반영하기 위해서는 많은 후속 연구가 필요할 것이다.

Ⅳ. Freudenthal의 수학화 과정을 도입한 대수영역 학습자료 개발

– '문자와 식'을 중심으로 –

1. 대수영역의 구성과 학습자료

1) 대수영역의 구성방향

본 연구에서는 Freudenthal의 수학화를 통한 대수영역 중 '문자와 식'의 분석을 바탕으로 대수영역의 구성방향을 다음과 같이 설정했다.

(1) 대수적 사고의 발달과정을 통해 대수를 지도한다. [표Ⅳ-1]을 참고로 하여 문자의 개념을 조직할 수 있는 현상을 제시한다.

(2) 학생들이 가지고 있는 비형식적인 생각과 여러 경험들을 통해 문자의 개념에 대한 심상을 직관화한다. 학생들 스스로 이끌어낸 생각을 기초로 하여 학습경로를 설계한다.

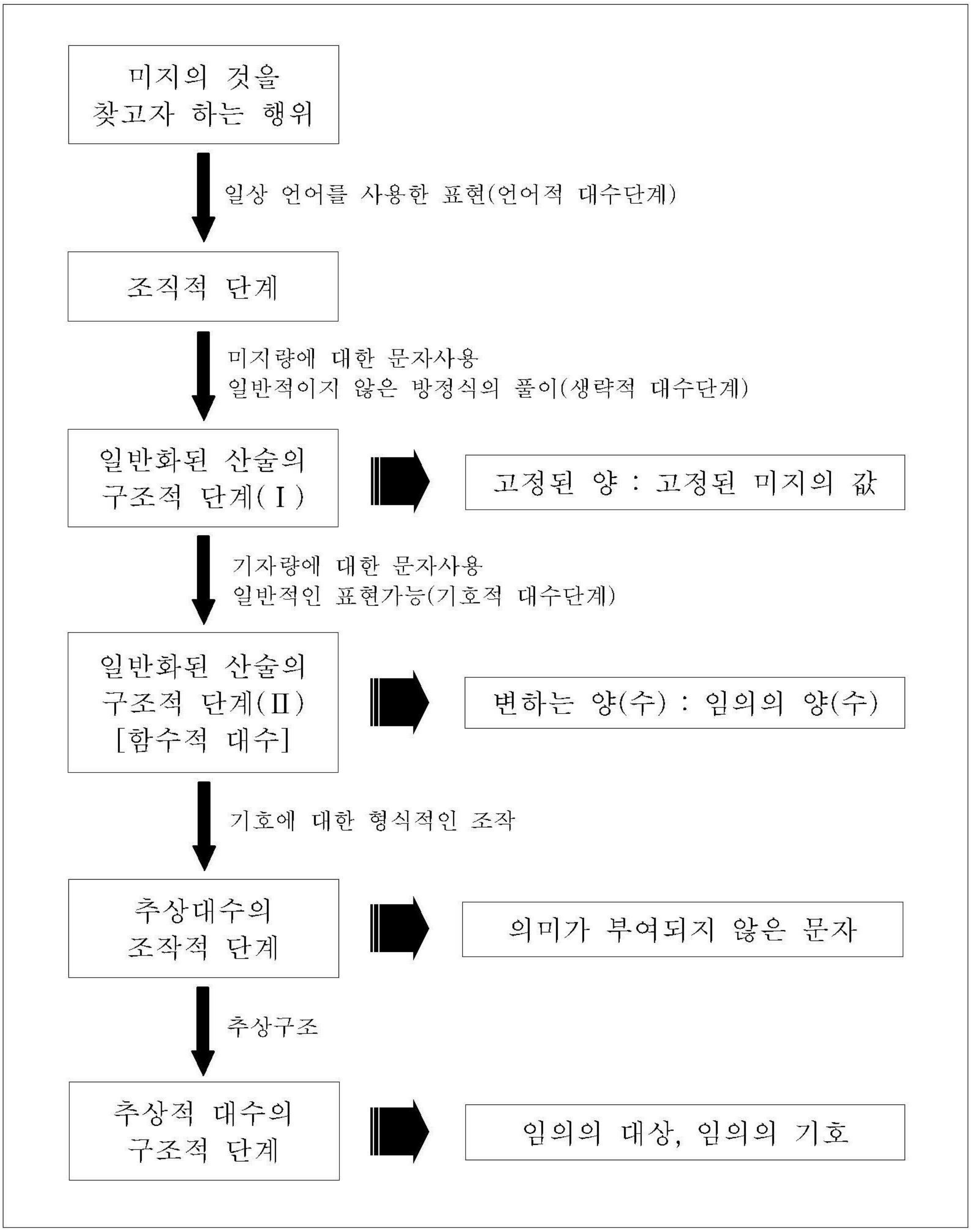
(3) 친근감을 가지고 학습을 하면 수학에 흥미와 호기심이 생긴다. 학생들이 현실감을 느낄 수 있는 현상에서 문자 학습을 시작한다. 그리고 친근감, 흥미, 호기심을 유발해 학습에 긍정적인 태도를 기른다.

(4) 문자개념과 성질들을 스스로 탐구할 기회를 제공한다.

(5) 언어적 표현이나 표, 대수적 식의 표현 등 다양한 표현방법으로 그 현

상을 기술해 볼 기회를 제공한다.

(6) '문자와 식' 영역의 학습을 통해 현상을 수학적으로 나타낸다.



[표Ⅳ-1]. 대수적 사고의 발달과정에서 본 문자개념

2) 학습자료의 개발방향 및 목표

대수영역의 구성방향을 바탕으로 본 연구에서 개발할 학습자료 개발의 방향과 목표를 다음과 같이 설정하였다.

(1) 학습자료의 개발방향

① 현행 중학교 교육과정을 기초로 해서 개발자가 다양한 내용을 구성한다. 중학교 7단계에서는 문자의 개념을 이해하고 식을 계산하며 변형시킬 수 있다.

② 구체적인 상황에서 문자의 개념과 성질을 이해하고 여러 현상을 다루어 본다. 직관적인 개념과 성질을 알게 한 후 형식적인 정의를 부여한다.

③ 토론과 탐구활동 등 다양한 수업방법을 도입해 학생들의 적극적인 사고 활동과 능동적인 학습태도를 유도한다. 학생들이 자신의 생각을 설명하고 정당화한다. 다른 사람의 생각을 들으면서 다른 방법을 찾아 반성할 기회를 갖게 한다.

④ 수업을 학습자의 활동위주로 이끌어 간다. 또한 그 활동이 교사의 적절한 안내를 통해 이루어지도록 구성한다. 활동은 학생들의 현실 속에서 교사가 적절히 안내를 함으로써 잘 이루어 질 수 있다.

(2) 학습자료의 목표

문자식을 잘 이해하고 일차식의 의미와 일차식의 계산을 통해 문자에

대한 심상을 구현하는 것을 목표로 한다. 문자식의 이해와 일차식의 하위 목표는 다음과 같다.

① 문자식의 이해

- 여러 가지 현상을 문자로 나타내고 그 의미를 설명할 수 있다.
- 문자식의 형태를 보고 변수, 미지수, 상수의 의미를 파악할 수 있다.
- 주어진 상황에서 변하는 양, 임의의 양의 관계를 파악할 수 있다.
- 다양한 대수적 표현을 사용할 수 있다.

② 일차식

- 주어진 상황에서 식의 값의 뜻을 알고 식의 값을 구할 수 있다.
- 항, 다항식, 단항식, 계수, 상수항, 차수, 일차식의 뜻을 알 수 있다.
- 일차식의 곱셈과 덧셈, 뺄셈을 할 수 있다.
- 일차식의 계산을 통하여 다항식의 계산을 형식화할 수 있다.

3) 학습자료의 구성 체계

Freudenthal의 수학화 활동을 도입한 대수영역 중 '문자와 식' 학습자료의 구성 체계를 현행 중학교 교육과정을 기초로 하여 구성하였다. 본 학습자료는 문자개념에 대한 직관적 사고를 바탕으로 좀 더 형식적인 학습이 잘 일어 날 수 있도록 구성하였다. 각 단원의 도입은 흥미를 유발하기위해 학습할 상황에 대해서 설명한다. 2 ~ 4 개의 활동을 통해 기본내용과 다음의 학습을 위한 토대를 마련한다. 가능한 연산에 대한 탐구와 토론을 통해 학생들의 직접적이고 적극적인 활동을 위주로 구성한다. 자신이 관찰한 사실이나 생각, 추측을 설명한다. 다른 학생의 설명을 통해 자신을 반성하고 학습할 수 있게 한다.

2. 대수영역의 학습자료 개발

1) 개발한 학습자료의 특징

본 연구에서 개발한 학습자료는 문자개념에 대한 여러 가지 상황을 다루어 봄으로써 문자의 대표성, 변화성, 고정성에 대해 경험을 할 수 있다. 그리고 올바른 문자의 사용을 이해하고 문자식으로 나타낼 수 있는 능력을 기르게 한다. 또한 올바른 문자식의 표현을 통해 미지의 값을 구하고 방정식을 해결하는데 밑바탕이 된다. 그리하여 수학의 내적·외적인 현상을 이해하고 조직할 수 있게 제시한다.

개발한 학습자료에는 일상생활에서 경험할 수 있는 것을 소재로 하였다. 더불어 학생들 스스로 그 현상을 기술하고 해석하는 경험을 하게 하였다. 이를 통해 문자의 개념에 대한 직관적 생각을 형성하고 필요성을 인식할 수 있다.

문자의 이해에서는 문자로 표현되는 실세계의 현상과 미지의 것을 찾는 경험으로 문자사용을 직관적으로 경험한다. 수량화, 계량화, 고정된 미지의 양에 대한 기호, 구체적인 예에서 규칙발견, 고정대상들의 가상적 변화를 의미하는 이름 등 문자에 대한 심상을 갖게 한 후에 점진적으로 형식화해 나갈 수 있게 구성한다. 이런 특징들은 다음에 학습할 일차방정식과 부등식, 미지수가 2개인 연립방정식, 이차방정식과 부등식, 지수·로그·삼각 방정식과 부등식, 함수 등의 대수식을 조직하는 것에 밑바탕이 된다.

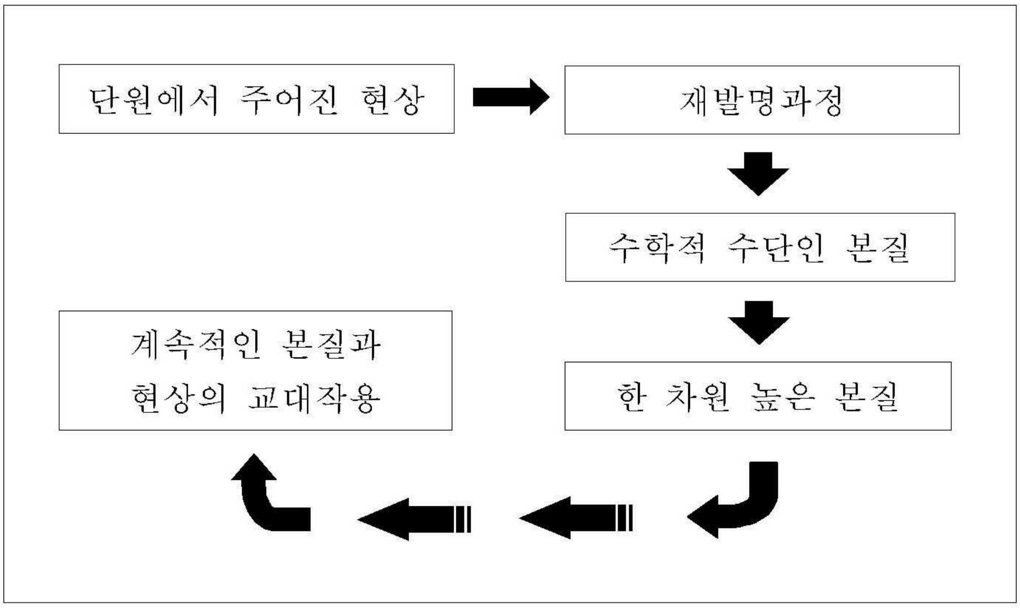
일차식의 계산에서는 여러 상황에서 조직된 문자에 대한 계산과 식의 변형을 할 수 있게 한다. 그리고 식의 동치성, 등식의 성질, 식의 값 구하

기, 미지의 것을 구하는 과정에서 탐구와 토론으로 형식화한다. 또한 여러 가지 맥락문제를 통해서 다음 학습에서 배울 내용의 밑바탕이 되게 자료를 개발한다.

Freudenthal의 수학화 활동을 통해 점진적인 수학화 과정을 도입한 각 단원별 학습자료의 특징은 아래 [표Ⅳ-2].과 같다.

대 단 원	대단원에서는 교사의 안내에 따라 학생들이 경험하게 될 수학화 과정에 대해 설명한다.
중 단 원	중단원에서 교사의 안내에 의해 학생들이 경험해야 할 수학화 과정에 대해 설명한다.
소 단 원	여러 현상에서 활동을 통하여 본질을 찾게 한다. 찾은 본질에서 더 높은 차원의 본질로 체계화하게 하고 조직화하는 과정을 설명한다.

[표Ⅳ - 2]. 단원별 학습자료의 특징



[표Ⅳ-3]. 점진적인 수학화 도입 과정

2) 개발한 학습자료

문자의 이해는 문자의 개념에 대한 심상 형성을 목표로 한다. 여러 가지 현상을 통해 학생들이 문자를 이용하여 식을 표현할 수 있게 하고 현상에 알맞은 문자의 여러 가지 표현들을 수단으로 정리하게 한다.

이 단원에서는 여러 가지 표현을 통해 문자와 식의 특성을 이끌어 내는 수학화 과정을 경험하게 한다.

개발한 학습자료는 <부록1>에 제시한다.

① 문자의 이해

우리 주변에서 일어나는 여러 가지 현상에 대해 문자를 사용하여 나타낸다. 현상들을 문자로 표현하는 기초경험을 제공하고 이를 수학적 수단으로 이용하여 수직적 수학화의 과정을 경험한다.

토끼와 거북이의 경주	▪ 토끼와 거북이가 간 거리를 수직선으로 나타내어서 수직선을 이해하도록 한다. ▪ 이것을 다시 표로 만들어서 표현하게 한다. ▪ 구체적인 숫자로부터 문자를 도입하여 표현하게 한다. ▪ 시간에 따라 거리가 늘어나게 됨을 이해시킨다.
	▪ 문자를 이용하여 식을 표현하게 한다. －변수의 심상을 가지게 한다. ▪ 좌표평면위에 표시하게 한다. －기하학적인 관점으로 변화시킨다. ▪ 다른 문자의 도입 －문자가 변하면 식의 표현만 변하고 의미는 변하지 않음을 인식시킨다.

저수지문제	▪ 1일마다 저수지에서 쓰는 물의 양에는 일정한 규칙이 있음을 이해하게 한다. ▪ 표의 작성을 통해 위의 사실을 명확히 이해시킨다. ▪ 한 마을을 모델로 다른 마을에서도 물의 양을 문자식으로 표현하게 한다.
	▪ '물의 양이 줄고 있다'는 현상을 이해시킨다. ▪ 식을 통하여 남은 물의 양과 쓰는 물의 양 사이의 관계를 이해시킨다. ▪ 좌표를 이용하여 둘의 관계가 직선의 관계임을 이해시킨다.

연극한컷장면	▪ 연극을 통하여 문자사용의 필요성을 인식시킨다. ▪ 표를 작성하여 할인된 가격을 구한다. ▪ 또 다른 상황에서 50%를 할인해 준다면 물건 값으로 얼마를 지불해야 하는지 앞의 표를 이용하여 구하게 한다.
	▪ 문자를 도입하여 물건가격을 공식화 시킨다. －알고리즘화 시킨다. ▪ 다른 상황에 적용해 보자. －다른 현상에 적용시킨다.

② 일차식의 계산

다양한 문자의 사용으로부터 문자의 심상을 갖게 하여 문자를 용이하게 사용할 수 있다. 그리고 문자식과 문자식의 계산을 여러 활동을 통해 형식화한다. 식의 동치성과 등식의 성질, 식의 변형을 잘 이해하여 다음 학습의 밑거름이 되고자 한다.

저울문제	▪ 저울을 이용하여 균형 상태를 이해시킨다. ▪ 균형 상태를 이해한 후 문자를 도입한다. －고정된 대상으로써 문자를 도입한다.
	▪ 저울에서 균형을 유지하는 과정을 통해 등식의 성질을 형식화해 나간다. ▪ 대수적인 연산의 특징을 공식화한다. ▪ 다른 상황에 적용하여 본다.

물대기	▪ 1분마다 밭에 댄 물의 양을 표를 통해서 관찰하고 일정한 규칙을 이해한다. ▪ 시간과 분의 관계를 이해한다. ▪ 시간으로 단위를 바꾸어 물의 양의 변화를 이해한다. ▪ 이를 문자식으로 표현한다.
	▪ 밭에 펌프로 물을 댈 때 시간에 따라 물이 증가하는 현상을 이해한다. －토론과 탐구활동을 시킨다. ▪ 이를 그림으로 다시 표현시키면서 다시 형식화한다.

대수막대를 이용한 동류항 계산	▪ 기존의 대수막대를 이용하여 문제를 이해한다. ▪ 각각의 대수막대가 뜻하는 바를 학생들이 스스로 정하여 표기한다. ▪ 동류항의 정확한 용어는 모르지만 지금까지의 경험을 바탕으로 동류항의 심상을 갖게 한다. ▪ 조끼리 서로 의논하여 주어진 문제를 간단히 표현한다.
	▪ 활동을 학생 자신이 요약·정리하여 발표한다. ▪ 게임을 통해 동류항의 계산을 형식화한다. ▪ 동류항의 용어를 정리한다.

마방진을 이용한 동류항 계산	▪ 마방진의 뜻을 이해시킨다. ▪ 위에서 형성된 동류항의 심상을 가지고 빈칸에 들어갈 식을 구한다.
	▪ 마방진의 규칙을 공식화 하자. ▪ 학생들 스스로 마방진을 만들어 보자.

디오판토스의 비문	▪ 디오판토스의 비문을 이해하자. ▪ 디오판토스의 나이 계산을 수직선을 이용하여 나타내 보자. ▪ 이를 식으로 표현하여 보자.
	▪ 자신의 비문을 작성하여 후세 사람들이 여러분의 나이를 알아낼 수 있는지 생각해보자. ▪ 서로서로 비문을 바꾸어 보면서 반성하고 토론하자.

시장에서 물건 사기	▪ 시장에서 사과의 가격을 이용하여 사과의 개수를 문자식으로 표현하자. ▪ 가게마다 다른 사과 가격으로 민경은 고민을 한다. 만일 사과의 품종은 같다고 생각한다면 민경은 어느 가게에서 사과를 사는 것이 유리한지 생각해 보자.
	▪ 이를 표를 통해 형식화한다. ▪ 또한 그래프로 표시하자. ▪ 다른 상황을 조끼리 상의하여 만들어보자.

그림으로 풀어보는 연립방정식	▪ 닭의 무게를 이용한 만화를 통해 미지의 것을 이해한다. ▪ 우주인들의 줄다리기를 통해 구해야 할 것을 이해한다. ▪ 동물의 얼굴 뒤에 있는 숫자를 찾는 방법을 생각해 보자. ▪ 저울을 이용하여 미지의 것을 찾아보자. ▪ 여러 가지 현상을 이용하여 구하고자 하는 것이 여러 개임을 이해하자.
	▪ 문자를 도입하여 이들을 식으로 표현해 보자. ▪ 미지의 것을 구하기 위해서는 어떻게 해야 하는지 조끼리 토의해보자. ▪ 토의한 결과를 정리하여 발표해보자.

3. 학습자료에 대한 호응도 분석

본 연구에서 개발한 중학교 대수 영역의 학습자료에 대한 호응도 검사에 대해 논의하고자 한다. 개발한 학습자료를 이해하고 조언을 해 줄 수 있다고 판단되는 현직교사 20명과 예비교사집단 20명을 설문대상으로 한다. 학습자료에 대한 반응을 분석한 후 개발한 학습자료를 수정·보완하고자 한다.

1) 검사도구의 제작

본 연구의 호응도 검사 도구는 개발한 학습자료에 대한 활용도와 그 이유에 대해 연구자가 직접 작성하여 <부록2>와 같이 검사도구로 확정한다.

2) 자료의 분석

교사와 예비교사의 호응도 검사에서 백분율로 분석한 결과는 다음과 같다. 우선 교사의 호응도 분석 결과를 보면 '개발한 학습자료가 대수영역의 교수학습자료로 효과적이라고 생각합니까?'라는 질문에 대한 응답은 [표Ⅳ-4]와 같이 '매우 효과적이다'가 20%, '대체로 효과적이다'가 50%로 설문 대상자의 70%가 효과적이라고 응답하였다.

응답내용	응답자수	%
매우 효과적	4	20
대체로 효과적	10	50
보통임	4	20
별로 효과적이지 못함	2	10
전혀 효과적이지 못함	0	0
합 계	20	100

[표Ⅳ-4]. 개발한 학습자료의 효율성(교사)

그 이유로는 [표Ⅳ-5]와 같이 '학습에 흥미를 유발하기 때문에'가 27%, '실생활과 관련된 문제이기 때문에'가 36%, '결론의 제시보다는 토의를 통해 학습자 스스로 결론을 이끌어 내기 때문에'가 23%, '발견학습 및 탐구활동을 통해 문제를 해결할 수 있기 때문에'가 13%의 응답이 있었다.

응답내용	응답자수	%
학습에 흥미를 유발하므로	15	27
실생활과 관련된 문제 상황을 제시하여 스스로 학습이 가능하므로	20	36
토의 및 결론을 스스로 이끌어 내므로	13	23
발견학습 및 탐구학습을 통해 자발적인 문제 해결능력 신장	7	13
합 계	55	100

[표Ⅳ-5]. 개발한 학습자료가 효율적인 이유(교사)

‘개발된 자료 중 가장 마음에 드시는 부분은 어느 부분입니까?’라는 질문에 대부분이 ‘토끼와 거북이 경주문제’와 ‘저수지문제’가 마음에 든다고 응답하였으며 실생활과 관련된 문제를 통하여 학생들이 시각적으로 문제를 이해하고 이를 통해 문자의 개념을 체계화 할 수 있는 점이 마음에 든다고 하였다.

따라서 개발한 대수영역의 학습자료는 실생활과 관련된 문제 상황을 통해 학생의 자발적인 수업참여를 유도하며 흥미를 유발하는 등의 이유로 대체로 효과적임을 알 수 있다. 그러나 개발한 자료가 효과적이지 못하다고 응답한 2%의 교사의 의견에서는 ‘수준별 수업이 가능하지 못하다’고 하였으므로 향후 자료를 수정·보완해야 할 것이다.

‘본 학습자료를 수업시간에 활용할 생각이 있는가’의 질문에 [표Ⅳ-6]과 같이 30%가 있다고 응답하였고 ‘생각해 보겠다’가 65%로 나타났다.

응답내용	응답자수	%
있다	6	30
없다	1	5
생각해 보겠다	13	65
합　　계	20	100

[표Ⅳ-6]. 학습자료의 활용 여부(교사)

개발한 학습자료의 개선점을 참고하여 수정・보완방향을 정리하면 [표Ⅳ-7]과 같다.

개선점	수정・보완 방향
수업시간에 비해 자료의 양이 많다.	반복되는 부분은 교사의 재량에 맞게 선택하게끔 한다.
중학생이 토론 수업을 이끌어 내기에는 다소 무리가 있다.	교사의 안내를 통해 수업이 잘 진행될 수 있게 설명을 첨가한다.
기초학습이 부족한 학생에 대한 대안제시 미비	기초학습이 미비한 학생에게는 교사의 안내를 통해 자료의 내용을 하향 초등화하여 제시한다.

[표Ⅳ-7]. 개발한 학습자료의 개선점과 수정・보완 방향(교사)

다음으로 예비교사의 호응도 조사결과를 보면 '개발한 학습자료가 대수영역의 교수학습자료로 효과적이라고 생각합니까?'라는 질문에 대한 응답은 [표Ⅳ-8]과 같이 '매우 효과적이다'가 40%, '대체로 효과적이다'가 40%로 설문 대상자의 80%가 효과적이라고 응답하였다.

응답내용	응답자수	%
매우 효과적	8	40
대체로 효과적	8	40
보통임	4	20
별로 효과적이지 못함	0	0
전혀 효과적이지 못함	0	0
합 계	20	100

[표Ⅳ-8]. 개발한 학습자료의 효율성(예비교사)

그 이유로는 [표Ⅳ-9]와 같이 '학습에 흥미를 유발하기 때문에'가 37%, '실생활과 관련된 문제이기 때문에'가 25%, '결론의 제시보다는 토의를 통해 학습자 스스로 결론을 이끌어 내기 때문에'가 7%, '발견학습 및 탐구활동을 통해 문제를 해결할 수 있기 때문에'가 30%의 응답이 있었다.

응답내용	응답자수	%
학습에 흥미를 유발하므로	15	37
실생활과 관련된 문제 상황을 제시하여 스스로 학습이 가능하므로	10	25
토의 및 결론을 스스로 이끌어 내므로	3	7
발견학습 및 탐구학습을 통해 자발적인 문제 해결능력 신장	12	30
합 계	40	100

[표Ⅳ-9]. 개발한 학습자료가 효율적인 이유(예비교사)

'개발된 자료 중 가장 마음에 드시는 부분은 어느 부분입니까?'라는 질문에 대부분이 교구를 이용한 동류항 계산과 마방진을 이용한 동류항

계산이 마음에 든다고 하였다. 설명식 수업을 원하는 교사들과는 달리 예비교사들은 교구이용에 더 많은 흥미를 가지는 것으로 보인다. 또한 대부분이 개발한 학습자료가 실생활 문제적용을 통한 학생 스스로의 능력을 신장하는데 효과적이라고 말하고 있다.

'본 학습자료를 수업시간에 활용할 생각이 있는가'의 질문에 [표Ⅳ-10]과 같이 85%가 있다고 응답하였고 '생각해 보겠다'가 15%로 나타났다. 즉 예비교사들은 수학화 활동을 이용한 학습을 현 교사집단보다 적극적으로 사용하겠다는 의지가 엿 보인다.

응답내용	응답자수	%
있다	17	85
없다	0	0
생각해 보겠다	3	15
합　　계	20	100

[표Ⅳ-10]. 학습자료의 활용 여부(예비교사)

개발한 학습자료의 개선점을 참고하여 수정·보완방향을 정리하면 [표Ⅳ-11]과 같다.

개선점	수정·보완 방향
현실에 맞지 않는 부분이 있다.	지적한 부분을 현실 상황에서 일어날 수 있는 소재로 바꾼다.
기초 학습이 부족한 학생에 대한 대안제시 미비하다.	기초학습이 미비한 학생에게는 교사의 안내를 통해 자료의 내용을 하향 초등화하여 제시한다.

[표Ⅳ-11]. 개발한 학습자료의 개선점과 수정·보완 방향(예비교사)

Ⅴ. 결론 및 제언

현실세계에는 서로 관련되어 복잡하게 변화하는 현상들이 많이 존재한다. 그러므로 실생활에서 겪는 여러 문제를 합리적으로 해결하기 위해서는 현상의 관계를 인식하고 변화에 대한 이해의 능력과 상황에 적합하게 예측하는 능력이 필요하다. 수학에서 그러한 능력과 관련 있는 부분이 대수부분이다. 실생활에서 유용한 지식을 학생들에게 가르치기 위해 주변의 여러 가지 현상을 대수적 사고로 이해하고 해석하며 처리할 수 있어야 한다. 그러나 학교 현장에서 사용하는 대수지도 방법은 대수적 사고능력을 길러주기 보다 계산과 알고리즘에 중점을 둠으로써 대수의 필요성과 유용성 인식에 따른 흥미유발과 대수적 사고 발달을 어렵게 하고 있다.

대수적 사고 능력 개발을 위한 지도 방법 중 하나는 Freudenthal의 수학화를 실현시킨 교육이다. Freudenthal은 교사가 수학의 최종적인 형태를 제시하는 정적인 교육에서 탈피하여 적절한 안내를 통해 수학의 내적·외적 상황을 조직하고 점진적으로 형식화해 나가는 역동적인 수학의 과정을 교수학습으로 채택해야 한다고 주장하였다. Freudenthal의 수학화는 학습자에게 의미 있는 현상으로부터 시작해서 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 활동으로 국내에서도 Freudenthal의 수학화 학습-지도에 대한 연구가 이루어지고 있다. 그리하여 본 연구에서는 Freudenthal의 이론을 중학교 대수영역 중 '문자와 식'에 접목시켜 학습 자료를 개발하고 그에 대한 호응도를 조사 하였다. 그래서 자료의 미비

점을 수정・보완하고 교수학습에 도움을 주고자 한다.

개발한 학습자료에는 학생들에게 문자의 심상을 구현할 수 있는 여러 가지 현상들을 다루게 하였다. 지도 방법은 학생 스스로 문자의 의미를 깨닫게 하고 비형식적 내용을 다루는 활동에서 점차적으로 형식화하게 한다. 이 방법을 효율적으로 이끌기 위해서는 교사의 역할이 중요하다. 수학화 과정을 도입한 학습 지도에서는 학생의 다양한 답에 대응하기 위해 여러 가지를 예상하고 그 예상을 기초로 교수계획을 세워야 한다. 이러한 지도 내용과 방법으로 학생들은 현실적인 문맥에서 대수적 사고를 경험하고 반성을 통해 경험을 점진적으로 수학화해 나가면서 자신의 대수적 사고 능력을 기를 수 있다.

이러한 연구 목적을 달성하기 위해 Ⅱ장에서 문헌 검토를 통하여 Freudenthal의 수학화 이론의 이론적 토대를 마련하고 네덜란드의 현실적 수학교육을 통해 학습자료의 개발 가능성을 얻었다. 그리고 Freudenthal의 수학화를 통한 대수영역 중 '문자와 식' 분석으로 학습자료 개발의 목표, 구성 체계, 구성방향에 대한 시사점을 얻었다.

본 연구에서 개발한 학습자료에 대한 교사와 예비교사의 호응도를 조사한 결과 교사집단에서는 '개발한 학습자료가 대수영역의 교수학습자료로 효과적이라고 생각합니까?'라는 질문에 '매우 효과적이다'가 20%, '대체로 효과적이다'가 50%로 설문 대상자의 70%가 효과적이라고 응답하였다. 그리고 예비 교사들도 '매우 효과적이다'가 40%, '대체로 효과적이다'가 40%로 설문 대상자의 80%가 효과적이라고 응답하였다. 따라서 본 연구에서 개발한 학습자료는 대체로 효과적이라는 긍정적인 응답을 얻을 수 있었으며 그중에서 실생활과 연관된 문제 상황과 교구를 활용한 문제 등에 많은 관심을 나타냈다. 그러나 시간에 비해 방대한 자료를 다 활용할 수 없다는 지적과 개별화 학습에 대한 미비점을

보완할 것을 요구하였다. 또한, 중학생이 토의를 이끌어 갈 능력이 되지 않는 점을 간과해서는 안 된다고 지적했다.

이와 같은 미비점을 보완하기 위해서 본 연구에서는 개별화에 관한 자료를 추가 보완하였다. 그러나 근본적으로 교사가 이 자료를 활용하여 가르치려면 아래와 같이 몇 가지 연구가 필요함을 제언하고자 한다.

첫째, Freudenthal의 수학화 과정을 도입한 다양한 자료개발과 그 지도안이 필요하며 이를 활용할 수 있는 교사연수가 필요하다. 둘째, 개발한 학습자료를 기초로 하여 학습자의 학업 성취나 태도의 효과를 검증하는 후속 연구가 필요하다. 셋째, Freudenthal의 수학화 과정을 도입한 교재로 실재 수업을 하기 위해서는 교육과정에 대한 연구가 필요하다. 넷째, 수학화 과정을 평가할 수 있는 다양한 평가 방법이 연구되어야 한다.

참 고 문 헌

[1] 강옥기 외 2인, 수학7－가, (주) 두산, 2001.

[2] 교육부, 중학교교육과정해설(Ⅲ)－수학, 과학, 기술·가정, 대한교과서 주식회사, 1997.

[3] 금종해 외 3인, 수학7－가, (주) 고려출판, 2001.

[4] 김수경, Freudenthal의 수학화 과정을 도입한 중학교 함수 영역의 학습자료 개발, 한국교원대학교 석사학위논문, 2002.

[5] 김용성, 문제 상황을 기초로한 수학화 경험이 수학적 신념과 문제해결에 미치는 효과, 한국교원대학교 석사학위논문, 2000.

[6] 우정호, H. Freudenthal의 현상학적 수학교육론 연구, 대한수학교육학회논문집 4권 2호(1994), 93-128.

-------, 학교 수학의 교육적 기초, 서울대학교출판부, 1998.

-------, 수학학습－지도 원리와 방법, 서울대학교출판부, 2000.

-------, 수학 교육학의 지평, 경문사, 2002.

[7] 정영옥, Freudenthal의 수학화 학습－지도론 연구, 서울대학교박사학위논문, 1997.

-------, 현실적 수학 교육에 대한 고찰, 대한수학교육학회논문집 9권 1호, (1999), 81-109.

-------, 수학 교육 연구 동향 － 네덜란드의 현실적 수학교육, 대한수학교육학회논문집 2권 1호, (2000), 283-310.

[8] 차용순, 그래픽 계산기를 활용한 중학교3학년 대수와 함수 영역의 단원 구성, 한국교원대석사학위논문, 2001.

[9] de Lange, J. Assessmemt : No chance without problems. In T. A. Romberg(Ed.), *Reform in school mathematics and*

authentic assessmemt(pp. 87-172). Albany: State University of New York Press.

de Lange, J. & Verhage, H. B. The Hewet Project, *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3 ,249-254, 1987.

[10] Freudenthal, H. *Educational studies in Mathematics*, Geometry and the devil and the deep sea, 3, 413-435,1971.

--------------, *Mathematics as an educational task*, Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1973.

--------------, *Weeding and sowing : preface to a science of mathematical education*, Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1978.

--------------, *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1983.

--------------, *Revisiting Mathematics Education*, china Lectures, Kluwer Academic publisher, 1991

[11] Gravemeijer, K. *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 3, 255-261, 1987.

----------------, Context Problems and Realistic Mathematics Instruction. In Gravemeijer, K.. Van den Heuvel, M. Streefland, L.(Eds). *Contexts Free Productions Texts and Geometry in Realistic Mathematics Education*, Utrecht : OW&OC pp.10-32, 1990.

----------------, *Developing realistic mathematics education*, Utrect : Freudenthal Institute, 1994.

----------------, Instructional design for reform in mathematics education. In Beishuzen, M. Gravemeijer, K. Van Lieshout , E. *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures(Eds)*, Utrecht : Freudenthal Institute, 1997.

K .Gravemeijer & M. Doorman, Context Problems in Realistic Mathematical Education : A Calculus Course as an Example, *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129, 1999.

K. Gravemeijer, K. P. E, An Instruction Theoretical Reflection on the Use of manipulatives, *In : Streefland , L.(ed), Realistic Mathematics Education in Primary School,* 57-76, 1991.

[12] Krygowska, A. Z , Processus de la mathematisation dans L'enseignement *Educational Studies in Mathematics*, 1, 9-16, 1968.

[13] Steiner, H. G. Example of Exercises in Mathematizationon the Secondary School Level, *Education Studies in Mathematics,* 1, 181-201, 1968.

[14] Streefland, H. G. *Proceedings of the 12th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, Reconstructive Learning, 1, 76-91, 1988

[15] Treffers, A. *Three dimension : A model of goal and description in Mathematics education - The Wiscobas Project*, Dordrecht, Kluwer Academic Publisher, 1987.

-------------, Streefland, L.(ed), *Realistic Mathematics Education in Primary School* On The occasion of the opening of the Freudenthal Institute Utrecht, CD β press, pp11-20, 1991.

[16] Wheeler, D. *Australian Mathematics Teacher*, Mathematisation : The Universal Capability,38(4), pp23-35, 1982.

인터넷 사이트

http://www.mathlove.org

http://www.fi.uu.nl

ABSTRACT

The development of learning materials into introducing Freudenthal theory

-Focusing on "the letter and formula" of the category of Algebra for Middle school-

Son, Su Youn
Major in Mathematics Education
Graduate school of Education
Sungshin Women's University
Supervised by professor In, Byung Sik Ph.D.

The purpose for this study is to develop learning materials for "the letter and formula" among the category of Algebra based on the Freudental theory.

This research also aims at revising the residual problems and improving them, so teachers would achieve more proper method.

These learning materials introduce the letter through the experience of real life, activities and rich bare context questions after achieving mental object of the letter. This procedure is expected by the students to remove the cognitive confusion caused by unexpected introduction of the letter.

In addition, algebraic consideration should be improved by moderate formalization through the alternation working of the substance and

phenomenon. RME(Realistic Mathematics Education) in the Netherlands approved that it is possibility to apply Freudenthal theory.

According to Gravemeijer, the approach toward the realistic textbook is very useful to develop the ability to understand the mathematical basic concept[11].

In this research, learning materials has based on Freudental theory and RME. Furthermore ,the courses and the aim for the letter teaching have been established by the analysing about the 7th education process.

According to the teachers and preliminary teachers-oriented survey, learning materials has been regulated and improved.

<부록1>

문자의 이해

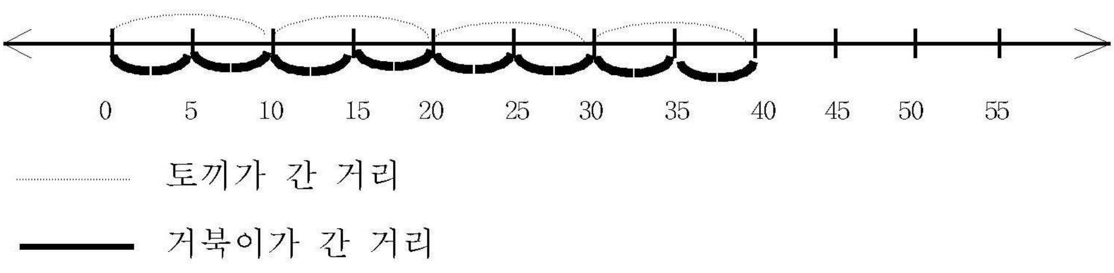
우리 주변에서 일어나는 여러 가지 현상에 대해 문자를 이용하여 나타내며 변수의 여러 가지 의미를 직관적으로 이해하고 발견하여 대수적인 식으로 나타내 보자.

1. 문자의 이해

• 토끼와 거북이의 경주

토끼와 거북이가 40km의 경주를 하기로 하였다. 토끼와 거북이는 일정한 속도로 달린다고 하자. 토끼는 한 시간에 10m로 달리고 거북이는 한 시간에 5m로 달린다고 한다.

다음 수직선은 토끼와 거북이가 간 거리를 나타낸 것이다.



1)위의 수직선을 보고 토끼와 거북이가 간 거리를 표로 만들어 보자

시 간	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
토끼가 간거리	10m	20m	30m			60m	70m				110m
거북이가 간거리	5m	10m			25m					50m	

2)위의 표를 보고 다음 (　)를 채워라

<u>토끼가 간거리</u>

1시간 : $10\times(1)=10$

2시간 : $10\times(2)=20$

3시간 : $10\times(3)=30$

4시간 : $10\times(4)=40$

…

x 시간 : $10\times(\ )=(\ )$

<u>거북이가 간거리</u>

1시간 : $5\times(1)=5$

2시간 : $5\times(2)=10$

3시간 : $5\times(3)=15$

4시간 : $5\times(4)=20$

…

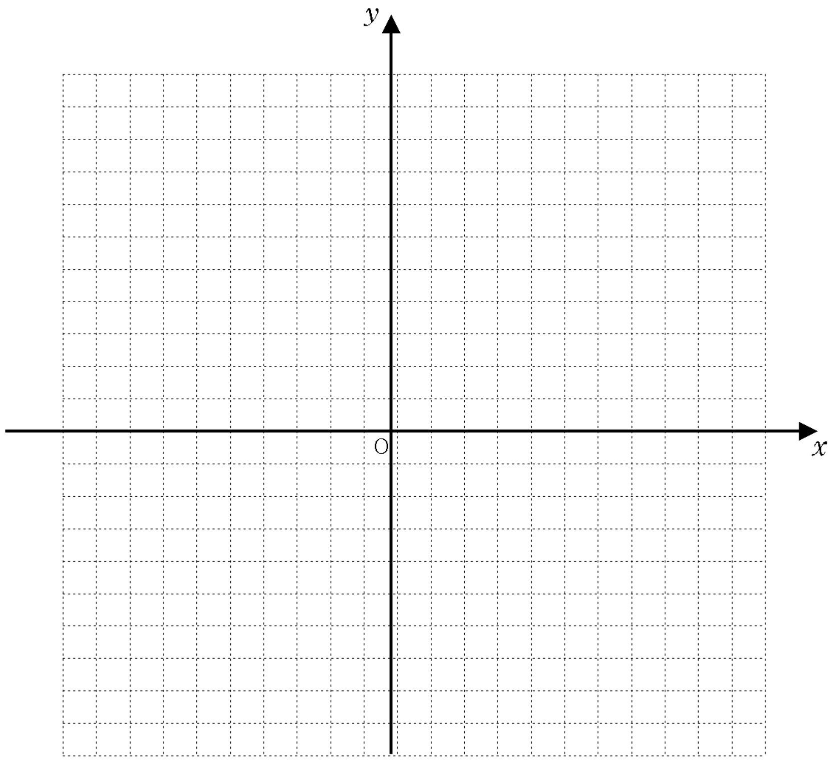
x 시간 : $5\times(\ )=(\ )$

3)토끼가 40km를 경주하는데 걸리는 시간은?

거북이가 40km를 경주하는데 걸리는 시간은?

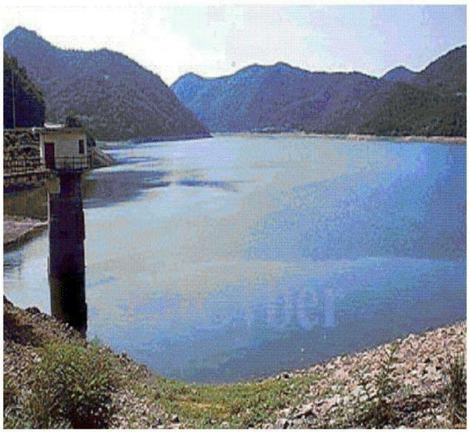
4)이를 문자로 사용하여 식으로 나타내어라.

5)이것을 보고 좌표에 나타내어보아라.



6) 4)에서 쓴 문자를 다른 문자로 바꾸면 변화가 있는가?

• 저수지 문제



우리나라는 해마다 찾아오는 봄 가뭄으로 농촌에서는 물의 부족사태가 심각하다. 경기도 이천의 한 마을에는 이런 물 부족 사태를 막기 위해 물을 저장하는 저수지를 만들어 물을 저장하고 있다.

현재 이 저수지의 물의 양은 10000l라고 한다. 그러나 계속되는 가뭄으로 물은 조금씩 감소하고 있다고 한다. 이 저수지 물을 사용하는 마을은 영수네 마을, 수민이네 마을, 재민이네 마을 그리고 수정이네 마을이다. 영수네 마을은 하루에 10l 를 사용하고 수민이네 마을은 20l 를 사용하고 재민이네 마을은 5l 를 사용하고 그리고 수정이네 마을은 30l 를 사용한다고 하자.

1) 4개의 마을에서 20일 동안 사용되는 물의 양은 얼마인가?

다음 표를 작성해 보자.

마을	1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일	8일	9일	10일	11일
수민	20	40									
수정	30	60									
재민	5										
영수	10	20									

2) 수정이네 마을이 20일 동안 쓰는 물의 양은 다음과 같이 말 할 수 있다.

1일 $30l \times 1 = 30$

2일 $30l \times 2 = 60$

3일 $30l \times 3 = 90$

10일

일후 $30l \times (\quad) = (\quad)$

3)다른 마을도 2)번과 같이 식을 만들어 보자

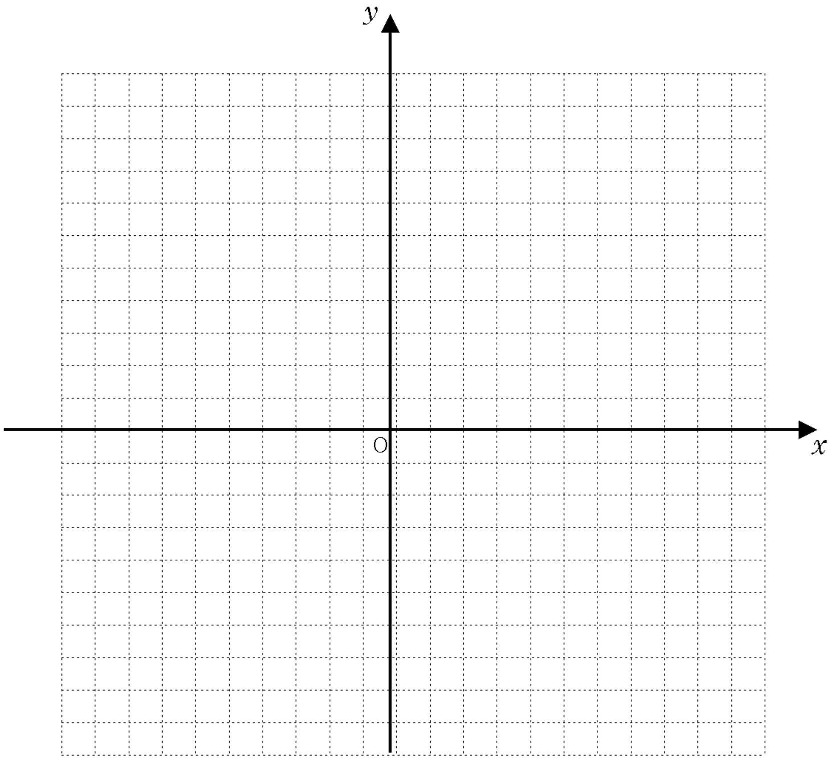
4)4개 마을이 하루에 쓰는 물의 총양은 어떤가?

5) 이를 식으로 나타내어 보자

6) 10일후에 남아 있는 저수지의 물의 양은 몇 l 인가?

7) 남은 물의 양과 쓰는 물의 양 사이에는 관계가 있는가?

8)이들의 관계를 좌표로 나타내어보자



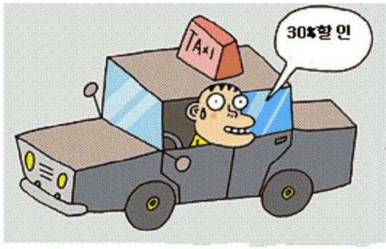
• 연극 한 컷 장면

교과서에서는 문자사용에 대한 상황적 설명이나 충분한 연습 없이 바로 도입하는 경우가 많다. 그래서 문자사용에 익숙하지 않고, 특히 다양한 상황 표현을 어렵게 생각한다. 문자를 다루는데 있어 가장 중요한 부분이 문자를 사용하여 상황을 표현하는 능력일 것이다. 문자를 처음 도입할 때, 여러 상황을 제시하고 그 상황을 문자로 나타내어보게 함으로써 문자사용의 편리함과 간단함, 유용함을 느낄 수 있을 뿐 아니라 문자에 대한 친근감을 가지게 할 수 있다.

다음과 같은 활동을 통해서 문자의 이해를 증진하고자 한다.

택시 기사 아저씨의 고민

해설 택시 기사 아저씨는 5월 한 달 동안 모든 요금을 30% 할인하여 영업을 하였다. 그리고 택시 앞 유리창에 “30% 할인”이라고 커다랗게 써 붙였다.
첫 날!



맹구 (택시를 타고) 아저씨! 청량리에서 마포까지는 얼마예요?

택시기사아저씨 $1km$에 5,000원이고 청량리에서 마포까지는 $3.5km$이니깐 $\boxed{\quad}$ 입니다. 그런데 오늘부터 30% 할인 영업을 하므로 $\boxed{\quad}$원이 할인되어서 $\boxed{\quad}$ 원 입니다.

맹구 아하!

짱구 (서울의 지도를 보면서) 아저씨, 그럼 종로에서 신촌까지는 얼마예요?

택시기사아저씨 거리가 $5km$이고 30%가 할인 되므로 $\boxed{\quad}$ 원 입니다.

짱구 아하!

짱구 (다른 곳을 보면서)아저씨, 경희대에서 시립대 까지는 얼마예요?

아저씨 2500원의 30%는 $\boxed{\quad}$이니까 $\boxed{\qquad}$ 원 이란다.

맹구 (짱구가 보는 안내책자를 보며) 아저씨, 여의도에서 서울역까지는 얼마예요?

아저씨 어휴! 이렇게 일일이 대답해주다가는 운전을 못하겠군.
(골똘이 생각하다 표정이 밝아지며)그래! 결심했어.

해설 택시기사아저씨는 밤새 고민하다 다음날 택시 앞에 “30% 할인”이라는 종이를 떼어 내고 다음과 같이 쓰인 종이를 다시 붙였다. 그 후에는 일일이 대답하지 않아도 되었다고 한다. 과연 아저씨는 어떻게 써 붙였을까? 거리에 따른 값을 x로 놓고 **할인된 가격값**을 식으로 나타내어라.

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

1) 위의 활동을 통해 다음의 표를 작성해 보자

원래 가격	할인된 가격	내야할 돈	원래 가격	할인된 가격	내야할 돈
100원	$100 \times 0.3 = 30$	70	a 원	$a \times (\ ) = (\ )$	
200원	$200 \times 0.3 = 60$	140	x 원		$(\ ) - (\ ) = (\ )$
350원			2500원		
1000원			5000원		

2) 영자문방구에서는 물건 값의 50%를 할인해 준다고 한다.
1000원을 하는 공책을 산다면 얼마를 지불해야겠는가?

3) 이를 식으로 나타내어 보아라.

4) 어떤 물건이 a 원일 때 b %로 할인을 해 준다면 이 물건의 가격은 어떻게 될까?

2. 일차식의 계산

▪ 저울문제

수민이는 시장에서 딸기 2㎏, 사과 2㎏, 포도 2㎏을 샀다.

1)저울의 한쪽에 딸기 1㎏과 사과 2㎏을 놓았다. 이 저울이 수평을 유지하려면 나머지 한 쪽에 (   )

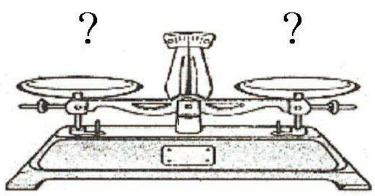
과 (   )를 놓으면 된다.

2)이것을 다시 문자를 이용하여 식으로 나타내 보자.

a=딸기 1kg

b=사과 (   ) kg

c=포도 (   ) kg이라고 하면



$a+b=$ $\boxed{}$

3)위의 저울에서 한쪽의 딸기를 제거하면 저울은 기울여 진다. 그렇다면 수평을 유지하기 위해서는 어떻게 해야 하는가?

4) 3)의 과정을 문자를 사용하여 나타내면

$\boxed{}$ 이다.

5) 양 쪽 접시를 서로 바꾸면 어떻게 될까?

6) 이것을 문자로 사용하여 나타내면 $\boxed{}$ 이다.

7) 같은 무게를 가진 사과 6개(한 개의 무게는 300g), 바나나 10개(한 개의 무게는 10g), 수박 2통(한 개의 무게는 1kg)이 있다. 이것을 저울의 양쪽에 놓을 때 저울이 수평이 되기 위해서는 한 접시에 어떻게 놓아야 하는가?

8)이것을 영자. 재민, 수민, 진영에게 똑같이 나누어 주려고 한다. 그렇다면 한 사람이 먹을 수 있는 과일은 몇 g인가?

한 접시에 담겨져 있는 과일은 사과 (　　)개, 바나나(　　)개, 수박(　　)통이고, 이들의 무게의 총합은

사과의 무게 $=300g\times(\quad)=(\quad)$

바나나의 무게 $=10g\times(\quad)=(\quad)$

수박의 무게 $(\quad)g\times1=(\quad)$ 이므로

총 무게는 (　　　　) g이다.

이것을 (　　)명에게 나누어 주면 된다.

따라서 한 사람이 먹을 수 있는 과일의 무게는 (　　) g이다.

그런데 재민과 영자는 자신이 먹을 과일의 무게가 얼마인지 알고 싶어서 저울을 사용하여 달아 보았더니 (　　　).

즉 L=왼쪽 접시에 있는 과일의 무게, R=오른쪽 접시에 있는 과일의 무게라고 하면

$$L\div2=R\div(\quad)$$ 이 된다.

▪ 물대기

지연은 펌프를 가지고 밭에 물을 대고 있다. 집으로 가야 될 일이 생겨서 밭에 있을 수 없게 되었다. 그래서 펌프가 밭에 물을 얼마나 대고 있는지 관찰했다.

시 간 (분)	0	1	2	3	4	5
물의 양(kg)	0	20	40	60	80	100

1) 지연이가 집으로 돌아간 뒤 30분 후에 밭에 왔다면 펌프가 밭에 댄 물의 양은 얼마인가?

2) 그렇다면 t 시간 후에 밭에 댄 물의 양은 얼마인가?

t 시간은 (　　　)분이다.

물의 양 =(　　　)×(　　　)

3) x 분 후의 물의 양을 문자식으로 나타내 보자.

4) x 분 동안 밭에 댄 물의 양은 (　　　　　) 이고, a 시간 동안 밭에 댄 물의 양은 (　　　　　　　)이다.

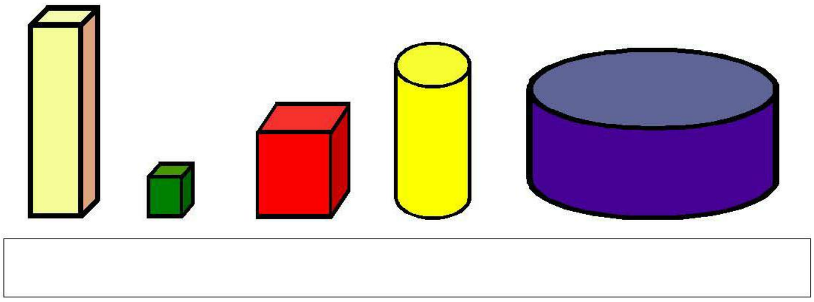
그렇다면 a 시간 x 분 동안 밭에 댄 물의 양은 (　　)이다.

5) 위의 표를 가지고 아래의 그림을 채워보자.

▪ 동류항의 계산

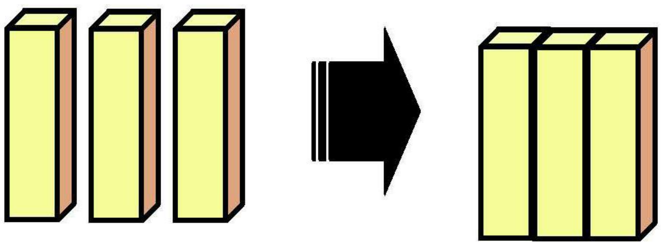
대수 막대를 이용하여 동류항을 계산하자.

◎ 각각의 대수막대가 뜻하는 것 (학생들 스스로 정한다.)

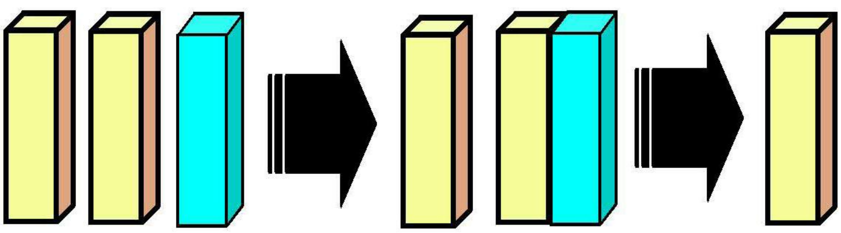


♠ 대수막대를 이용하여 식 간단히 하기

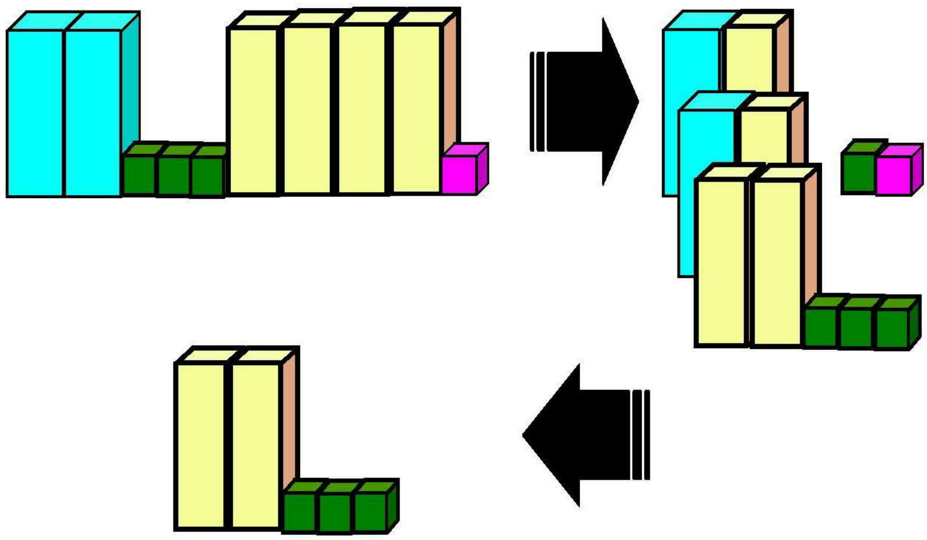
[예 1] $x+x+x$



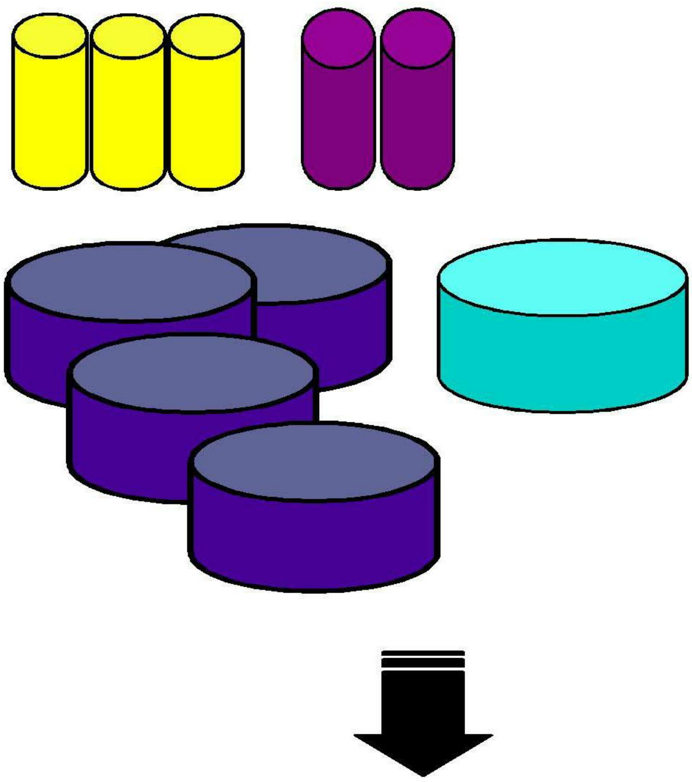
[예 2] $x+x-x$

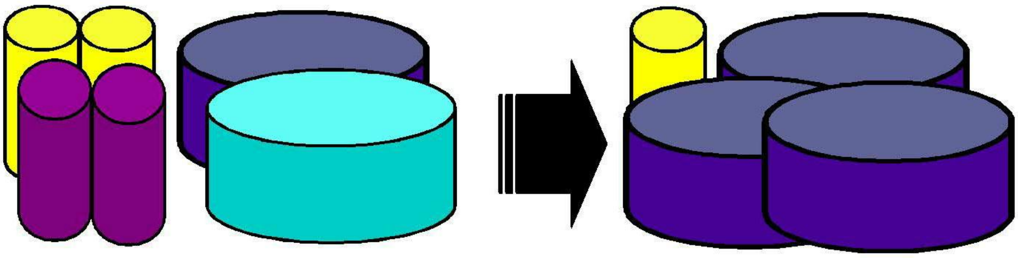


[예 3] $-2x+3+4x-1$



[예 4] $3x-4y-2x+y$





1) 우리는 기호 ×, ÷을 생략하는 방법을 알고 있다.
그럼 $2x-3x$, $3y-1+4y+7$ 과 같은 식은 어떻게 간단히 할까?
대수막대를 이용하여 그 방법을 알아보고 직접 계산해 보자.

(1) $x+2x+x$

$=$

(2) $-3x+2x-x+2x$

$=$

(3) $2x+3+4x+2$

$=2x+4x+3+2$

$=$

(4) $3-2x+3x-5$

(5) $3x-2-2x+5$

(6) $y+3-3y-4$

(7) $-2x+3y+x-3y$

(8) $3x-4-3y+4$

2) 앞의 결과로 알 수 있는 사실을 간단히 정리하여 써라.

3) 서로 계산하여 간단히 할 수 있는 것끼리 같은 색깔을 칠하여라.
(게임을 먼저 수행한 조에는 수행점수에 +1을 준다.)

$-\frac{3}{2}$	$100y$	$-4y$	$\frac{2}{3}y$	91	b	$-b$	$3b$	$\frac{1}{2}x$	$3x$	x
4	-8	$3y$	$-\frac{y}{4}$	-20	$\frac{b}{3}$	$-4b$	$2b$	$\frac{1}{2}b$	$-2x$	$\frac{2}{3}x$
-3	5	$\frac{1}{3}a$	$2a$	$\frac{7}{3}a$	$-2b$	$7a$	$12a$	$\frac{3}{2}x$	$\frac{5}{2}y$	$-3x$
7	$-a$	$97a$	$-8a$	$44a$	$100a$	$-13a$	$-x$	a	$3a$	$-y$
15	$-11a$	$9a$	$-25a$	$\frac{3}{8}a$	$-4a$	$2x$	$-7a$	$-\frac{3}{2}a$	$-2a$	100
$-4y$	$14a$	$-10a$	$\frac{7}{4}a$	$-15a$	$4x$	$-\frac{2}{3}a$	$-29a$	$10a$	$-\frac{a}{2}$	8
$2y$	$-\frac{y}{4}$	$\frac{34}{53}a$	$-9a$	$63a$	$-\frac{a}{6}$	$29a$	$\frac{6}{7}a$	$-23a$	6	-5
$\frac{2}{3}y$	$3y$	$4y$	$-7a$	$53a$	$-5a$	$\frac{a}{6}$	$24a$	10	-2	-9
$-2y$	$-\frac{5}{2}x$	$5x$	$-6b$	$\frac{3}{2}a$	$4a$	$-15a$	$-y$	$5y$	-78	3
$-4x$	$-10x$	$97x$	$5b$	$\frac{3}{2}b$	$16a$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{2}y$	$2y$	y	$-\frac{1}{2}$
$\frac{y}{3}$	$100x$	$-\frac{1}{2}b$	$53b$	$9b$	$-8b$	$6b$	$\frac{1}{2}$	$-3y$	$4y$	$\frac{1}{2}y$

4) 이와 같이 간단히 계산할 수 있는 항을 (   )이라고 한다.
각자 나름대로 (   )에 대하여 정리해 보자.

5) 아래의 표에 5, 6, 19, 20을 표현해 보아라.

단, 문자는 a, b, x, y 로 나태내자. 예를 들어, $15a, \frac{2}{3}a, \cdots\cdots$ 등과 같이 나타내고 같이 계산할 수 있는 것은 같은 색깔로 색칠해 보자.

<마방진을 이용한 동류항 계산>

다음 그림에서 가로, 세로, 대각선에 놓인 세 식의 합이 모두 같도록 빈 칸에 들어갈 알맞은 식을 구하여라.

1)

$5x+1$	$x-1$	$-3x-3$
-4		

2)

$-x-y$		
$6x-2y$	$2x$	
		$5x+y$

3)

$-5a+1$	6	
	$-2a+2$	
	$-4a-2$	

4)

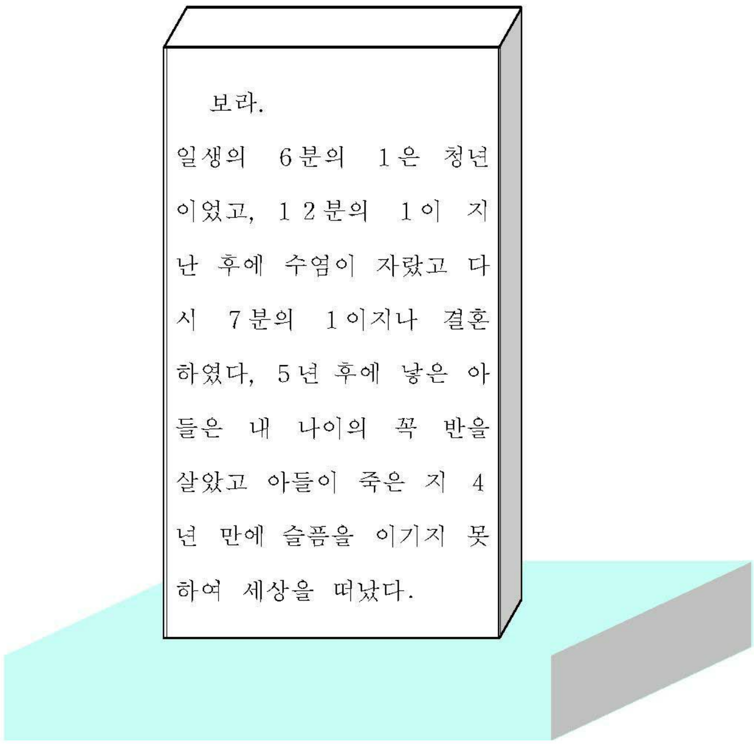
$9x-3$			$6x$
		$3x+3$	
$2x+4$	6	$-x+7$	$5x+1$
		$8x-2$	$-6x+12$

5) 위의 마방진의 규칙을 말하여 보자.

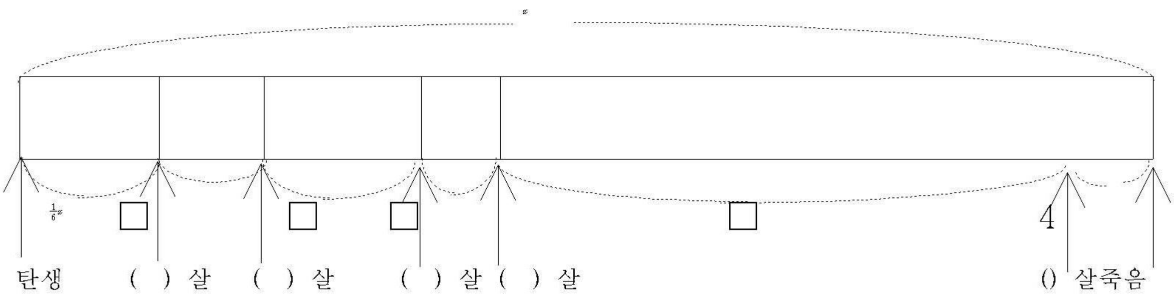
6) 위의 마방진을 사용하여 식을 세워보자.

• 디오판토스의 비문

다음은 디오판토스의 비문에 적혀 있는 글이다. 이 글을 읽고 디오판토스는 몇 살까지 살았는지 계산해 보자.



*디오판토스의 나이 계산



1) 위의 (   ) 을 채운 후 이것을 식으로 나타내어 보자.

2) 식을 이용하여 디오판토스의 나이를 구하여 보자.

3) 우리도 디오판토스처럼 멋진 비문을 써보자.
나는 앞으로 어떤 삶을 살아갈 것인지 잘 생각해 보고 자신의 비문을 적어라. 만약 후세 사람들이 여러분의 비문을 읽은 후 어떻게 여러분의 나이를 알아낼지 계산하여라.

<나의 비문>

• 시장에서 물건 사기

민경은 엄마 심부름으로 경동시장에 갔다. 엄마가 $12{,}000$ 원을 주면서 사과를 사가지고 오라고 했다. 사과의 가격을 모르는 민경은 우선 사과를 파는 가게에서 사과의 가격을 알아보기로 했다 A 가게에서는 사과 2 개에 1,000원, B 가게에서는 사과 5 개에 5,000원, C 가게에서는 사과 30개에 12,000원이라고 한다.

1) A 가게에서 사과 1 개의 가격은 얼마인가? 또한 민경이가 A 가게에서 사과를 산다면 몇 개를 살 수 있겠는가?

A 가게에서 살 수 있는 사과의 개수를 a 라하고 이것을 식으로 나타내어 보자.

2) 민경이가 B 가게에서 사과를 산다면 사과 1 개의 가격은 얼마이고 또한 몇 개를 살 수 있는가?

(단, b 는 B 가게에서 살 수 있는 사과의 개수)

그리고 이를 식으로 나타내어 보자.

3) 민경이가 C 가게에서 사과를 산다면 사과 1 개의 가격은 얼마이고 또한 몇 개를 살 수 있는가?

(단, C 가게에서 살 수 있는 사과의 개수는 여러분이 좋아하는 문자로 두어라.)

그리고 이것을 식으로 나타내어 보자.

4) 그렇다면 민경은 어느 가게에서 사과를 사겠는가?

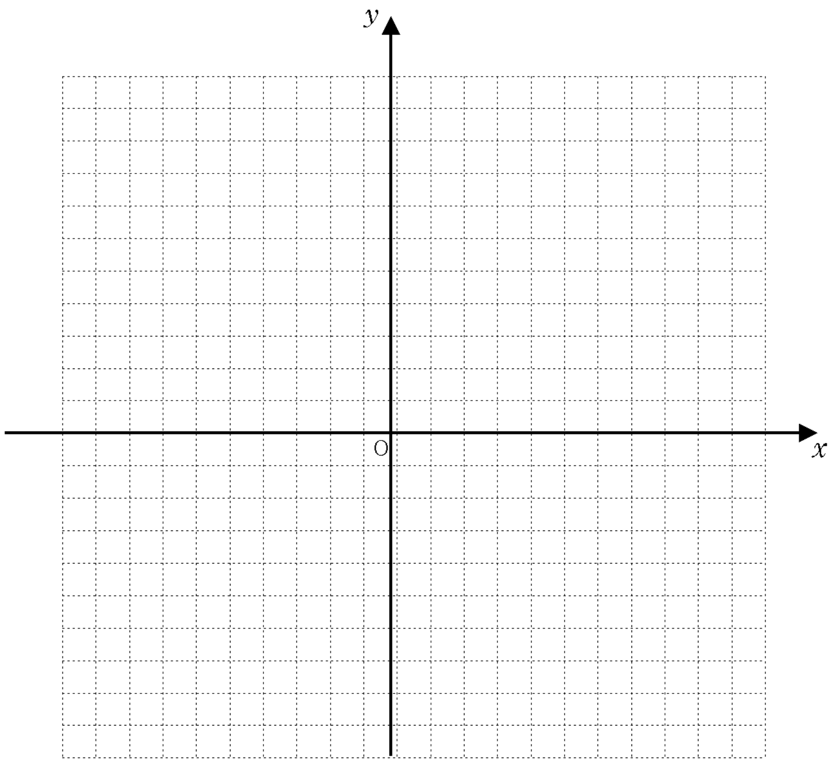
(단, 사과의 품종은 다 같다.)

5) 사과의 총 가격을 x라 두고 민경이가 결정한 (   ) 가게의 사과의 가격을 y라 두면, 이들 사이에는 어떤 관계가 성립하겠는가?

6) 위의 관계를 보고 아래의 표를 완성해 보자.

x	1	2	3	4	5	6	7	…
y								…

7) 이 관계를 좌표평면 위에 나타내어 보자.



8) 여러분이 다른 상황을 통해서 위와 같은 과정을 다시 한번 해보자.

• 그림으로 풀어 보는 연립방정식

1) 다음 만화를 보고 가장 큰 닭, 중간 크기의 닭, 가장 작은 닭의 무게를 각각 구하여라.

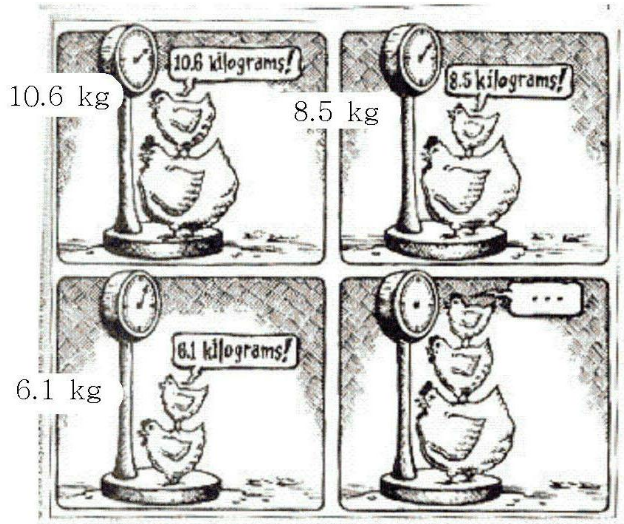


Fig. 1 The Chicken Problem

(1) 위의 그림을 보고 이를 문자를 사용하여 식으로 나타내어 보자.

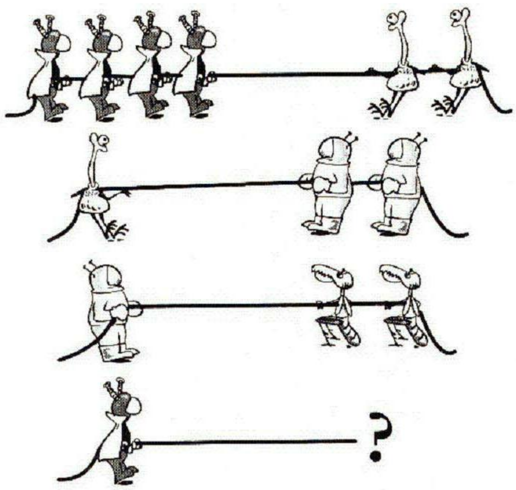
(2) 친구들에게 다음과 같은 수수께끼를 내보자.

나와 엄마의 몸무게의 합은 (   ) 이고, 엄마와 동생의 몸무게의 합은 (   ) 이다. 그러면 나와 동생의 몸무게의 합은 얼마인가?

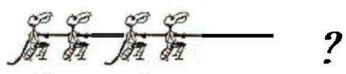
2) 우주인들이 친목도모를 위하여 친선 경기를 하고 있다.

(1) 아래 그림은 줄다리기 결과를 나타낸 것이다. 앞의 세 경기가 모두 무승부로 끝났을 때, 마지막 경기 역시 무승부로 끝나려면 어떤 팀과 겨뤄야 하는가? 옆의 빈 칸에 나타내어 보아라.

(단, 문자를 사용하여 식으로 나타내어라.)

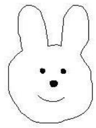
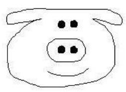
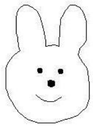


(2) 또한, 아래 그림에서의 시합도 무승부로 끝나려면 어떤 팀과 경기를 해야 하는가?



위의 과정에서 문자를 이용하여 식으로 나타내어라.

3) 아래 표에서 동물의 얼굴 뒤에는 숫자가 숨겨져 있다. 질문에 답하면서 그 숫자를 찾아보자.

	$+$	12	$=$	
$\times$		$-$		$\times$
	$-$		$=$	2
‖		‖		‖
	$-$		$=$	40

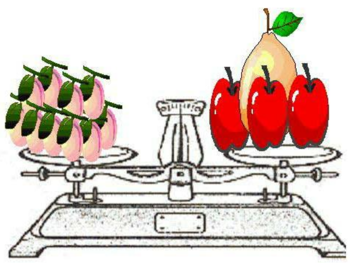
(1) 각 동물을 문자로 놓고, 조건에 맞게 식을 세워 보아라.

(2) 각 동물들의 해당하는 숫자를 구하여라.

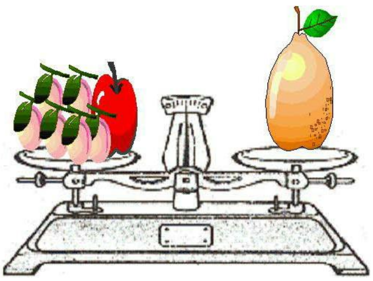
(3) 위의 표에 나타난 동물들을 다른 동물로 바꾸면 해당하는 숫자는 어떻게 되는가?

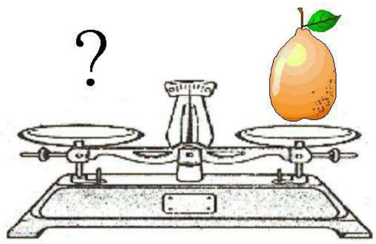
4) 사과 3개와 배 1개는 복숭아 10개와 평형을 이루고 있다. 또, 복숭아 6개와 사과 1개는 배 1개와 평형을 이룬다.

(가)



(나)





(1) 사과, 배, 복숭아를 각각 미지수로 설정하여 (가), (나)에 해당하는 식을 세워 보아라.

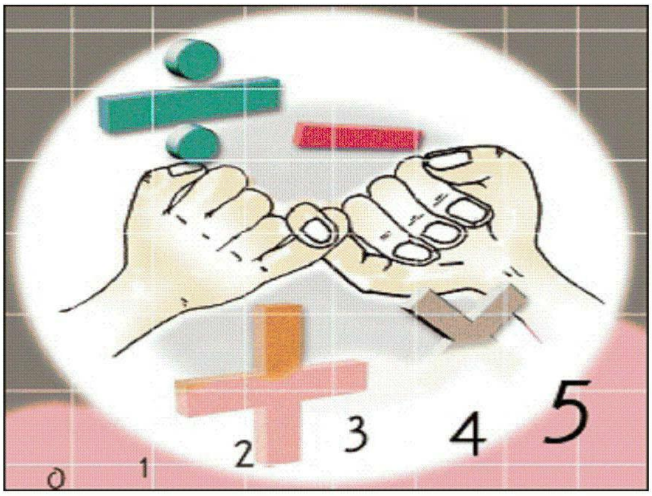
(2) 배 1개와 평형을 이루게 하려면 몇 개의 복숭아가 필요할까? 또는 사과는 몇 개가 필요할까?

<부록2> 호응도 조사 설문지

제목 : Freudenthal의 이론을 적용한 학습자료 개발

-중학교 대수영역 중 '문자와 식'을 중심으로-

에 대한 호응도 조사 설문지



안녕하십니까? 저의 설문에 응해 주셔서 감사드립니다. 이 설문지는 중학교 대수영역에 'Freudenthal의 수학화 이론을 도입한 학습자료 개발'(중학교 대수영역 중 '문자와 식'을 중심으로)라는 연구를 위해 개발된 학습 자료에 대한 의견을 반영하고자 제작되었습니다. 조사결과는 위의 목적 이외에는 일체 사용되지 않을 것을 약속드립니다. 솔직한 생각과 의견을 적어 주시면 감사드리겠습니다.

성신여자대학교 교육대학원 수학교육 전공 손 수 연.

<질문에 해당하는 부분을 V로 기입해 주십시오.>

1.개발한 학습 자료가 대수영역의 교수학습 자료로 효과적이라고 생각합니까?

① 매우 효과적이다.
② 대체로 효과적이다.
③ 보통이다.
④ 별로 효과적이지 않다.
⑤ 전혀 효과적이지 않다.

아래의 2, 3번은 1번에서 ①②③을 선택하신 분만 답해 주십시오.

2. 개발한 학습 자료가 대수 영역의 학습에 효과적이라고 생각하시는 이유는 무엇입니까? (모두 고르시오)

① 학습에 흥미를 유발할 수 있기 때문에
② 실생활과 관련된 문제 상황을 통해 학생이 수업에 적극 참여할 수 있기 때문에
③ 결론을 제시하기 보다는 토의를 통해 학생들 스스로 결론을 이끌어내서 문자개념을 잘 이해할 수 있기 때문에
④ 발견학습 및 탐구활동을 통해 스스로 문제를 해결할 수 있는 능력을 신장시킬 수 있기 때문에
⑤ 기타( )

3. 개발된 자료 중 가장 마음에 드시는 부분은 어느 부분입니까? 그리고 그 이유는 무엇입니까?

아래의 4, 5번은 1번에서 ④⑤를 선택하신 분만 답해 주십시오.

4. 개발한 학습 자료가 대수영역의 학습에 효과적이지 못하다고 생각하시는 이유는 무엇입니까? (모두 고르시오.)

① 문제 유형이 다양하게 제시되지 못하기 때문에
② 수준별 학습이 가능하지 않기 때문에
③ 활동과 경험에 초점을 두어 계산능력을 약화시키기 때문에
④ 학습목표와 학습내용의 연계성이 부족하기 때문에
⑤ 기타( )

5.개발된 자료 중 가장 마음에 드시지 않는 부분은 어떤 부분입니까?

6. 본 학습자료를 수학수업 시간에 활용할 생각이 있으십니까?

① 있다. ② 없다. ③ 생각해 보겠다.

7. 개발한 학습자료에 개선해야 할 점이나 더 추가하고 싶은 내용이 있다면 구체적으로 적어 주십시오.

<설문 조사에 참여해 주셔서 감사드립니다.>