



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

姜秉介 教授指導  
碩士學位 請求論文

Freudenthal 의 수학화 이론을 적용한  
학습자료개발  
(기하영역을 중심으로)

2008 年

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

이수진

Freudenthal 의 수학적 이론을 적용한  
학습자료개발  
(기하영역을 중심으로)

姜秉介 教授指導

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

2008 年 12 月

誠信女子大學校 教育大學院

教育學科 數學教育專攻

이수진

# 認 准 書

이수진의 碩士學位 論文을 認准함

審査委員 \_\_\_\_\_ 印

審査委員 \_\_\_\_\_ 印

審査委員 \_\_\_\_\_ 印

2008 年 12 月

誠信女子大學校 教育大學院

## 논문개요

수학교육의 근본적인 문제는 학습자의 현실상황이나 문제를 고려하지 않고 기성 지식을 주입하는데 있다. 18세기 이래 이와 같은 수학교육의 문제를 극복하기 위한 방안으로 역사 발생적 원리가 제기되어 계속 논의되어 왔다. 그리고 수학적 지식의 발견을 안내하는 발견학습과 수학적 지식은 인간의 정신적인 활동에 의해 구성된다고 보고 학습자의 활동을 중시하는 교수-학습 지도가 강조되어 왔다. 이러한 흐름은 수학적 활동을 통하여 학습자 스스로 수학을 구성해 나아가야 한다고 주장한 Freudenthal의 수학적 활동 이론과 부합되는바 그의 이론은 우리에게 많은 시사점을 주고 있으며 여러 수학교육자들에 의해 주목 받아왔다.

Freudenthal에 의하면, 수학은 확실성을 추구하는 정신적 활동이며, 현실을 바탕으로 상식에서 출발해서 반성적 사고를 통해 내용과 형식, 현상과 본질의 교대 작용을 반복하면서 조직화하는 활동이다. Freudenthal은 이러한 인간의 정신적 활동으로서의 수학의 가장 근본적인 특성을 현상의 조직화 활동이라 보고 이것을 수학적화라고 표현하였다. 수학적화란 '현상을 수학적 수단인 본질로 조직화하는 활동'을 의미하며 수학적화 과정은 현상과 본질의 교대 작용에 의해 수준 상승이 이루어지는 불연속적인 과정이다. Freudenthal은 수학의 역사 발생 과정과 개인의 수학의 발생 과정이 동일선상에 있다고 보고, 바람직한 수학교육은 선조들이 이미 발명한 수학을 교사의 적절한 안내를 통해 학습자 스스로 재발명하게 할 것을 요구한다. 본 논문은 Freudenthal의 이러한 점진적인 수학적화 활동을 통한 학습 원리를 살펴보고 점진적인 수학적화를 통한 기하영역 지도에 대하여 수학적화 학습-지도 원리를 좀 더 구체화하고자 시도하였다.

# 목 차

## 논문개요

I. 서론	1
II. 이론적 배경	5
1. Freudenthal 의 수학적화	5
1) Freudenthal 수학적관	5
2) 수학적화의 의미와 수학적화 활동	7
3) Freudenthal 의 수학적화 학습 이론	11
2. 네덜란드의 현실주의 수학교육	14
1) RME(Realistic Math Education)의 기원	14
2) RME 의 학습지도원리	16
3) RME 의 학습과정 모형	20
III. 연구의 실제	23
1. 제 7 차 수학과 교육과정 개정안에서 살펴본 수학적화	23
2. Freudenthal 의 이론에 근거한 기하 영역 학습지도안 연구	27
1) 학습지도안 I	27
2) 학습지도안 II	28
3. 기대되는 교육효과	29
IV. 결론	31

## 참고문헌

ABS TRACK

부록 : 학습지도안 I

부록 : 학습지도안 II

## I. 서론

현대 사회에 있어서 자연과학뿐만 아니라 경제학, 경영학, 심리학 등 사회과학의 분야에서도 다양한 방법으로 수학이 응용되고 있다. 특히 기하학적 방법과 기하학적 사고와 방법, 기하학적 아이디어들이 수학의 다른 영역과 실생활 상황에서 문제를 표현하고 해결하는 데 유용하기 때문에 중·고등학교에서 기하 교육이 강조되어야 함은 당연한 일이다. 기하학은 연역적 추론방법을 지도하고 학습하는데 가장 효과적인 영역으로 생각되고 있으며 대수와는 달리 다양한 해결방법이 존재하므로 기하는 창조적 사고력을 신장 시키는 좋은 소재가 될 수 있기 때문이다. 이에 기하 교육의 목표와 의의를 설정한다.

기하 교육의 목표는 평면도형과 입체도형의 개념과 그 기본적인 성질의 이해, 평행이동, 대칭이동, 회전이동 등의 기하학적 변환에 대한 기본적인 사항을 이해하고 증명의 의의와 방법 곧 연역적 방법에 대해 이해할 수 있게 한다는 것이다. 기하 교육은 증명 능력을 개발하고 공간적인 상상력을 신장하며, 기하의 대수적 접근법과 벡터에 의한 접근법의 습득 및 기하학적 개념과 다른 수학적 개념과 통합된다.

또한 우정호[7]에 따르면 기하 교육의 지도의 의의는 다음과 같은 4가지로 정리할 수 있다.

첫째, 기하는 실생활과의 연계성만이 아니라 물리학, 생활 과학, 인문학, 생물학 등의 실제적 문제를 해결하는 데 유용하게 이용되고 응용에 무한한 가능성을 가지고 있다. 특히 평면이나 공간에서의 기하학적 도형의 기본적인 사실을 이해하여 변환에 적용하면 과학, 예술, 건축 도안 등의 분야에 응용될 수 있다.

둘째, 기하학은 논리적 사고력 증진에 중요한 역할을 한다. 기하학은 연역적 추론의 방법을 가르치는 풍부한 기회를 제공해 준다. 서양의 수학교육은 거의 2000 년 이상을 연역적 방법을 가르치기 위한 적절한 수단으로서 유클리드의 원론을 소중하게 여겨 왔다. 연역적 추론과정은 종합적 사고, 해석적 사고, 반례에 의한 반증 등의 수학교육과정에서 사용되고 있다.

셋째, 공간적 추론을 증가시킬 수 있다. 기하학과 공간적 추론은 상호 관련성이 높고 대개의 수학자들은 기하교육과정의 일부에 공간적 추론을 포함시키고 있다. 학교수학의 문제점의 하나로 기하학적 관점의 부재를 지적한 Usiskin 은 기하학을 개념화하는 다양한 방식은 기하학의 필요성에 대해 고유한 관점을 갖는다고 주장하였다.

넷째, 수학에서 기하학은 다른 분야인 대수학, 해석학 등과 깊은 관련을 가진다. 기하학적인 개념은 대수학이나 해석학 등의 개념과 비교할 때 그 방법이나 내용에 있어서 결코 고립될 수 없는 것이다. 즉, 실수에 대한 성질을 기하학으로 표현할 때 영향을 미치는 대수적이고 기하학적인 개념 사이에 연관성, 평면도형의 넓이, 입체도형이 넓이와 부피, 삼각비, 방정식, 함수 등에 기하학이 자연스럽게 통합될 수 있을 것이며 우주 시대가 열리고 있는 이 때 N 차원의 세계도 대수기하학적인 논리이며, 프랙탈 기하학, 카오스이론 등이 모두 기하학과 관련되어 있으므로 기하는 무한한 가능성과 발전성을 내포하고 있다.

학교수학에서 기하교육의 목적이 공간 지각 능력을 키우고 논리적 추론 능력을 향상시키는데 있음에도 불구하고 탐구활동보다는 유클리드 기하의 논리적 증명이나 형식적 내용들만 지나치게 강조하고 있는 것이 현실이다. 이로 인해 학교수학에서 기하교육은 그 중요성에도 불구하고 어렵고

재미없는 부담스러운 영역으로 인식하고 있다. 그리하여 기하영역의 지도에 있어서 Freudenthal의 이론을 도입하려고 한다.

우리나라 제 7 차 교육과정[2]에서도 수학 교육의 목표 중 “ 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.”라는 항목을 제시하고 있듯이, 기하 교육을 올바르게 하기 위해서는 지도하는 것이 아니라 현실 세계에서 다루어질 수 있는 수학적 상황을 이해하고 수학화할 수 있도록 지도해야 한다는 의견들이 있다.

오늘날 많은 교육 선진국들이 미래 사회를 살아가야 할 학생들이 갖추어야 할 수학적 소양을 함양시키기 위한 방안으로서 구성주의를 기반으로 하여 인간 활동으로서의 수학, 결과보다는 과정으로서의 수학에 관심을 두고 활발한 연구 활동을 벌이고 있다. 그 중 주목할 만한 것이 네덜란드의 ‘현실적 수학교육’ 이론이라고 할 수 있다[15]. 현실적 수학교육 이론은 현재 OECD 국가를 중심으로 실시하고 있는 ‘학업성취도 국제 비교 연구(Programme for International Student Assessment, 이하 PISA)’에서도 주요 배경 이론이 되고 있으며, 미국을 비롯한 여러 국가에서 공동 연구를 통한 교육과정 개발 작업 등이 추진되고 있다. 현실적 수학교육 이론은 H. Freudenthal 의 수학화 이론에 기초를 둔 것으로, 그 기본 원리는 점진적인 수학화, 안내된 재발명, 수준 이론, 교수학적 현상학이다. Freudenthal 은 수학을 인간의 활동으로 보며 교사의 적절한 안내를 통해 학습자가 재발명해 나가야 한다고 보고 수학의 내적·외적 상황이나 문제와 관련지어 수학을 창안하는 수학화를 학생들에게 경험시킬 필요가 있다고 주장하였다. 이러한 이론적 배경을 기초로 네덜란드에서는 실제로 ‘현실적 수학교육에 기초한 교육과정’을 개발하였다.

1970년대부터 시작되어 오늘날 여러 측면에서 성과를 드러내고 있는 네덜란드의 현실적 수학교육의 핵심은, 무엇보다도, 학생의 현실 속에서 수학이 출발하고 머물러야 하며, 그래야만 학생은 수학의 유용성을 깨닫게 될 것이며, 학생의 마음속에 수학이 진정 중요한 것으로 자리 잡을 수 있다는 것이다.

우리나라에서도 제 7 차 수학과 교육과정과 그에 따르는 교과서를 통하여 주요하게 추구하였던 것은, 학생들이 수학의 유용성을 알도록 하자는 것이었으며, 그 일환으로, 초등학교에서는 ‘생활에서 알아보기’, 중·고등학교에서는 ‘탐구 활동’과 같은 내용이 도입부를 차지하였다. 따라서 학생들에게 적합하고 흥미롭고 많은 생각을 하도록 만드는 상황들이 절실하였다. 그런 점에서 네덜란드의 현실적 수학교육에 기반을 둔 교재에서 제시되고 있는 상황들은 우리나라에 좋은 모범이 된다고 볼 수 있다[10].

따라서 본 논문에서는 먼저 현실주의 수학교육의 원리를 알아보고, 현실주의 수학교육의 원리에 따라 학교 수학에서의 기하부분을 수업할 수 있도록 수학화 활동을 위한 적절한 학습 자료를 개발하고 이를 수업에 적용한 후 수업과정에서 나타나는 수학화 과정을 관찰 분석해 보고자 한다.

## II. 이론적 배경

### 1. Freudenthal 의 수학적화

#### 1) Freudenthal 수학적관

Freudenthal 은 수학을 현실과 상식을 출발점으로 하여 형식과 내용의 교대작용에 의해 조직화·구조화해 가며, 확실성을 추구하는 인간의 정신적 활동으로 보았다[8]. 즉, Freudenthal 은 수학적이란 인간의 정신적 행위에 의해 구성되는 것으로 보는 직관주의 수리철학적 입장을 그의 활동주의적 수학교육론에 기초로 삼았다. Freudenthal 은 실행되는 수학, 수학적 활동의 요체를 수학적화 활동으로 보고 있다. 수학적화란 수학적 수단에 의해 현상을 조직화하는 것을 말하는데 그는 이러한 수학적 활동을 수학적화 활동과 그 인식성의 현재화 활동으로 보며 현상→정리수단인 본질→현상→보다높은 차원의 본질과 같이 교대가 일어나면서 인식 수준의 상승이 일어나는 불연속적인 과정으로 본다. 곧, 현상과 경험을 조직화하고 정리하는 수단인 본질이 그 다음 수준에서는 현상 곧, 연구의 대상이 되는 과정을 반복하면서 수학적 사고 활동이 이루어진다는 것이며, 수학 학습의 본질은 이러한 불연속성이라는 것이다.

Freudenthal 의 이러한 생각은 Van Hiele[6]의 수학적학습수준 이론과 일치하는 것으로써, 반영적 추상화에 의한 수학적 이론의 발생이 내용과 형식의 교대를 통한 추진적인 형식화의 경향을 내포한다는 Piaget 의 주장과도 일치하게 나타난다. Piaget 는 관찰 할 수 있는 내용의 모든 반사는 어떤 형식의 개재를 전제로 하며, 또한 전이된 내용은 반성에 의한

새로운 형식의 구성을 필연화한다고 하였으며, 따라서 반사→반성→반사, 내용→형식→보다 세련된 내용→새로운 형식 등의 끝없는 교대가 행하여진다고 하였다[9].

Freudenthal 은 수학을 현상을 조직하는 본질로 보고 있으나, 이를 플라톤적인 형상이 아닌 구성적이며 상대적인 조직화 수단으로 간주하는데 그에 따르면 수학화는 현실상황에서의 문제를 수학적 수단으로 조직하는 수평적 수학화로 시작되지만, 수학적 경험이 축적되면 수학 학문 내에서 자체의 수학화 곧 수직적 수학화가 시작된다. 이러한 수평적 수학화와 수직적 수학화를 통해 수학을 재조직화 하는 것 또한 수학화의 주요한 활동이다.

“교육자는 고도의 정신을 가진 사람에 의해서 행해지는 활동으로서의 수학의 상이 학생들에게 굳어지는 것을 예방해야 한다. ………지적인 천부 가운데 수학만큼 실제적이고 조화 있게 교육에 관계된 것이 없다. 그러나 거기서 우리는 또한 교육의 내용적인 것과 형식적인 것에 끼워 넣은 것과 함께 피교육자의 인격에 끼워 넣는 것을 강조하여야 한다” 라는 대중 수학교육의 중요성을 강조하고 인간주의 수학교육을 주장하는 Freudenthal 의 입장은 그의 수학관과 연결된다고 생각된다.

Freudenthal 은 현대 수학의 모든 분야에 기하학적 방법과 기하학적 직관이 충분해 있음을 강조하며 도형과 그 관계의 대수적 기술과 그 단순성에 의해 음수와 복소수 및 그 연계와 연계 방식의 타당성이 드러난다고 하면서, 대수는 기하에서 가능하기 때문에 타당하다고까지 주장한다. 그리고 또한 대수적 사고 전략의 중심이 되는 대수적 형식불역의 원리의 기하학적 대수적 형식불역의 원리로 확장을 수학사의 이면에 있는 기본철학으로 보고 있다. Freudenthal 은 현대수학은 알고리즘보다 개념적 사고를 강조하는 점이 특징이지만 알고리즘화를

지향하는 것이 수학의 본성이며, 알고리즘은 자신감을 증대시키고 놀이 본능을 만족시키며 개념적 깊이를 더해주는 기술적 수단이 되는 교육적으로 중요한 것임을 중요시했다.

다시 말해 Freudenthal 의 관점에서 보았을 때 수학에 대한 논리주의나 형식주의 관점은 완성된 지식 체계로서의 수학의 특성을 너무 강조하는 시각이며, 수학을 현실과 고립된 것으로 보게 하는 오류를 낳았고, 오류를 내포할 수 있는 인간의 정신 활동이라는 측면을 경시하고 있다는 부분에서 문제점이 지적되었다. 그리하여 Freudenthal 은 수학의 플라톤적인 이상적 실체를 부인하면서도 수학에 대한 객관적인 타당성 자체를 부인하지는 않으며 인간 본유의 정신적 능력과 활동을 중시하고 있다. 그의 수학관은 수학의 객관적 타당성을 인정한다는 점에서 전통적인 절대주의적인 측면을 수용하지만 수학을 인간의 활동에 의해 계속 진보해 나간다고 보고 수학의 사회적 역사적 언어적 측면을 중시한다는 관점에서는 현대 철학의 입장도 포함하는 절충주의적 관점이라고 볼 수 있다[6].

## 2) 수학과 의미와 수학과 활동

Freudenthal 은 수학을 인간의 정신적 활동이라고 할 때, 수학적 활동의 본질적인 특징을 수학과 활동이라고 보고 있다. 수학과란 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 것을 의미하고 이런 현상과 본질의 교대 작용에 의해 수준 상승이 이루어지는 불연속적 과정이다. 이때 현상이란 현실적인 경험일 수도 있고 수학적 경험일 수도 있으며, 수학과란 수학자들이 수학적 개념, 아이디어, 구조 등을 포함하는 수학적 수단에 의해 현실의 경험을 조직하거나 수학적 경험을 체계화시켜 나가는 것을 의미한다[9].

현실의 경험을 수학적 수단으로 조직하는 것은 그러한 정리 수단인 본질을 찾는 것이다. 수학적 과정을 현실을 수학적화하는 것을 출발점으로 해서 수학 자체의 수학적화로 이어지며, 처음에는 국소적으로, 하지만 나중에는 전반적으로 진행되어진다. 따라서 수학적 내용과 표현이든, 일상용어로 표현된 소박하고 직관적인 현실적 체험이든간에 모든 수학적인 조직화 활동을 의미한다.

수학적 과정은 현실의 어떠한 상황에서 드러나는 수학적 요소를 찾아내는 것으로부터 시작하여 그것을 수학적으로 세련시켜 가는 과정이며 이런 과정 속에서 현실과 본질의 교대가 계속 반복되면서 조직화 되는 과정이다. 수학적화는 문제 장면을 수학적 문제로 변형하는 과정과 수학적 체계 내에서의 처리과정의 차이를 위해 수평적 수학적화(horizontal mathematization)와 수직적 수학적화(vertical mathematization)로 구분할 수 있다. 수평적 수학적화란 관찰, 실험, 귀납 추론 등의 경험적 접근 방법을 통해 문제 상황을 수학적인 방법을 이용할 수 있도록 변형하는 과정 즉, 모델 형성, 도식화, 기호화를 통해 수학으로 향하는 길을 여는 것을 말하며, 수직적 수학적화란 수평적 수학적화 이후에 따라오는 수학적 과정, 문제를 풀고 일반화하고 형식화하는 것과 관련된 과정 즉, 수학적 처리 과정과 탐구중인 문제 장면의 구조화 속에서의 수준 상승 과정과 관련이 있다.

수평적 수학적화의 특성이 강한 활동은 일반적 맥락에서 구체적인 수학을 하는 활동, 관계를 발견하는 활동, 규칙성을 발견하는 활동, 서로 다른 문제의 공통적 요소를 인식하는 활동, 실세계 문제를 수학적 문제로 변형하는 활동, 실세계 문제를 기지의 수학적 모델로 변형하는 활동 등이다. 그리고 수직적 수학적화의 특성이 강한 활동은 관계를 공식으로 표현하는 활동, 규칙성을 증명하는 활동, 모델 자체를 다듬고 변형하는

활동, 다른 모델을 사용하는 활동, 모델을 결합하고 통합하는 활동, 새로운 수학적 개념을 명확히 표현하는 활동, 일반화 활동 등이 있다.

수학화 과정을 현실에서 출발해서 수학 자체의 수학화에 이르는 과정으로 볼 때, 수학화 과정에서 이루어지는 수학자들의 조직화 활동은 매우 다양하다. 이런 수학화 활동을 경험시키고자 하는 근본적인 의도는 학생들에게 의미를 갖지 못하는 수학의 형식을 처음부터 제시하는 것이 아니라 수학의 여러 가지 내용을 재발명해 보게 함으로써 그 필요성을 알게 되면서 점진적으로 형식화해 나가고자 하는 것과 수학과 현실을 밀접하게 연결시킴으로써 수학의 유용성을 체험하게 하고자 하는 것이다. 무엇보다도 수학화 활동을 경험함으로써 형식화된 수학의 의미를 한층 잘 이해할 수 있도록 하려는 것이다. 수학화 활동 중에 학교 수학에서 경험될 수 있는 기본적인 수학화 활동으로 규칙과 패턴 찾기, 추론하기, 정의하기, 일반화, 도식화, 형식화, 알고리즘화, 국소적 조직화를 들 수 있다[9].

**가) 규칙과 패턴찾기** : 수학의 가장 특징적인 활동으로 인간이 선천적으로 타고난 특성이며 학교 수학에서도 많은 시간이 할당되어 있다. 그러나 수학 내적인 문제뿐만 아니라 좀 더 현실적인 상황에서 여러 가지 수학적 패턴과 규칙을 찾는 기회를 제공해야 한다.

**나) 추론하기** : 추론은 크게 분석적 추론과 직관적 추론으로 구분될 수 있다. 이는 서로 상보적인 관계에 있다. 직관적 추론에 의해서 흔히 분석적 추론에 의해서 찾을 수 없는 해들이 발전되고 분석적 추론은 직관적인 가설을 더욱 명료하게 하는데 필요하다. 수학교육에서는 분석적 추론을 강조해 왔으나 직관적 추론 또한 강조되어야 하며, 수학화의 역동적인 측면을 경험시키기 위해서는 교재 구성에서 추측과 예상을 위한 여지를 남겨 두어야 한다.

다) **정의하기** : 정의하는 과정은 국소적인 조직화 활동 중의 하나이며, 암묵적인 아이디어를 사용하다가 정의의 필요성이 대두되면서 정의가 도입되는 경우가 많다. 개념을 정의하는 방법에는 내포적 정의방법과 외연적 정의방법이 있다. 내포적 정의는 개념을 생각하는 사람의 의도에 따라 그 개념의 속성으로 정의하는 방법이고 외연적 정의는 그 개념에 속하는 대상 전체로 정의하는 방법이다. 학교 수학에서는 수학 교육의 현대화 운동 이래 외연적 정의방법이 도입되었으나 오늘날에는 다시 내포적 정의가 강조되는 상황이다. 그러나 무엇보다도 형식적인 정의가 주어지기 전에 학습자는 스스로 정의를 발명해 보는 경험을 통해서 정의의 필요성과 의미 그리고 방법 등을 이해할 수 있도록 해야 한다.

라) **일반화** : 일반화는 여러 가지 하나의 맥락 속에서 혹은 여러 맥락 속에서 공통적인 성질, 유사성, 서로 유추할 수 있는 것, 동형성 등을 발견하는 이른바 핵심적 요소찾기를 통해 이루어진다. Freudenthal 은 법칙성을 파악하는 방법을 간접적 이해와 즉각적 이해로 구분한다. 간접적 이해는 세부 사항들을 모아 일반화하는 것이고, 즉각적 이해는 한 가지 예로부터 그 구조를 이해하는 것을 말한다. 따라서 교사는 적절한 예를 제공하여 다소 시간이 걸리더라도 학생들 스스로 일반화할 수 있는 충분한 시간과 기회를 주는 것이 필요하다.

마) **도식화** : 도식화란 좁은 의미로는 수학에서 풀이 공식이나 절차를 간소화, 간결화, 단축화하는 것을 의미하지만, 넓은 의미로는 현실에 적합한 수학적 도식 즉 모델을 찾는 것을 의미한다. 통찰에 의해 획득한 지식을 체계적으로 조작하고 표현하는 방식을 찾고 현실에 대한 단순화, 이상화된 모델을 찾아 나아가는 과정이 점진적 도식화 과정이다.

바) **형식화** : Freudenthal 은 형식화는 정확한 표현을 위한 도구로서 언어를 의식적으로 사용하는 것이라고 정의한다. 형식화는 의사소통의 더

나은 수단들을 얻기 위한 언어적 활동이다. 즉 형식화는 발견된 내용을 수학적으로 적절하게 표현하기 위해 언어를 손질하고 조정하고 변형시키는 과정을 의미한다. 특히 문자에 의한 형식화에 대해 학생들은 많은 어려움을 느끼기 때문에 직접적인 형식화를 도입하기 전에 비형식화의 증명을 제공하는 것이 필요하다.

**사) 알고리즘화** : 알고리즘화는 절차의 단축화를 강조하면서 간편한 절차를 만들어 가는 과정을 의미한다. Freudenthal 은 수학은 알고리즘으로 가득 차 있으며, 알고리즘화의 본성을 갖고 있으나 문제는 알고리즘 자체가 자동적으로 다루게 된다는 본성 때문에 학생들은 기계적인 사고방식에 젖어들기 쉬우며, 수학 사고의 특징인 유연성과 발전적 조작 가능성을 저해하기 쉽다는 것이다. 학생들은 알고리즘화 과정에는 관심이 적으며 알고리즘에 따른 기계적인 계산에 빠지기 쉽다. 따라서 알고리즘을 지도할 때는 점진적인 형식화가 이루어지도록 학생들의 수준에 맞게 재발명하는 것에 의해 학습되어야 한다.

**아) 국소적 조직화** : 공리체계로 수학을 조직화하는 것은 전체적인 조직화이다. 국소적인 조직화란 공리에서 출발하는 것이 아니라 참이라고 인정되는 사실로부터 시작해서 부분적으로 조직하는 것을 말한다. 따라서 학생들에게는 전체적으로 조직화된 형식적인 수학을 제시할 것이 아니라, 현실이나 수학자체를 부분적으로 조직화 하는 경험을 통하여 전체적인 조직화의 필요성을 인식하고 그 의미를 이해하게 하는 활동이 선행되어야 한다.

### 3) Freudenthal 의 수학적 학습 이론

Freudenthal 은 수학화의 과정을 경험하게 함으로써 수학의 유용성을 알도록 하는 것을 중요시 했다. 여기서 수학화의 경험이란 교사의 적절한 안내에 의해 학습자로 하여금 이미 발명된 수학을 조직해야 할 현상으로부터 출발해서 수준의 비약을 거쳐 재발명해 가도록 한다는 것을 의미한다[11]. 기존 수학교육의 문제점은 수학적 사고과정을 고려하지 않고 학생들에게 이해가 아니라 설득에 의해 수학적 지식을 부과하는데 있었다고 볼 수 있는데 이러한 문제점을 해결하는 방법으로 Freudenthal 은 점진적인 수학화를 안내하는 수학 학습-지도 원리인 안내된 재발명의 원리, 교수학적 현상학, 학습수준 이론으로 제시하고 있다.

#### 가) 안내된 재발명 원리

재발명 방법은 전통적인 연역적 형태의 수학 수업에 대한 대안으로 제기되어 거듭 논의되어 온 발생적 원리의 연장선상에서 살펴볼 수 있는데 발생적 원리는 인간 스스로 구성하는 것이라는 입장을 바탕으로 한다. 여기서 Freudenthal 의 안내된 재발명 방법은 학생들의 활동을 중요시하는 활동주의 교육관과 발생적 원리와 맥을 같이하는 지도방법이라고 볼 수 있겠다.

재발명 방법을 가능하게 하기 위해서는 ‘사고실험’이 중요하다. 사고실험은 두 가지 측면에서 고려될 수 있는데 첫째는 교과서 저자가 한 학생 또는 그룹의 학생들의 가능한 반응에 따라 반응하면서 가르치거나 저술하는 태도를 의미하고 둘째로는 어떤 것을 발명했거나 어떤 방법을 개선한 개인 수학자의 마음속에 어떤 일이 일어났는지에 대해서 추측하는 것이다. 그러므로 Freudenthal 은 재발명을 위해서 학생의 입장과 함께 개인 수학자의 마음에 대해 추측하는 사고실험이 중요함을 강조하고 있다.

또한 Freudenthal 은 특히 알고리즘, 사고 패턴 및 문제해결 전술과 전략, 엄밀성 등의 사고를 재발명에 의해 학습해야 할 것을 강조하고 있다. 위에 쓰여진 사고가 매우 중요하고 연습되어야 하지만 너무 일찍 해서는 안되며 학생들 스스로 재발명 할 수 있을 때까지 가르쳐서는 안된다는 것이다. 한편 지금까지의 교과서가 재발명 방법이 중요하다고 하면서도 결국 교과서는 가르치는 대로 써야하며 실제의 교수경험과 사고실험을 출판하여야 할 것이라고 주장한다. 이를 위해 반성적 사고를 유발하여 사고 수준의 비약이 일어나도록 안내해야 할 것으로 본다.

#### 나) 교수학적 현상학

교수학적 현상학은 현상과 본질의 상대적인 관계를 교수학적인 측면에서 논하는 것이라 할 수 있다. 여기서 본질이란 물리적, 사회적, 정신적 세계의 여러 현상을 조직하기 위한 도구로써 발명된 수학적 개념, 구조, 아이디어를 말하는 것으로 이것은 한 수준에서는 본질이지만 다음 수준에서는 다시 연구되어야 할 현상의 일부가 되는 것이다. 또한 교수학적 현상학은 수학의 특정 부분에 의해 수학화 될 수 있는 학습자 주변의 현상을 살펴보고 역사적 고찰에 의해서 수학화 과정을 분석함으로써 수학적 내용이 어떻게 그 현상을 조직하고 분석하는지를 보여주고 학생들이 어떻게 그것을 생각해 낼 수 있게 하고 더 잘 이해하게끔 도우며 그것을 예상할 수 있도록 할 수 있는가를 알아내는 것과 관련된 학문이다. 정리해보면 학생들이 수학의 완성된 구조를 직접적으로 접하는 것이 아니라 학생들의 정신적 현실에 맞으며 수학적 구조가 조직화의 수단이 되는 현상들에 직면하도록 해서 학생들 스스로 재발명 과정에서 그러한 수단들을 찾아내도록 하고 수학적 대상에 대한 심상을 구성하게 하려는 것이며 그것을 반성에 의한 수준상승으로 이끌어 나가기 위한 틀을 제공하려는 것이다.

따라서 교수학적 현상학은 현실에서 수학의 응용의 기능만을 보는 것이 아니라 현실 속에서 직관적 관념을 개발하기 위한 또는 심상을 구성하기 위한 개념 형성이 근원을 찾는 것을 목표로 하고 있다.

#### 다) 학습수준이론

Freudenthal 의 학습 수준이론은 수학을 현상학적으로 분석하는 과정에서 인류의 학습과정과 개인의 학습과정 사이에 동형성이 있다고 본 관점에서 기인한다. 수학화 과정은 수준이 상승되는 불연속 과정이며, 수학의 학습 과정은 발견이 아니라 비약의 과정을 재발명 하는 것이어야 함을 Freudenthal 은 강조했다. 재발명 방법은 수학 학습 수준 이론에 따른 ‘국소적 조직화’를 거치는 수학화로서 보다 구체화되고 있는데 국소적 조직화란 참인 것으로 보이는 영역에서 시작하여 수학적 사고를 부분적으로 조직화하는 것이다. 수학을 응용하던가 창조하던가 하는 것은 국소적 조직화의 활동이라고 보고 학생들에게 자명하다고 생각되는 곳이 국소적 조직화에서 출발의 기준이 되도록 하여 학생들의 자발적이고 창조적인 활동이 가능하게 되기를 바라는 것이다. 이러한 점진적인 수학화를 위해서는 학습자의 현실내의 현상과 부단한 관계를 맺으면서, 수평적 수학화와 수직적 수학화가 교대로 일어나도록 하며, 반성에 의한 수준의 상승이 자연스럽고 자발적으로 이루어지도록 해야 한다.

## 2. 네덜란드의 현실주의 수학교육

### 1) RME(Realistic Math Education)의 기원

현실적 수학교육(RME)은 네덜란드의 1970 년대 IOWO(네덜란드의 국립 수학교육 연구소)의 초등학교 수학교육과정 연구를 위한

Wiskobas 팀으로부터 1980 년대의 OW&OC(네덜란드 수학교육 연구 단체), 1990 년대는 Freudenthal 연구소로 개칭된 Freudenthal 의 아이디어를 지지하는 사람들이 수십 년간 연구해 온 수학교육의 한 사조를 일컫는다. RME 는 수학을 인간의 활동으로 보는 Freudenthal 의 수학적 이론에 토대를 두어 학생들이 비형식적인 방법을 존중하고 상호작용적 학습을 강조한다.

현실적 수학교육은 Treffers(Adrian Treffers)가 수평적 수학과 수직적 수학과에 대한 구분을 통해 기존의 수학교육 사조를 기계적, 구조적, 경험적이라 부르고 수학을 중시하는 네덜란드의 수학교육을 현실적이라고 부른 데 기인한다[11]. 핵심적인 것은 현실이라는 것이 무엇을 의미하는가 하는 것이다. Treffers 에게 있어서 현실은 감각적 경험과 해석의 혼합물로 이해된다. 이는 수학 또한 개인의 현실의 일부가 될 수 있다는 것이다. 따라서 네덜란드 수학교육 개혁이 ‘현실적’이라고 불리는 이유는 현실 세계와의 연결성 뿐 만 아니라 학생들의 마음속에서 무엇인가 그려내거나 상상할 수 있는 문제 상황들을 제시하는 것을 강조하는 것과 관련된다. 말하자면 현실적이란 단순한 일상생활을 의미하기보다는 그것을 포함하는 더 광범위한 세계로 학생이 체험할 수 있고, 감정이입이 될 수 있으며, 자신의 여러 가지 경험을 혼합해서 생각하고 상상력을 불러일으킬 수 있는 상황을 의미하며, 그러한 상황에서 수학적 세계로 들어서는 것이 수평적 수학과이고 수학적 세계에서 좀 더 추상적인 수학의 세계로 한 걸음 더 진전하는 것이 수직적 수학과이며, 이것이 또 학생의 현실이 되고 이러한 순환과정이 반복되면서 현실이 성장되어 가는 것이다. 따라서 모든 수업에서 수시로 이러한 현실의 세계와 수학의 세계가 교대되도록 하는 것이 중요하다. 현실적 수학교육의 가장 핵심이 되는 것은 학생들의 현실 속에서 수학이 출발하고 머물러야

한다는 것이다. 이를 통해 학생들은 수학의 유용성을 깨닫고 학생들의 마음속에 수학이 정말 중요한 것으로 자리잡기를 기대하는 것이다.

## 2) RME 의 학습지도원리

학생들에게 적절한 현실적인 문맥을 통해 수학적 내용을 재발명하도록 하고, 자신의 활동에 대한 반성을 통해서 추상화, 형식화하도록 하고, 현실에 응용함으로써 현실을 조직해 보는 경험을 제공하고, 이런 여러 가지 경험들을 통해서 수준을 상승시키려면 전반적으로 수업을 어떻게 이끌어 나가야 할 것인가가 고려되어야 한다. 이에 조금 더 구체적인 원리로 Treffers 는 5 가지 학습 지도원리를 제안한다[9].

### 가) 현상 탐구

교수학적 현상학을 기반으로 점진적인 수학화를 추구하는 수업에서 첫 번째 단계는 구체적인 문맥으로 시작되며 이 단계에서는 수학화를 염두에 두면서 여러 가지 개념과 구조가 내포된 현실 상황을 탐구한다. 이 탐구의 목적은 여러 가지 개념과 구조의 본질적인 측면에 관한 풍부한 직관적인 관념을 모으는데 있으며, 이 단계에서는 문맥의 역할이 본질적이다.

현실 속에서 의미 풍부한 문맥을 찾아내고 그것을 교수학적으로 다듬어 학생들에게 제공함으로써, 학생들이 현상을 탐구할 수 있도록 하고 그 활동을 그들이 수학을 통해 이 세계에 대해 이해할 수 있도록 할 필요가 있다.

### 나) 수직적 도구에 의한 연결

수학적 개념이나 기능을 학습하는 것은 장기간에 걸쳐서 진행되는 과정이고 다양한 추상화 수준에 따라 이행되는 과정이다. 기초적 문제 상황에서 처음부터 모델, 계획, 도식 그리고 기호화 같은 다양한 수직적

도구가 제공되고 탐구되어지고 발달되어진다. 이것은 직관적, 비형식적, 구체적문맥과 반성적, 형식적 체계 사이의 수준 차이를 좁히기 위한 의도로 행해진다. 점진적 수학화의 이론적 구조에서 이것은 한 수준에서 다음 수준으로 단순히 뛰어넘는 것보다는 한 단계 한 단계 진보한다. 특별한 경우에 한정되거나 구체적 추론에 바탕을 들지라도 처음부터 좀 더 형식적 구성 요소들은 학습과정에서 포함되어 질 것이다.

수평적 탐구는 교수-학습과정에서 수직적 특성에 영향을 받는다. 수평적 성분들은 개념을 명확하게 하는 다양한 현실적 상황과 개념 형성에 필요한 풍부한 기호를 표현한다. 비록 교사가 올바른 길을 알고 있지만 교사는 학생들이 목표에 이르는 그들 방식을 발견할 수 있도록 도울 수 있다. 정신적 수준에서 다음 수준으로 이르는 과정은 정리된 결과 모양이 아니라 불규칙적인 미세한 단계를 포함하는 것이다. 수직적 도구란 첫 번째 수준에서의 직관적, 구체적, 비형식적 맥락에 결합된 조작과 반성적, 추상적, 형식적 체계적 조작간의 수준 차이를 좁히는데 도움이 되도록 화살표 기호와 같은 시각적 모델, 상황모델, 도식, 다이어그램, 기호와 같은 수학적 도구가 탐구되며 개발된다는 것을 의미한다. 여기서 수직적 도구로서의 모델은 물리적, 사회적, 상상적, 생생한 현실속에서 수학을 현상학적 모습과 형식적 체계를 이어주는 기능을 하며 구체물, 시각적 표현, 언어적 혹은 기호적 표현과 수학적 개념, 구조의 본질적 측면을 반영하는 현실 세계 상황을 이어주는 기능도 수행한다. 이 단계에서는 이런 수학적 도구를 그대로 부과하기보다는 학생들이 맥락에 대한 적절한 자신의 생각을 표현할 수 있는 도구들을 만들어 보는 기회가 제공되어야 한다.

다) 창작 활동을 통한 반성적 사고 원리

RME 에서 학생들 자신의 구성과 창작은 핵심적인 역할을 한다. 수학적 활동을 통한 수준 상승은 반성적 사고에 의하여 촉진되며 갈등이나 학생 스스로의 활동은 반성적 사고가 일어나는 데에도 도움을 준다. 이러한 반성적 사고를 가능하게 하기 위해서는 학생들의 창조적 활동을 더욱 활성화해야 하고, 이를 위해서 맥락 문제를 다루어야 하며, 때로는 현실과 관련된 문제로 다양한 수준에 따른 해결책이 가능한 열린 문제, 불완전한 문제, 모순되는 문제를 제시하거나, 스스로 문제를 제기하도록 하는 등 좀 더 새로운 상황에 직면하도록 할 필요가 있다.

문제를 해결하는 과정은 수학적 도구에 의해서 현실의 여러 현상들과 그것을 기술하고 조직화하는 것이며, 이러한 수학적 자료를 조직하는 지속적인 경험으로 수학적 기회를 극대화 할 수 있다. 불완전한 문제나 모순된 문제를 해결하기 위해서는 기존의 자료나 증거들을 스스로 보충하고, 잘못된 부분을 고쳐나가는 것을 필요로 하며, 스스로 문제를 만들어 보는 경험을 통해 자신의 학습과정을 반성적으로 사고할 기회를 갖게 된다. 이러한 여러 창작 활동을 통해서 잘못된 아이디어와 오개념을 드러냄으로써 교수 학습 과정의 반성과 예견의 이론적 기반을 제시해준다. 용어, 기호, 기호법, 도식, 모델 등을 만들어 가는 것은 수평적, 수직적 수학적 모두에 공헌한다.

학생들은 창작 활동을 통해서 수학적 과정의 핵심적인 역할을 수행함으로써 형식적인 수학적개념, 연산, 구조 등으로의 이행이 용이해진다. 학습 지도 과정에서 중시해야 할 것은 출발단계에서 학생들의 비형식적방법을 이용할 기회를 극대화시키는 것이고 자신들의 활동을 반성하게 함으로써 단축화와 간소화를 유도하고 자신에 대한 진단을 할 수 있는 기회를 제공할 수 있도록 해야 하며, 나아가서 표준적인 형식적 절차와의 접목이 이루어지도록 해야 한다.

학생과 교사 모두에게 학생자신의 구성은 매우 중요하며 학생들의 창작은 교사의 교수학적 활동을 엿볼 수 있는 기능을 한다. 즉, 학생 자신의 창작은 학습도구이면서 동시에 교수도구이다. 결국 교사에 의한 안내가 있음에도 본질적으로 수업을 이끌어 가는 것은 학생들이다.

#### 라) 상호 작용의 원리

탐구수업은 학생들 자신의 구성 활동 뿐 만 아니라 상호 작용 수업 즉 서로 상의하고, 참여하고, 타협하고, 협동하고, 개관할 기회가 주어지며 교사는 설명 위주가 아니라 조력자로서의 역할을 담당할 때, 효율적으로 이루어질 수 있다.

Freudenthal 은 협동과 상호 작용을 위해서 이질 학급 편성의 중요성을 강조해왔다. 학생들은 같은 단원에서 같이 시작하고 계속 같은 상황이며무르면서, 상의와 협동할 기회, 그리고 반성과 반복의 기회를 갖는다. 각 학생은 개인적으로 연구할 기회를 갖고 그룹과 분리되지 않은 상태에서 자기 자신의 탐구 경로를 구성할 기회를 갖는다. 학생들은 상호 작용 교수를 통해서 자기 자신의 생각을 재고하면서 반성할 기회를 갖고 더 나은 아이디어를 창조해 낼 수 있다.

#### 마) 학습 가닥의 혼합을 통한 구조화 원리

장기 학습과정으로 볼 때 과거의 학습과 미래의 학습은 서로 통화되어야 한다. 너무 작은 단계로 쪼개어 가르치거나 너무 체계적으로 가르치면 오히려 맥이 끊기는 결과를 초래한다. 수학화를 추구하는 수업에서는 학생들이 선호하는 비형식적인 방법을 억압할 것이 아니라 그것을 활용해야 한다. 예컨 학습이란 체계적이고 형식적으로 다루기 전에 일상 언어로 표현된 상식적인 내용으로 접근할 수 있도록 다양한 비형식적인 기회를 제공함으로써 나중에 체계적인 학습의 발판이 되도록 하는 것을 의미한다. 이와 대응되는 개념으로 회고 학습이 있는데 이는 오래된 학습

문제를 적절할 때마다 더 높은 견지에서 더 넓은 문맥에서 재고의 가치가 있을 때마다 회상하는 것을 의미한다. 따라서 학습자에게는 예견학습이 허용되고 자극되어야 하고, 회고 학습이 조직되고 학습 습관으로 활성화되어야 한다.

수학을 배운다는 것은 단편적인 지식과 기능을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 지식과 기능을 하나의 구조화된 전체로 조직하는 것이다. 따라서 새로운 개념과 기능은 기존의 지식체에 동화되거나 아니면 기존의 지식체 자체가 이 새로운 개념과 기능에 의해 새롭게 조직되어야 한다. 따라서 새로운 관점에서 기존의 지식을 살펴보는 기회를 마련하고 교사는 이런 기회를 충분히 제공해야 한다.

예견 학습과 회고 학습의 연장선상에서 학습 가닥의 혼합을 생각해 볼 수 있는데 이것은 관련된 학습 과정을 전체로 보는 관점이다. 학습은 가능한 일찍부터 지속적으로 서로 얽혀 있는 여러 가닥들로 조직되어야만 한다. 수학의 다양한 주제들이 수직적으로만 분리하여 지도되고 횡적 연결을 무시한다면 수학을 응용하기는 어렵다. 학생들은 여러 가지 수학적 모델을 비교하고 통합할 수 있어야 한다. 따라서 횡적, 종적인 학습 가닥의 혼합을 통해서 전체적인 구조화가 이루어져야 한다. 그리고 동시에 처음부터 응용과 순수수학이 결합되어야 하며 현실이 수학적 구조와 개념의 근원이자 응용 영역이 되도록 지도되어야 한다.

### 3) RME 의 학습과정 모형

De Lange[9]등은 실세계로부터 출발하여 수학적 개념을 발견하는 과정의 순환적 학습 모형을 다음과 같이 설명한다.

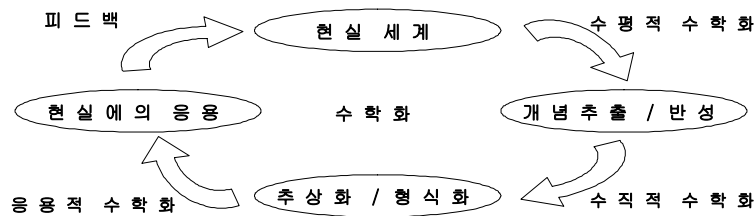
첫 번째 단계는 현실세계상황 혹은 맥락문제가 처음에는 수학적화의 관점에서 직관적으로 탐구된다. 즉 문제를 조직화하고 구체화해서 문제의 수학적 측면을 알아내고 규칙성을 발견하는 것을 의미한다.

두 번째 단계는 학생들 간의 상호작용과 학생들의 사회적 환경, 형식화 및 추상화 능력과 같은 요인에 의해 현실상황으로부터 수학적 개념을 추출해 낸다. 여기서는 반성적 사고가 중요한 역할을 한다.

세 번째 단계는 형식화, 추상화 단계로 수학적 개념을 서술하고 보다 엄밀하고 형식적인 정의를 내리게 된다.

네 번째 단계는 수학적 개념을 새로운 문제에 응용함으로써 수학적 개념을 강화하고 수학적 기능을 개발하여 일반화하는 단계이다.

이러한 모형의 특징은 학습과정을 강조하고, 학습자는 스스로 경험에 참여하고 다양한 관점에서 관찰하고 자신의 경험을 반성할 수 있어야 하며 지식은 계속해서 생성되고 다시 변형되는 것과 학생의 실세계는 계속 변화되어 간다는 것을 말하고 있다. 정영옥[9]은 De Lange 의 순환적 과정을 변형하여 다음 <표-1 과> 같이 제시한다.



<표-1>

RME 의 수학 학습 과정을 보면, 추상적인 수학적 지식을 현실 속의 문제해결에 적절하게 번안해야 한다는 것을 알 수 있다. 또한 실생활 문제를 수학적 문제로 번역하는 과정을 거쳐야 한다. 즉, 문제가 수학적 용어, 수학적 문제로서 표현되어야 하며, 그 다음 이 문제는 활용 가능한 수학적 수단의 도움으로 해결된다. 끝으로 풀이가 원래의 맥락으로 번역되는 과정을 거치게 된다. 이때 맥락문제의 수학적 문제로의 변형 과정은 정보의 감소를 수반하다.

문제 상황으로 구성된 수업은 학생들에게 수학을 경험할 수 있게 한다. 문제에 대한 묘사는 비형식적 언어로 발전될 수 있고, 이 언어가 단순화 형식화를 거쳐 조금 더 형식적인, 세련된 언어로 발전 될 수 있다. 즉, 상황은 수학을 거쳐 시간이 흐름에 따라 단축되고 형식화된다. 그 결과 진정한 수학의 알고리즘이 만들어 질 수 있다.

### Ⅲ. 연구의 실제

#### 1. 제 7 차 수학과 교육과정 개정안에서 살펴본 수산화

우리나라는 1997 년에 제 7 차 교육과정을 고시하고, 2006 년에는 이 교육과정에 대한 수정고시안을 발표하였다[2].

교육과정 개정의 주무 부서인 교육과정 평가원은 2006 년도 연구 보고서[15]에서 개정의 필요성으로 Freudenthal 의 수산화 이론을 도입하여야 함을 주장하고 있다. 이 보고서에 따르면 현실적 수학교육이 우리나라 수학과 교육과정에 주는 시사점으로 다음과 같은 내용을 고려하여야 한다.

첫째, 제 7 차 수학과 교육과정과 그 교과서에서 주요하게 추구하였던 것은, 학생들이 수학의 유용성을 알도록 하자는 것이었으며, 그 일환으로, 초등학교에서는 ‘생활에서 알아보기’, 중·고등학교에서는 ‘탐구 활동’과 같은 내용이 도입부를 차지하였다. 따라서 학생들에게 적합하고 흥미롭고 많은 생각을 하도록 만드는 상황들이 절실하였다. 그런 점에서 네덜란드의 현실적 수학교육에 기반을 둔 교재에서 제시되고 있는 상황들은 우리나라에 좋은 모범이 된다고 볼 수 있다[10].

둘째, Freudenthal 의 수산화 과정을 도입한 다양한 자료 개발과 개발한 자료를 활용할 수 있는 교사연수가 절실하다. 수산화 과정을 도입한 다양한 자료를 개발하고 개발한 자료의 수정·보완에 관한 연구를 통해 수업에 활용할 수 있게 해야 한다. Freudenthal 의 수산화 과정이 이루어지기 위해서는 자료 개발 뿐 아니라 교사의 적절한 안내가 중요한

역할을 하므로 개발한 자료를 활용할 수 있는 교사 연수 방안을 마련해야 한다.

셋째, Freudenthal 의 수학적 과정을 도입한 교재로 실제 수업을 하기 위해서는 교육과정에 대한 연구가 필요하다. Freudenthal 의 수학적 이론은 기존의 수학교육의 내용이나 목표가 변할 수 있고 강화되는 부분이나 약화되는 부분이 있기 때문에 여러 학습 내용에서 다양한 방법으로 학습 자료를 개발하는 교육과정에 대한 연구가 이루어져야 한다.

넷째, 수학적 과정을 평가할 수 있는 다양한 평가 방법이 연구되어야 한다. 수학적 활동에서는 결과보다 과정을 중시하므로 기존의 결과만을 평가하는 체제가 그대로 사용된다면 점진적인 수학을 추구할 수 없을 것이다. 따라서 선다형이나 닫힌 문제 외의 다른 형태의 과제인 수필 과제, 구두과제, 프로젝트 활동, 포트폴리오 등의 다양한 평가 방법들을 적절히 활동하는 방안을 마련해야 한다. 즉, 수학 교육의 목표를 수학적 경험을 통한 수학적 태도의 형성에 둔다면 평가 방법과 평가 내용에 있어서의 근본적인 변화를 추구해야 할 것이다.

이처럼 수학과 교육과정 개정의 기본 방향 중 가장 두드러진 특징은 현실 세계에서 수학의 역할과 유용성 인식을 강화하고 수학 학습에 대한 즐거움, 자신감, 흥미 등 긍정적인 수학적 태도를 배양하여 수학의 가치 제고와 정의적 측면을 강조한다는 것이다.

제 7 차 수학과 교육과정과 그 개정안에서는 Freudenthal 의 수학적 이론에 입각하여 기하 영역에서 관찰과 조작을 통한 도형의 탐구, 평면도형의 성질의 추론, 대칭과 닮음의 이해와 적용, 도형의 양에 대한 측정을 강조하고 있다. 특히 관찰이나 공학적 도구 활용을 통한 도형의 개념과 성질의 직관적 탐구가 기하 추론에 선행하여 직관의 형성이

중요함을 강조함으로써 귀납 추론과 연역 추론을 기하 교육의 주요 목적으로 삼고 있다.

중학교 기하 영역에서는 부분적으로 약화된 면이 있으나 8-나 단계부터 증명을 다루고 있다. 제 6 차 교육과정까지 증명의 연역적 과정을 중시하였으나, 제 7 차 교육 과정에서 증명이 학생들에게 있어서 매우 이해하기 힘든 분야임을 인식하고 조작이나 관찰을 통해 도형에 대한 성질에 관한 충분한 탐색의 기회를 제공하는데 중점을 두었다. 또 증명의 의의와 필요성을 이해하고 연역적 추론을 할 수 있도록 학습 계열과 방법을 구성하고, 탐색과 조작을 위한 구체물이나 공학적 도구를 효율적으로 활용하도록 권고하고 있다.

제 7 차 수학과 교육과정 개정안에서 국민공통교육과정의 학년별로 세분화되어 있는 기하내용은 다음과 같다.

	중학교 1 학년	중학교 2 학년	중학교 3 학년	고등학교 1 학년
기하	·기본도형 ·작도와 합동 ·평면도형의 성질 ·입체도형의 성질	·삼각형과 사각형의 성질 ·도형의 닮음 ·닮음의 활용	·피타고라스의 정리 ·삼각비 ·원과 직선 ·원주각	·평면좌표 ·직선의 방정식 ·원의 방정식 ·도형의 이동

제 7 차 교육과정 개정안에서 교수학습방법으로 제시한 내용 중 Freudenthal의 수학적 이론과 관계되는 것은 다음과 같다.

[바] 수학적 개념, 원리, 법칙의 교수·학습에서는 다음 사항에 유의한다.

(1) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 학습 소재로 하여 수학적 개념, 원리, 법칙을 도입한다.

(2) 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 학생 스스로 개념, 원리, 법칙을 발견하게 한다.

[자] 문제 해결력을 신장시키기 위하여 교수·학습에서 다음 사항에 유의한다.

(2) 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제 해결 방법을 적절히 활용하여 문제 해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.

(4) 문제 해결의 결과뿐만 아니라 문제 해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.

(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

또, 평가에 대하여는 다음과 같은 내용을 제시하고 있다.

[마] 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수·학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

(4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력

(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

한편, 교과용 도서 편찬상 내용의 선정과 조직에 있어서의 유의점에서는 Freudenthal의 수학적 이론에 따르는 다음의 유의 사항을 담고 있다.

(3) 자연 현상이나 사회 현상을 포함한 여러 가지 현상을 학습 소재로 적절히 활용한다.

(4) 학생 스스로 수학적 개념, 원리, 법칙을 발견하는 데에 도움이 되는 적절한 조작 활동이나 탐구 활동을 제시한다.

(7) 다양한 교구와 공학적 도구가 의미 있게 활용될 수 있는 학습 주제에 대해서는 그것들을 적절히 활용할 수 있도록 학습 내용을 구성한다.

위에서 살펴본 바와 같이 제 7 차 교육과정 개정안에서는 Freudenthal 의 수학적 이론에 따르는 조작 활동과 탐구활동, 다양한 학습 소재의 개발을 강조하고 있다.

## 2. Freudenthal 의 이론에 근거한 기하 영역 학습지도안 연구

이 절에서는 Freudenthal 의 수학적 이론과 네덜란드의 현실적 수학교육 방법에 기초하여 기하 학습 지도안의 예를 개발하였다. 중학교 1 학년의 기본 도형 단원 중 ‘작도와 합동’, 중학교 2 학년의 도형의 성질 단원 중 ‘삼각형의 성질’ 부분에서 각각 1 차시분의 학습지도안을 제시하고자 한다.

이 학습지도안은 Freudenthal 의 이론을 적용하여 선분의 수직이등분선, 삼각형의 외심을 학습소재로 학생들로 하여금 직접 셀로판지, 컴퍼스 등을 사용하여 구체적 조작을 통해 스스로 수학적 원리를 발견할 수 있도록 고안하였다.

### 1) 학습지도안 I

①학년 : 중학교 1 학년

②단원명 : 작도와 합동

③학습목표 : 구체적인 조작을 통하여 선분의 수직이등분선과 그 성질을 알 수 있다.

④학습자료 : 셀로판지, 자, 가위, 컴퍼스

#### [부록 : 학습지도안 I]

이와 같은 학습지도안은 교사가 일방적인 설명식 수업으로 진행하지 않고 학생들 스스로에 의한 발견식 수업이 되도록 적절한 힌트와 발문을 통해 수업을 이끌어나가도록 고안하였다.

## 2) 학습지도안 II

①학년 : 중학교 2학년

②단원명 : 삼각형의 성질

③학습목표 : 구체적인 조작을 통하여 삼각형의 외심과 그 성질을 알 수 있다.

④학습자료 : 셀로판지, 자, 가위

#### [부록 : 학습지도안 II]

이 학습지도안 역시 교사가 일방적인 설명식 수업으로 진행하지 않고 학생들 스스로에 의한 발견식 수업이 되도록 적절한 힌트와 발문을 통해 수업을 이끌어나가도록 고안하였다.

### 3. 기대되는 교육효과

앞의 두 가지 학습지도안을 통하여 Freudenthal 의 수학적화가 실제로 교실안에서 수업 중 일어날 수 있도록 시도하였다.

첫째, 현실세계로부터 수학적 개념을 발견한다. 수학은 수학적화를 통해 발생하며, 수학적화는 현실을 수학적화하는 것으로 시작된다. 학생들에게 무엇보다도 현실을 수학적화 하는 경험을 우선적으로 제공해야 한다. 학생들에게 감정 이입이 가능한 현실, 즉 자신의 상상력을 발휘할 수 있는 현실을 제공함으로써 학생들의 창조적 활동을 가능하게 하는 수업 장면이 되어야한다는 것이다. 따라서 수학적화 과정의 첫 단계는 현실세계의 문맥문제를 수학적화하려는 관점에서 직관적으로 탐구하려는 단계이다. 또한 현실세계의 수학적 측면을 알아내고 생활에서 수학적 개념을 발견하게 하는 단계이다. 현실과 관련된 문맥을 제공하는 대표적인 방법으로는 놀이동산, 이야기, 프로젝트, 이야기 모음 등을 들 수 있는데 놀이동산이란 서로 독립적으로 혹은 다소 밀접한 관계 속에서 다루어 질 수 있는 여러 상황을 의미 있게 모아 놓은 것이고, 이야기는 실제 이야기나 고전, 또는 발명된 이야기로써 학생들에게 풍부한 의미를 제공할 수 있는 것이어야 한다. 프로젝트란 입체도형 만들기처럼 구성해야 할 실체를 직접 주는 것이고, 테마란 현실과 다양한 관련성을 갖는 수학 교과 내용의 한 가닥을 뜻하고, 이야기 모음이란 책, 신문, 잡지 등 출판물에서의 발체를 뜻한다 [9]. 실생활과 관련된 상황을 바탕으로 학생들의 흥미와 관심을 발견할 수 있고 다른 교과에서 배웠던 내용을 수학과 연결시킴으로써 수학의 유용성을 느낄 수도 있게 된다.

둘째, 학생들 간의 상호작용과 학생들과 교사와의 상호작용에 의해 수학적 개념을 추출하고 반성한다. 수학적화 과정의 두 번째 단계로써

학생들 간의 상호작용과 학생들과 교사와의 상호작용에 의해 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해내는 단계이다. 수학적 모델링, 문제 설정 및 해결과정, 토의 등을 통해 수학적 의사소통이 일어난다. 개념을 형성해가는 과정을 통해 다음 수준으로의 상승이 일어나기 위해서는 반성적 사고가 필요하다. 학생들 간의 상호 논의를 통해 자신이 생각하지 못했던 부분들을 깨달을 수 있고 다른 학생들이 풀었던 것을 듣고 자신의 활동을 반성할 수도 있다. 특히 학생들이 각자 문제를 풀어보고 다른 학생들과의 논의를 통하여 수학적 개념을 더욱 명확하게 인식하게 되며 또한 다른 활동을 통해 자신의 추측이 맞는지 확인하는 과정을 통해 학생들의 수준 상승이 이루어진다.

셋째, 예상되고 결과적으로 발생하는 수학적 개념에 대한 기술과 엄격하고 형식적인 정의가 뒤따르는 형식화와 추상화가 이루어지고 있다. 학생들이 현실을 출발점으로 하여 현실세계의 문맥을 직관적으로 탐구하고 학생들 간의 상호작용, 학생들과 교사와의 상호작용 그리고 학생들의 형식화와 추상화 능력과 같은 요인에 의존해서 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해내는 과정이 수평적 수축화의 과정이라면 이를 좀 더 수학적으로 다듬는 과정이 바로 수직적 수축화의 과정이다. 즉 수학적 개념에 대한 기술과 엄격하고 형식적인 정의가 뒤따른다.

넷째, 창조된 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강조하고 일반화가 이루어졌다. 수축화 과정의 마지막 단계로써 개념을 다시 현실에 적용하는 응용적 수축화의 과정이다. 즉 창조된 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 학생들은 개념을 강조하게 되고 일반화가 이루어졌다. 앞에서 다룬 단계를 거쳐 해결된 문제는 현실 세계에 대한 학생들의 관점에 영향을 미치게 되는 것이다.

## IV. 결 론

지금까지의 교육현장은 기하의 기계적인 측면만 강조한 나머지 실생활에서의 활용성, 기하학적인 직관 등을 지나치고 있는 경향이 있다. 여전히 교육현장의 이러한 분위기는 변함이 없지만, 제 7 차 교육과정부터 ‘구성주의 학습’을 강조하면서 이러한 기계적 학습법은 많이 감소되고 있는 추세이다. 특히, 2009 년부터 적용되어질 제 7 차 교육과정 개정안에서는 구성주의 학습과 함께 수학적 의사소통을 강조하면서 교사와 학생 사이의 수학적 학습에 초점을 맞추고 있다[2]. 특히 기하학과 관련해서는 개정된 교육과정에서 교사는 학생들에게 풍부한 경험에서 얻은 기하학적 직관이나 상상력, 형식화해 나가는 과정을 지도하여야 할 것이다. 이러한 맥락에서 일상생활에서 쉽게 접할 수 있는 주제에 대해 구체적인 조작물을 통해 학생들이 직접 만지고, 조작하고, 만들어보는 활동에 직접 참여하여 발견적 추론과정을 거쳐 수학적 과정을 형성해 나가도록 지도하여야 한다. 제 7 차 교육과정 개정안의 목표에 부합하도록 학생들의 수학적 사고력을 증진시키기 위해서는 현재의 수업방법과 형식이 다른 Freudenthal 의 수학교육 방법으로 전환되는 것이 바람직하다고 생각한다.

그런데 Freudenthal 식 교육방법을 모든 학교 현장의 수학 학습에 적용하는 데에는 다음과 같은 제약이 있다. 우리나라에서 Freudenthal 수학교육 방식에 입각한 수학교육을 적용하기가 쉽지 않은 이유로는 첫째, 학급 학생의 수가 너무 많고, 둘째, 환경의 제반 여건이 미비하고, 셋째, 교과서 개발 부족을 들 수 있을 것이다. 이러한 어려운 점들에도 불구하고 제 7 차 교육과정 개정안의 취지와 맞게 우리의 수학교육의 방향은 Freudenthal 이 제시한 방식이 적합하다고 이전 여러

논문에서도 논하여졌다. 그러나 우리나라 교육여건을 고려할 때 그의 주장을 어떻게 적용할 것인가에 대한 연구는 절실하다고 본다.

이와 관련된 지속적인 연구를 위해 다음 몇 가지를 제안하고자 한다.

첫째, Freudenthal 이론을 도입한 다양한 학습자료 개발과 개발한 자료를 활용할 수 있도록 해야한다. 수학화 과정을 도입한 다양한 자료를 개발하고 개발한 자료의 수정·보완에 관한 연구를 통해 수업에 활용할 수 있게 해야 한다.

둘째, Freudenthal 의 수학화 과정이 이루어지기 위해서는 자료뿐 아니라 교사의 적절한 안내가 중요한 역할을 함으로 개발한 자료를 활용할 수 있는 교사연수가 이루어져야 한다. 또한, 교사는 자신의 수업을 조직하고 이끌어가는 만큼 효율적인 수업이 되기 위하여는 교육의 내용과 흐름을 파악하고 기본적인 교육방법에 대한 개선 노력을 기울여야 한다.

셋째, 연구한 기하영역의 학습 자료를 기초로 하여, 학생들을 대상으로 학업성취도나 태도등의 효과를 검증하는 후속 연구가 필요하다. 학교 현장에서 실정에 맞는 실제 수업을 통해 효과를 검증해보고 향상되는 면과 부정적인 면을 조사하고 수업에서 사용 형태나 교사의 역할에 관한 연구가 필요하다.

넷째, Freudenthal 의 수학화 과정을 도입한 교재로 실제 수업을 하기 위해서는 교육과정에 대한 연구가 필요하다. Freudenthal 의 수학화 이론은 기존의 수학교육의 내용이나 목표가 변할 수 있고 강화되는 부분이나 약화되는 부분이 있기 때문에 여러 학습 내용에서 다양한 방법으로 학습 자료를 개발하는 교육과정에 대한 연구가 이루어져야 한다.

## [ 참고 문헌 ]

- [1] 강옥기, 수학과 학습지도와 평가론, 경문사, 2000.
- [2] 교육부, “제 7 차 수학과 교육과정”, 교육부 고시, 제 1997-5 호
- [3] 권현자, Freudenthal 의 수학적 학습을 통한 기하영역의 지도 방안, 서강대학교 대학원 석사 학위논문, 2003.
- [4] 박두일, 신동선, 강영환, 윤재성, 김인종, 중학교 수학 8-나, (주)교학사, 2001.
- [5] 신현성, 수학과 수업모형 및 설계, 경문사, 2004.
- [6] 우정호, 수학교육-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부, 2000.
- [7] 우정호 외, 프로이덴탈의 수학교육론, 경문사, 2008.
- [8] 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부, 1998.
- [9] 이경진, Freudenthal 의 수학적 학습이론을 도입한 중학교 기하수업의 효과에 대한 연구, 국민대학교 대학원 석사 학위논문, 2003.
- [10] 정영옥, Freudenthal 의 수학적 학습지도론 연구, 서울대학교 대학원 박사 학위논문, 2004.
- [11] 정영옥. 수학교육 연구 동향: 네덜란드의 현실적 수학교육, 대한수학교육논문집 학교수학 2(1). 283-310, 2000.
- [12] 정영옥, 현실적 수학교육에 대한 고찰, 대한수학교육논문집 제 9 권 제 1 호, 1999.
- [13] 제남희, 수학적 활동을 통한 기하지도에 관한 연구: 사각형의 성질 중심, 한양대학교 대학원 석사 학위논문, 2005.
- [14] 조나영, 수학적 활동을 통한 중학교 기하영역의 학습지도안 연구, 동국대학교 대학원 석사 학위논문, 2003.

- [15] 한국교육과정평가원, “수학과 교육과정 개선방안 연구”, 한국교육과정평가원, 연구보고 RRC 2005-6.
- [16] 황선욱, 강병개, 김수영, 박정아, 중학교 수학 1, (주)좋은책 신사고, 2008.

<ABS TRACT>

The Development of Learning Material for the Middle School Geometry  
Strands Based on Mathematizing Theory of Freudenthal

Lee, Soo jin

Major in Mathematics Education

The Graduate School of Education

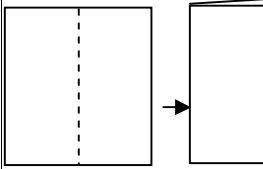
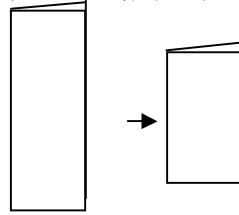
Sungshin Women University

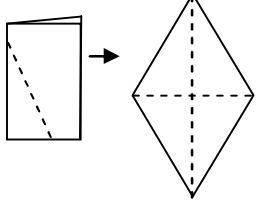
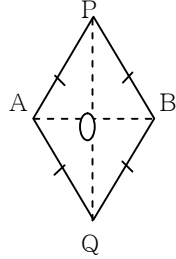
The education of mathematics through the mathematization claimed by Freudenthal means that one starts from the phenomenon of organizing the mathematics previously invented by our ancestors through the learners' creative activities by the appropriate guidance of teachers so that one reinvents the mathematics through the development of the level. The core of Freudenthal's assertion is that student are able to have a mathematical insight by means of reinventing mathematics through the mathematization starting from the problems. Mathematics should be understood not as an absolute truth but as a creative activity accomplished by people's efforts; therefore, more emphasis should be put on an active learning than a passive learning.

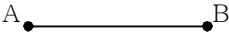
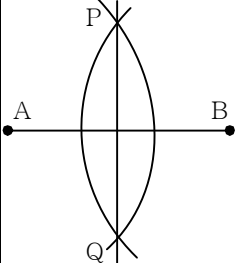
In this paper, we will discuss the Freudenthal theory, an alternative theory to solve the existing problems of our mathematic education and study the learning materials that have been put into practice in the field of geometry. We utilize fairy tales and tessellation and tries to find the

material world familiar to the students and the learning materials for geometry in real life situations.

[부록 : 학습지도안 I ]

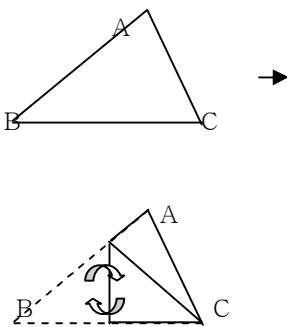
학습단계	교수-학습 활동		지도 유의점	수학화이론 적용
	교사	학생		
도입	<p>학생들이 마름모, 선분의 수직이등분선의 개념과 삼각형의 합동조건을 기억하고 있는지 확인한다.</p> <p>우리의 생활 주변에서 쉽게 관찰할 수 있는 마름모 모양의 사진을 보여주고 흥미를 끈다.</p> <p>학습 목표제시 -이번 시간에는 선분의 수직 이등분선의 성질에 대해서 알아보시다.</p>	<p>각각의 정의를 상기하며 대답한다.</p>	<p>교사의 일방적인 설명에 의한 압기가 되지 않도록 적절한 질문과 힌트로 학생들의 대답을 이끌어낸다.</p>	<p>정의하기</p> <p>패턴찾기</p>
전개	<p>각자 셀로판지를 준비하도록 지도한다.</p> <p>-셀로판지를 다음과 같이 반으로 접어봅시다.</p>  <p>-반으로 접혀진 셀로판지를 한 번 더 반으로 접어볼까요?</p>  <p>-선생님과 같은 방식으로 셀로판지의 접혀진 부분을 아래로 향하도록 놓은 후 잘라 봅시다. 그런 후 펴보세요.</p>	<p>교사의 설명에 집중하여 셀로판지를 반으로 접는다.</p> <p>교사의 지도에 따라 셀로판지를 다시 한 번 반으로 접는다.</p> <p>교사의 지도에 따라 셀로판지를 자르고 편다.</p>	<p>학생들이 직접 셀로판지를 접어 보도록 한다.</p> <p>모든 학생들이 교사의 설명을 따라 올 수 있도록 속도를 조절한다.</p>	<p>도식화</p> <p>도식화</p> <p>도식화</p>

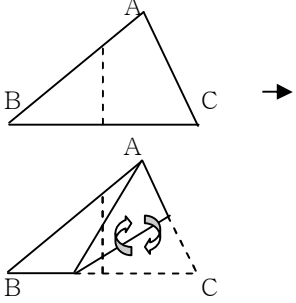
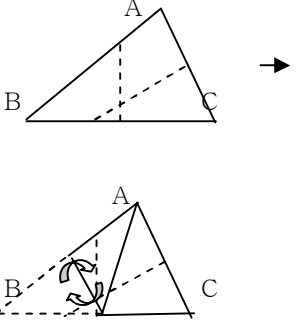
전개	 <p>-이렇게 만들어진 도형은 무슨 도형일까요?</p> <p>-마름모가 되는 이유가 무엇일까요?</p> <p>-그렇죠. 우리가 접은 채로 잘랐으니 다음의 네 변의 길이는 서로 같겠네요. 마름모의 정의가 무엇이었는지 기억하나요?</p>  <p>-네. 그렇다면 우리는 선분 AO와 선분 BO의 길이가 같다고 할 수 있나요? 왜 그렇죠?</p> <p>-네. 맞아요. 그럼 선분 AB와 선분 PQ의 관계도 발견할 수 있나요?</p> <p>-네. 맞아요. 우리가 본 지금의 예처럼 선분 PQ가 선분 AB의 중점 O를 지나면서 선분 AB에</p>	<p>-마름모인 것 같아요.</p> <p>-접은 채로 잘랐으니까 네 변의 길이가 다 같아요.</p> <p>-네. 네 변의 길이가 모두 같은 사각형을 마름모라고 해요.</p> <p>-네. 두 선분의 길이는 같아요. 이것 역시 접었다 편 후니까 포개어졌던 부분으로 길이가 같아요.</p> <p>-네. 포개어지게 접었던 부분이 맞닿은 부분이니까 두 선분은 서로 직각으로 만나고 있어요.</p> <p>교사의 수직이등분선의 정의에 관한 설명을 주의 깊게 듣는다.</p>	<p>교사의 일방적인 설명에 의한 수업이 되지 않도록 학생으로부터 적절한 대답을 유도해낸다.</p> <p>학생 스스로 수학적 성질을 발견해 내도록 유도한다.</p>	<p>추론하기</p> <p>추론하기</p> <p>정의하기</p> <p>추론하기</p> <p>추론하기</p> <p>정의하기</p>
----	--	---	---	---

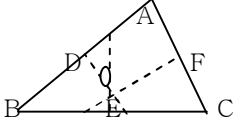
	<p>수직일 때, 선분 PQ 를 선분 AB 의 수직이등분선이라고 해요.</p> <p>-여기서 우리는 마름모의 두 대각선의 성질을 알 수 있겠네요?</p> <p>-네. 잘했어요.</p>	<p>-마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다는 것을 발견할 수 있어요.</p>		<p>규칙찾기</p>
<p>전개</p>	<p>각자 자와 컴퍼스를 준비 하도록 지도한다.</p> <p>-그럼 이제 우리가 발견 한 마름모의 두 대각선의 성질을 이용하여 선분의 수직이등분선의 작도를 해보도록해요.</p> <p>-선분 AB 의 수직이등분 선을 작도해보도록 하죠.</p>  <p>-점 A 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 선분 AB 의 <math>\frac{1}{2}</math>보다 큰 원을 그려봅시다. 그리고 점 B 를 중심으로 해서 같은 길이의 반지름으로 다시 원을 그려봅시다. 여러분들이 그 린 두 원의 교점을 각각 P,Q 라고 하죠. 그리고 마지막으로 이 두 점 P, Q를 지나는 직선을 그으면 직선 PQ 가 선분 AB 의 수직이등분선입니다.</p> 	<p>교사의 설명에 따라 각자 공책에 선분 AB 를 그린다.</p> <p>교사의 설명을 주의 깊게 듣는다. 교사의 시범에 따라서 각자 직접 작도해보고 이해가 가지 않는 부분은 손을 들고 질문한다.</p>	<p>교사는 학생들이 작도 과정을 따라 올 수 있도록 속도를 조절한다</p> <p>시범을 보인 후 학생들이 잘하고 있는지 교실을 둘러보며 확인한다.</p>	<p>규칙찾기</p>

<p>전개</p>	<p>-왜 직선 PQ 가 선분 AB 의 수직이등분선이라고 말할 수 있을까요?</p> <p>-네. 잘 발견해냈어요.</p>	<p>-두 원의 반지름의 길이를 똑같이 잡았으니까 점 A, P, B, Q 를 연결하면 네 변의 길이가 같게 돼요. 그럼 그 도형은 마름모가 되고 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분해 줘요. 그러니까 직선 PQ 는 선분 AB 의 수직이등분선이 돼요.</p>	<p>교사의 일방적인 설명에 의한 수업이 되지 않도록 학생으로부터 적절한 대답을 유도해낸다. 학생 스스로 수학적 성질을 발견해내도록 유도한다.</p>	<p>일반화, 수형식화, 국소적 조직화</p>
<p>정리</p>	<p>학생들이 배운 내용을 잘 이해했는지 확인하기 위해 교과서 P.19 6 의 예제를 풀어보도록 지도한다 [16].</p> <p>-이번 시간에 했던 선분의 수직이등분선의 성질은 앞으로 배우는 다른 도형들에서도 많이 활용이 되는 부분이에요. 오늘 배운 내용을 집에 가서 다시 한번 복습하도록 하세요. 그리고 교과서 P.19 6 의 문제 2 번을 숙제로 해 보세요 [16].</p> <p>차시예고</p> <p>-다음시간에는 각의 이등분선의 작도에 대해서 알아보기로 합시다.</p>	<p>수업 중 배운 내용을 참고하여 교과서의 예제를 각자 풀어본다. 풀이 과정 중 모르는 부분은 손을 들고 교사에게 질문하도록 한다.</p> <p>다음 수업 시간에 준비해야 할 것을 적고 책상을 정리한다.</p>	<p>교사는 교실을 돌아다니며 문제 풀이에 어려움을 느끼는 학생을 보충 지도하도록 한다.</p>	

[부록 : 학습지도안Ⅱ]

학습단계	교수-학습 활동		지도 유의점	수학화이론 적용
	교사	학생		
도입	<p>학생들이 선분의 수직이등분선의 정의와 성질을 기억하고 있는지 확인한다.</p> <p>우리의 생활 주변에서 쉽게 관찰할 수 있는 삼각형의 외심의 사례를 예제로 보여주고 흥미를 끈다.</p> <p>(세 집에서 같은 거리에 우물 만들기, 공원의 세 입구에서 같은 거리에 매점 설치하기 등)</p> <p>학습 목표제시 -이번 시간에는 삼각형의 외심 의 뜻과 외심의 성질에 대해서 알아보도록 해요.</p>	<p>교사의 설명을 주의 깊게 듣고 선분의 수직이등분선의 성질을 기억한다.</p> <p>교사가 드는 예제를 주의 깊게 들으며 그 상황을 생각해보도록 한다.</p>	<p>교사의 일방적인 설명에 의한 암기가 되지 않도록 적절한 질문과 힌트로 학생들의 대답을 이끌어낸다.</p>	<p>정의하기</p> <p>패턴찾기</p>
전개	<p>각자 삼각형 모양의 셀로판지를 준비하도록 지도한다.</p> <p>-셀로판지를 다음과 같이 변 B C 의 수직이등분선으로 접었다 펴봅시다</p> 	<p>교사의 설명에 집중하여 셀로판지를 접었다 펴는다.</p>	<p>학생들이 직접 셀로판지를 접어 보도록 한다.</p> <p>모든 학생들이 교사의 설명을 따라 올 수 있도록 속도를 조절한다.</p>	<p>도식화</p>

<p>전개</p>	<p>-이번에는 변 AC의 수직이등분선이 되도록 접었다 펴볼까요?</p> 	<p>교사의 지도에 따라 셀로판지를 접었다 편다.</p>		<p>도식화</p>
	<p>-선생님과 같은 방식으로 이번에는 변 AB의 수직이등분선으로 셀로판지를 한 번 더 접었다 펴봅시다.</p> 	<p>교사의 지도에 따라 셀로판지를 다시 한 번 접었다 편다.</p>		<p>도식화</p>
	<p>-이렇게 삼각형의 각 변의 수직이등분선으로 접었다 펴보았어요. 어떤 결과가 발생된 것 같나요?</p> <p>-그렇군요. 변 BC, 변 AC, 변 AB의 수직이등분선이 모두 한 점에서 만나고 있네요. 우리는 이렇게 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다는 것을 종이접기를 통해서 보았어요. 이번에는 삼각형 ABC의 세 변의</p>	<p>접었던 선이 모두 한 점에서 만나요.</p> <p>교사의 설명을 주의 깊게 듣는</p>	<p>교사의 일방적인 설명식 수업이 되지 않도록 적절한 발문을 통해 학생들의 대답을 유도한다.</p>	<p>추론하기</p> <p>규칙찾기, 추론하기</p>

<p>전개</p>	<p>수직이등분선이 한 점에서 만난다는 것을 증명을 통해 알아보기로 해요.</p>  <p>-△ABC의 두 변 AB, BC의 중점을 각각 D, E라 하고, 선분 AB, 선분 BC의 수직이등분선의 교점을 O, 점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F라고 하죠.</p> <p>-점 O는 선분 AB의 수직이등분선 위의 점이므로 <math>\overline{OA} = \overline{OB}</math> 가 되죠. 또 점 O는 선분 BC의 수직이등분선 위의 점이므로 <math>\overline{OB} = \overline{OC}</math> 네요. 그러므로, <math>\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}</math> 입니다. 두 직각삼각형 AOF와 COF에서 <math>\angle OFA = \angle OFC = 90^\circ</math>, <math>\overline{OA} = \overline{OC}</math>, <math>\overline{OF}</math>는 공통이므로 직각삼각형의 합동조건에 의하여 <math>\triangle AOF = \triangle COF</math>가 되고 따라서 <math>\overline{AF} = \overline{CF}</math>가 되네요. 여기서 직각삼각형의 합동조건 무엇이 사용됐나요?</p> <p>-네. 그렇죠. 바로 RHS 합동조건에 의해서 두 삼각형은 합동이 되네요. 이 때 <math>\angle AOF = \angle CFO = 90^\circ</math> 이므로 <math>\overline{OF}</math>는 <math>\overline{AC}</math>의 무엇이라고 할 수 있나요?</p>	<p>각자의 공책에 셀로판지를 붙인 후 교사의 지도에 따라 삼각형에 기호를 매긴다.</p> <p>교사의 설명을 주의 깊게 들으며 각자 공책에 직접 증명해본다. 이해가 가지 않는 부분은 손을 들어 질문 하고 이해하고 넘어가도록 한다.</p> <p>‘빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 각각 같은 두 직각삼각형은 합동이다.’가 사용됐어요. RHS 합동이에요.</p> <p>-수직이등분선이요.</p>	<p>교사는 모든 학생들이 뒤쳐지지 않도록 증명과정에서 속도를 조절한다. 시범을 보인 후 학생들이 잘 하고 있는지 교실을 돌리 보며 확인한다.</p> <p>교사는 적절한 발문을 통하여 학생들이 이미 배웠던 내용을 기억하고 있는지 확인하며 수업을 진행한다.</p>	<p>규칙찾기</p> <p>추론하기, 알고리즘화</p> <p>추론하기</p>
-----------	--	--	--	--

전개	<p>-네. 따라서 <math>\triangle ABC</math> 의 세 변의 수직이등분선은 한 점 <math>O</math> 에서 만나고, <math>\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}</math> 가 되죠.</p>			규칙찾기
	<p>-위의 증명에서 <math>\triangle ABC</math> 의 세 변의 수직이등분선의 교점을 <math>O</math> 라고 하면 <math>\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}</math> 이므로, 점 <math>O</math> 를 중심으로 세 점 <math>A, B, C</math> 가 원 위에 원을 그릴 수 있을까요?</p>	<p>-네. 반지름이 <math>\overline{OA}</math> 인 원 위에 있게 돼요.</p>	<p>교사의 일방적인 설명에 의한 수업이 되지 않도록 학생으로부터 적절한 대답을 유도해낸다.</p>	추론하기, 도식화하기
	<p>-네. 맞아요. 그래서 우리는 이 때 원 <math>O</math> 는 <math>\triangle ABC</math> 에 외접한다고 하고, <math>\triangle ABC</math> 는 원 <math>O</math> 에 내접한다고 해요. 또 원 <math>O</math> 를 <math>\triangle ABC</math> 의 외접원이라고 하며, 외접원의 중심 <math>O</math> 를 <math>\triangle ABC</math> 의 외심이라고 합니다.</p>	<p>교사의 설명을 주의 깊게 듣고 용어의 정의를 알도록 한다.</p>		정의하기
	<p>-외심에 대해서 이해가 가나요? 무엇을 외심이라고 하나요?</p>	<p>-삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만나요. 그 점을 바로 외심이라고 해요.</p>		정의하기
	<p>-네. 그럼 외심의 성질이라고 할 수 있는 우리가 발견한 것은 무엇이죠?</p>	<p>-외심에서 삼각형의 세 꼭지점에 이르는 거리가 같다는 사실이요.</p>	<p>학생 스스로 수학적 성질을 발견해 내도록 유도한다.</p>	일반화하기, 알고리즘화, 국소적 조직화
<p>-네. 잘 발견해냈네요.</p>				

<p style="text-align: center;"><b>정리</b></p>	<p>학생들이 배운 내용을 잘 이해했는지 확인하기 위해 교과서 P.57 의 문제 3 을 풀어보도록 지도한다[4].</p> <p>-이번 시간에 했던 삼각형의 외심과 그 성질은 앞으로 다양 한 문제의 형태로 응용이 돼서 만나게 될 부분이에요. 오늘 배운 내용을 집에 가서 다시 한 번 복습하도록 하세요. 그리고 교과서 P.57 의 문제 2 번을 숙제로 해보세요[4].</p> <p>차시예고</p> <p>-다음시간에는 삼각형의 내심에 대해서 알아보기로 합니다.</p>	<p>수업 중 배운 내용을 참고하여 교과서의 문제를 각자 풀어본다. 풀이 과정 중 모르는 부분은 손을 들고 교사에게 질문하도록 한다.</p> <p>다음 수업 시간에 준비해야 할 것을 적고 책상을 정리한다.</p>	<p>교사는 교실을 돌아다니며 문제 풀이에 어려움을 느끼는 학생을 보충 지도하도록 한다.</p>	
--	--	--	---	--